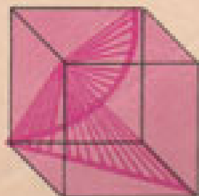
CULEGERI
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
ȘI
FIZICĂ

SERIE

A.M. IAGLOM * I.M. IAGLOM

PROBLEME NEELEMENTARE TRATATE ELEMENTAR



A. M. IAGLOM ☆ I. M. IAGLOM

PROBLEME NEELEMENTARE TRATATE ELEMENTAR

Ediția a doua

Traducere din limba rusă

Seria
Culegeri de probleme de matematică și fizică



Editura tehnică
București

Cartea conţine o serie de probleme din diferite domenii ale matematicii superioare: teoria probabilităţilor, teoria numerelor, geometria proiectivă, calculul integral, topologie, probleme rezolvate prin metode care nu ies din cadrul cunoştinţelor dobîndite în liceu.

Scopul lucrării este de a familiariza pe cititori cu o serie de noţiuni şi metode matematice şi de a le stimula activitatea creatoare.

Lucrarea este adresată elevilor şi studenţilor şi poate fi utilă cadrelor didactice din învăţămîntul mediu.

Redactor: VALENTINA CREŢU
Tehnoredactor: ELENA GERU
Coperta seriei: CONSTANTIN GULUŢĂ

Bun de tipar: 20.7.83. Coli de tipar: 25,75. C. Z. 51(076)



Tiparul executat sub comanda nr. 366 la
Întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918"
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
Bucureşti,
Republica Socialistă România

А. М. ЯГЛОМ и И. М. ЯГЛОМ
НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ
Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва 1954

PREFAȚĂ LA EDIȚIA ÎNTÎI

Frații A. M. Iaglom și I. M. Iaglom, cunoscuți prin importantele lor cercetări în domeniul matematicilor superioare, au scris lucrarea de față care arată cititorilor o altă latură a preocupărilor lor și anume aceea de a introduce fapte și idei noi în învățămîntul matematic predat în școala medie.

Felix Klein, în prefața cunoscutului său tratat „Matematici elementare privite din punct de vedere superior", vorbește de „o dublă discontinuitate" în viața profesorului de liceu. Mai intîi ca tînăr student, de-abia intrat pe porțile facultății de matematică, el este pus în fața unor probleme care nu-i mai reamintesc prin nimic de materia învățată în școala medie. După ce termină studiile universitare și ajunge profesor, neputînd face nici o legătură între matematicile superioare învățate în facultate și ceea ce predă elevilor săi, intră repede pe făgașul tradiționalului învățămînt al matematicii din școala medie și cunoștințele căpătate în timpul studenției îi rămîn doar ca o amintire care nu exercită nici o influiență asupra muncii sale didactice.

Desigur că această dublă discontinuitate, care se manifesta cu tărie la începutul secolului nostru cînd Felix Klein a scris celebrul său tratat, este mult diminuată în condițiile învățămîntului de astăzi. Dar ea nu poate dispare total, datorită caracterului specific al matematicii.

Spre deosebire de alte discipline predate în învățămîntul mediu, pentru care este posibil să se aducă la cunoștința elevilor în mod elementar realizările importante ale științei și culturii contemporane, între matematica predată în școala medie și matematica modernă trebuie să existe în mod fatal o mare distanță, datorită caracterului deductiv al cercetării matematice și mulțimii de noțiuni și relații noi pe care ea o implică.

Dacă învățămîntul oficial nu poate să se abată de la această regulă, el fiind obligat să înceapă de la aritmetică, algebră și geometrie, mergînd pînă la un anumit nivel, în schimb Societatea de științe matematice și fizice din R.P.R. — care are o libertate mai mare de acțiune — este în măsură, prin diversele ei publicații, prin conferințele pe care le programează etc., să aducă noi puncte de contact între matematica contemporană și matematica elementară, fiind astfel de un real folos nu numai elevilor bine înzestrați pentru studiile științifice, dar și profesorilor lor. Un pas înainte în această direcție îl face Societatea prin publicarea tratatului „Probleme neelementare tratate elementar" de A. M. Iaglom și I. M. Iaglom.

În această carte elevii găsesc probleme de calculul probabilităților, geometrie proiectivă, topologie, calculul integral, teoria numerelor — discipline științifice predate în învățămîntul superior — pe care le pot rezolva cu ajutorul matematicilor elementare, învățate în școala medie.

Este desigur inutil să mai atrag atenția asupra utilității rezolvării problemelor despre care s-a scris atît de mult în metodica predării învățămîntului matematic. S-ar mai putea încă adăuga o observație specifică cărții de față. Problemele de calculul probabilităților, geometrie proiectivă, topologie, calculul integral, teoria numerelor, din această culegere, sînt într-adevăr rezolvate prin metode elementare. Elevul care s-a străduit să le rezolve va observa însă repede că numai prin aceste metode nu va fi în stare să generalizeze problemele, să facă noi reflexii și să găsească noi rezultate legate de ele. De pe băncile școlii el capătă astfel convingerea că trebuie să-și însușească neîntîrziat metodele de lucru ale matematicilor superioare pentru a putea rezolva probleme importante, al căror conținut îl înțelege foarte bine.

Problemele din această culegere sînt foarte frumoase. Ele sînt atractive nu numai pentru elevi, dar și pentru matematicieni versați, care vor fi în măsură să aprecieze totodată și grija autorilor de a propune probleme care stau la baza unor teorii importante.

Utilitatea folosirii acestei lucrări este atît de mare, încît recomandarea studierii capitolelor ei în seminarii organizate de către filialele Societății aproape că vine de la sine.

Cei doi autori, binecunoscuţi în cercurile noastre de specialitate pentru creaţia lor ştiinţifică, pot fi încredinţaţi că această lucrare născută din dragostea pentru cultura ştiinţifică a tineretului va fi mult folosită şi apreciată de cadrele didactice din ţara noastră.

Prof. GH. MIHOC
Membru corespondent al Academiei R.P.R.

DIN PREFAŢĂ LA EDIŢIA RUSĂ

Aşa cum a fost concepută iniţial, această carte urma să constituie o continuare a culegerii „Probleme alese şi teoreme de matematică elementară", formată din primele numere ale „Bibliotecii cercului de matematică". În cursul elaborării s-a constatat însă că noua carte se deosebeşte mult de cele dinaintea ei şi că denumirea anterioară nu i s-ar mai potrivi.

Deosebirea esenţială dintre această carte şi primele numere ale „Bibliotecii" constă în tematica problemelor. În timp ce în primele numere temele problemelor erau luate de regulă din domenii elementare ale matematicii, studiate la şcoala medie (aritmetica, algebra, geometria), în cartea de faţă o mare parte dintre probleme se referă de fapt la discipline matematice studiate numai în învăţămîntul superior şi anume la calculul probabilităţilor, geometrie proiectivă, topologie, calculul integral, teoria numerelor. Ar fi cam forţat să denumim toate aceste probleme „probleme şi teoreme de matematică elementară". Pe de altă parte, nici una dintre problemele culese aici nu cere pentru rezolvare cunoştinţe care ies din cadrul cursului mediu de matematici (în afară de unele scurte explicaţii date în diferite locuri înaintea enunţurilor problemelor corespunzătoare). Atît ca formulare cît şi ca metode de rezolvare, toate aceste probleme sînt complet elementare. Cu alte cuvinte, majoritatea problemelor adunate aici se referă la chestiuni elementare ale matematicii superioare („neelementare") — şi tocmai acest fapt îl are în vedere titlul cărţii.

Scopul principal al cărţii de faţă este de a-l face pe cititor să cunoască o serie de noi fapte, idei şi metode matematice; forma culegerii de probleme a fost aleasă astfel ca prin întreg materialul tratat să fie stimulată munca activă creatoare.

Înainte de a citi cartea, trebuie ca fiecare să cerceteze „Indicaţiile pentru folosirea cărţii" (p. 7). Cartea este destinată elevilor iubitori de matematici din clasele superioare şi studenţilor din primii ani ai facultăţilor, profesorilor de matematică şi, în general, tuturor celor pe care-i pasionează această ştiinţă; cartea poate fi utilizată în activitatea cercurilor de matematică ale elevilor şi ale studenţilor.

Prin scopul urmărit, cele două părţi ale cărţii formează o unitate şi sînt destinate aceluiaşi cititor; însă ele diferă mult prin caracterul lor. Partea întîi „Probleme de analiză combinatorie şi de teoria probabilităţilor" conţine o sută de probleme care, deşi foarte diferite ca formulare şi ca metode de rezolvare, se aseamănă prin modul general de a pune problema. Toate aceste probleme se referă la un domeniu al matematicii destul de restrîns şi anume la analiza combinatorie, care în cursul mediu este puţin studiat. Problemele din prima parte nu sînt, de regulă, prea complicate şi sînt destul de apropiate de problemele şcolare, cu excepţia ultimului ciclu „Probleme de teoria probabilităţilor" care conţine o serie de probleme destul de grele.

Dimpotrivă, partea a doua „Probleme din diferite domenii ale matematicii" are un conţinut foarte variat. Problemele cuprinse aici sînt luate din diferite domenii ale matematicii, mai adesea din cea superioară — titlul cărţii referindu-se, în primul rînd, tocmai la această parte. În scurtele introduceri la unele cicluri sînt date indicaţii privind disciplinele matematice cărora le aparţin problemele considerate, precum şi bibliografia suplimentară, necesară unei cunoaşteri mai amănunţite a acestor discipline. În majoritatea cazurilor, aceste cicluri de probleme nu au legătură între ele.

Unele probleme sînt consacrate teoremelor clasice care joacă un rol important în ştiinţa actuală; alte probleme sînt luate din importante reviste matematice, uneori din numere foarte recente. Unele dintre problemele date în carte au fost propuse la lucrările cercului de matematică al elevilor de pe lîngă Universitatea de Stat din Moscova şi la olimpiadele elevilor din Moscova.

Prima parte a cărţii a fost elaborată în mare de A. M. Iaglom, iar partea a doua de cei doi autori împreună; redactarea definitivă a întregii cărţi a fost făcută de ambii autori. Unele probleme au fost comunicate autorilor de către V. G. Bolteanski, E. B. Dinkin, M. I. Graev, S. L. Kamenomostskaia, N. I. Korobov, I. A. Smorodinski, V. A. Uspenski şi N. N. Cenţov; acesta din urmă precum şi G. M. Adelson-Velski şi M. M. Bongard, au contribuit de asemenea şi la rezolvarea unora dintre probleme. O serie de observaţii, care au contribuit la îmbunătăţirea cărţii au fost aduse de A. Z. Rivkin. Autorii sînt sincer recunoscători tuturor celor care i-au ajutat sub orice formă la elaborarea cărţii.

A. M. IAGLOM
I. M. IAGLOM

PREFAŢĂ LA EDIŢIA A DOUA ÎN LIMBA ROMÂNĂ

Această carte a apărut în limba rusă în 1954; în anii 1961—1963 a apărut traducerea ei în limba japoneză, iar în 1964—1967, ediţia în limba engleză (Holden Day, San Francisco, S.U.A.). Ediţia întîi a acestei lucrări a apărut în Editura tehnică în 1962; ediţia a doua diferă de prima numai prin modificări neesenţiale.

Au trecut aproape 30 de ani de la apariţia acestei lucrări în limba rusă. În acest răstimp s-au schimbat multe atît în matematica însăşi, cît şi în metodologia de predare a acesteia în învăţămînt. Astăzi, cum ni se pare, făcînd abstracţie de programa analitică a matematicii, pentru liceu, neutilizarea metodelor analizei diferenţiale şi integrale la rezolvarea problemelor incluse în cartea noastră a căpătat valenţe noi, deoarece în rezolvarea problemelor, în general, au fost întrebuinţate metode finite, prin care se caracterizează matematica aplicată modernă. S-a întîmplat astfel că lucrarea noastră nu numai că nu s-a învechit, dar, într-un sens, a devenit mai actuală. Într-adevăr, prima parte a cărţii este consacrată combinatoricii şi teoriei probabilităţilor. Or matematica finită, care nu este legată de funcţii continue şi treceri la limită, şi, în particular, combinatorică, are în ultimele decenii o perioadă de înflorire fără precedent, cu posibilităţi nebănuit de mari în aplicaţii practice. A crescut şi valoarea aplicativă a teoriei probabilităţilor, ceea ce ne permite a sublinia importanţa rezultatelor acesteia în practică.

Majoritatea temelor abordate în partea a doua a cărţii par acum mai profunde şi mai puţin exotice. Astfel, problemele 101—112 sînt strîns legate de matematica discretă modernă. De exemplu problemele 101—103 se referă la geometria finită, care din matematica distractivă s-a transformat în ultima vreme într-o ştiinţă cu aplicaţii practice de interes major. Ciclul 4 este consacrat topologiei, a cărei dezvoltare în ultimele decenii a fost în aşa fel, încît acum se spune că topologia a ieşit pe primul loc în întrecerea ştiinţifică cu „sora sa mai mare“ — geometria. Ciclul 6 se află la intersecţia a două direcţii actuale: teoria figurilor convexe (în particular, poligoane şi poliedre convexe) şi teoria optimizării. La cea din urmă se referă problemele din ciclul 10. Ciclurile 7 şi 8 sînt dedicate matematicii finite, iar problema 126 este dintre cele caracteristice matematicii moderne aplicate. Actualitatea ciclului 9 a crescut prin aplicaţii ale sistemelor de numeraţie nezecimale în calculatoare electronice moderne etc.

În bibliografie am trecut şi unele lucrări apărute recent; trimiterile la bibliografie vor permite cititorului să adîncească cunoştinţe în anumite domenii.

Moscova, octombrie 1981

A. M. IAGLOM
I. M. IAGLOM

CUPRINS

INDICAȚII PENTRU FOLOSIREA CĂRȚII

Cartea este alcătuită din enunțurile problemelor, rezolvări, răspunsuri și indicații. Pentru majoritatea problemelor, sfătuim pe cititor să încerce să găsească singur soluțiile. După ce a rezolvat problema, trebuie să se controleze uitîndu-se la răspunsul corespunzător; dacă răspunsurile nu coincid, trebuie să încerce să-și găsească greșeala; dacă răspunsurile coincid, este util să compare rezolvarea găsită cu cea dată în carte. Dacă cititorul nu izbutește să găsească singur soluția, trebuie să se uite la indicația de la sfîrșitul cărții (sau la răspuns, care, de asemenea, poate ajuta la găsirea soluției). Dacă nici aceasta nu este de nici un folos, trebuie să cerceteze rezolvarea. Trebuie să se țină seama de faptul că încercarea de a rezolva problema este folositoare chiar și atunci cînd nu duce la un rezultat: aceasta permite să se pătrundă mai adînc în esența problemei și să se urmărească mai conștient rezolvarea dată în carte.

Totuși modul de folosire a cărții indicat aici nu poate fi recomandat în toate cazurile. Cartea conține multe probleme grele, notate după gradul de dificultate cu unul, două sau trei asteriscuri. Problemele notate cu două și trei asteriscuri sînt deseori rezultate remarcabile obținute de mari matematicieni (v. de exemplu, problemele 132 sau 166); este firesc să ne îndoim că cititorul va reuși să obțină aceste rezultate numai el singur. De aceea, în cazul problemelor foarte grele îl sfătuim să consulte de la început indicația dată la sfîrșitul cărții; chiar și după aceasta, rezolvarea problemei, cum este și firesc, va prezenta dificultăți însemnate.

Această carte (mai ales partea a doua) poate fi folosită mai mult decît o simplă culegere de probleme; ea poate fi considerată și ca o culegere de propoziții matematice — în medie mult mai complicate decît cele din excelenta carte a lui H. Steinhaus „Caleidoscop matematic" București, Editura tehnică, 1961 — prezentată sub formă de probleme și însoțite de soluții amănunțite. Privind cartea sub acest aspect, rezolvările problemelor trebuie cercetate imediat după citirea enunțului. Unele părți ale cărții sînt scrise astfel încît este mult mai bine ca ele să fie citite numai în acest fel (ciclurile 12—14 ale părții a doua, problemele 51—52, 81 82 ale primei părți și, în general, majoritatea problemelor notate cu trei asteriscuri; într-o măsură mai mică, acest lucru rămîne valabil pentru ciclurile 6B și 6C ale primei părți sau pentru ciclul 10 al părții a doua).

Problemele a căror rezolvare nu cere cunoștințe ce ies din cadrul programei analitice a învățămîntului mediu au fost numerotate cu cursive.

Prima parte a cărții este mai simplă decît a doua; de aceea se recomandă ca cititorul elev să înceapă cu aceasta. Este firesc ca problemele din partea întîi să fie rezolvate în ordinea în care au fost introduse în carte, trecînd pe rînd de la un ciclu la altul (pot fi lăsate de o parte acele cicluri care-l vor interesa mai puțin pe cititor): bineînțeles, nu este obligatoriu să se rezolve toate problemele dintr-un anumit ciclu, înainte de a se trece la următorul. Ultimul ciclu al primei părți conține cîteva probleme a căror rezolvare se bazează pe propoziții ce fac obiectul unor probleme din partea a doua; toate aceste probleme sînt notate cu trei asteriscuri și în indicațiile corespunzătoare sînt date trimiteri la rezultatele folosite în rezolvarea lor. Prima parte a cărții poate sta la baza activității cercurilor de matematică ale elevilor sau studenților interesați de analiza combinatorie și aplicațiile ei la calculul probabilităților. În această activitate se poate dovedi utilă bibliografia indicată în carte. Poate fi recomandat următorul mod de lucru în cercuri: problemele mai ușoare vor fi rezolvate de fiecare participant, iar cele mai grele vor fi considerate ca „teorie": rezolvările lor vor fi studiate după carte și vor fi expuse în ședințele cercului.

Partea a doua a cărții este alcătuită după alt plan. Ciclurile conțin aici, de obicei, mult mai puține probleme (uneori numai una); deseori diferite cicluri sînt complet independente

unul de altul. De asemenea, în cadrul fiecărui ciclu problemele nu depind de obicei una de alta; numai în ciclurile 10—14 rezolvările problemelor se bazează deseori pe rezultatele problemelor precedente. Unele probleme din partea a doua (de exemplu, problemele 102—103, 105—107, 109, 111—112, 115—116, 117, 118, 122, 123—124, 128—129, 130—135, 142—145) pot servi ca o bună temă pentru referate într-un cerc de matematică al studenților. Un conducător cu experiență poate folosi acest material și în activitatea unui cerc de elevi. În activitatea cercului va fi utilă și bibliografia suplimentară indicată.

Un loc important îl ocupă în carte ultimele trei cicluri de probleme din partea a doua. Acestea sînt strîns legate între ele: rezolvările cîtorva probleme din ciclul 12 se bazează pe rezultatele problemelor din ciclul 13 (toate aceste probleme sînt însemnate cu un asterisc); toate problemele din ciclul 13 se rezolvă prin metodele geometrice dezvoltate în ciclul 12; soluțiile problemelor din ciclul 14 se bazează adesea pe rezultatele problemelor din cele două cicluri precedente. Astfel ciclurile 12—14 formează o unitate. Ele conțin o materie teoretică vastă și importantă privind problemele cele mai grele din carte și pot face obiectul activității unui cerc special de matematică.

PARTEA ÎNTÎI

PROBLEME DE ANALIZĂ COMBINATORIE ŞI DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR

Problemele din această parte se aseamănă prin modul în care este formulată întrebarea: aproape în toate se cere să se răspundă la întrebarea „cîte?", „cîţi?" sau „în cîte moduri?". Astfel de probleme se numesc de obicei probleme de analiză combinatorie (probleme în care se determină numărul diferitelor combinări), iar ramura matematicii care se ocupă de rezolvarea lor se numeşte analiză combinatorie. Cunoştinţe sumare de analiză combinatorie sînt prevăzute în programa clasei a X-a a liceului (rezolvarea unor probleme în care intervine numărul a diferite permutări, aranjamente şi combinări); în cea mai mare parte a problemelor date aici acest material teoretic nu este presupus cunoscut (cu excepţia problemelor 5—7, 29, 48, 49, 55—60, 66—71, 77—80).

În afară de problemele care încep cu cuvintele „cîte", „cîţi" şi „în cîte moduri", în culegerea de faţă se află de asemenea cîteva probleme consacrate proprietăţilor coeficienţilor binomiali C_n^m, care dau numărul combinărilor de n elemente luate cîte m (problemele din ciclul 5), precum şi o serie de probleme de teoria probabilităţilor (ciclul 6). Acestea din urmă nu au pretenţia de a da cititorului o imagine a obiectului şi a metodelor teoriei probabilităţilor, care apare în cartea de faţă nu ca o disciplină matematică independentă, ci numai ca un domeniu în care calculele din analiza combinatorie îşi găsesc o aplicaţie importantă. Din această cauză ciclul 6 conţine numai probleme a căror rezolvare nu cere metode teoretice speciale din calculul probabilităţilor.

Pentru a nu mări prea mult volumul lucrării, a trebuit să renunţăm la includerea în această carte a problemelor care utilizează cea mai importantă metodă generală a analizei combinatorii, aşa-numita „metodă a funcţiilor generatoare". Observăm, de altfel, că primele probleme din ciclul 5 conduc pe cititor foarte aproape de ideea de bază a acestei metode ([22], [52], [36]). Aplicaţiile metodei funcţiilor generatoare în calculul probabilităţilor sînt puse din evidenţă în [7], [23]. Mai recomandăm [58], [59], [62], [35] s.a.

1. PROBLEME INTRODUCTIVE

1. Se dau patru puncte în spaţiu, necoplanare. Cîte plane pot fi duse la egală distanţă de toate aceste puncte?

2. Se dau cinci puncte în spaţiu, care nu sînt situate pe o aceeaşi sferă (în acelaşi plan). Cîte sfere (plane) se află la egală distanţă de aceste cinci puncte?

[Distanța de la punctul M la sfera Σ de centru O se numește lungimea celui mai mic dintre segmentele MA și MB, unde A și B sînt punctele de intersecție a dreptei MO cu sfera Σ[1].]

3. Cîte sfere pot fi tangente la planele tuturor fețelor unui tetraedru dat T?

4. În cîte moduri diferite pot fi vopsite cu șase culori date fețele unui cub (fiecare față trebuie să fie vopsită în întregime cu o singură culoare), dacă se consideră ca fiind diferite doar acele moduri de vopsire în care fețele de aceeași culoare nu pot fi suprapuse prin rotația cubului?

5. În cîte moduri diferite pot fi formate din 30 muncitori trei brigăzi a cîte 10 oameni fiecare?

6. În cîte moduri diferite pot fi alese șase prăjituri de același fel sau diferite într-o cofetărie, unde există 11 sorturi diferite de prăjituri?

7. O comisie este formată din 11 persoane. Documentele cu care lucrează comisia sînt păstrate într-o casă de fier. Cîte lacăte trebuie să aibă casa de fier și cîte chei trebuie să aibă fiecare membru al comisiei pentru ca accesul la documente să fie posibil cînd se întrunește majoritatea membrilor și să nu fie posibil cînd nu se întrunesc decît mai puțin de jumătate din membrii comisiei?

8. Numerele de la 1 la 1 000 sînt scrise unul după altul pe un cerc. Se taie numerele din 15 în 15, începînd cu primul (adică numerele 1, 16, 31 etc.); la o nouă parcurgere a cercului sînt luate în considerare și numerele tăiate înainte. Se continuă operația pînă ce se constată că toate numerele care ar urma să fie tăiate au fost întîlnite și tăiate mai înainte. Cîte numere rămîn netăiate?

9. Toate numerele de la 1 la 10 000 000 000 sînt scrise unul după altul. Dintre aceste numere care sînt mai multe: cele care conțin printre cifrele lor pe 1 sau cele în care nu figurează cifra 1?

10. Toate numerele de la 1 la 222 222 222 sînt scrise unul după altul. De cîte ori apare cifra 0 în scrierea acestor numere?

2. DESCOMPUNEREA NUMERELOR ÎN PRODUSE DE FACTORI ȘI ÎN SUME DE TERMENI

În rezolvarea unora dintre problemele ce urmează se dovedesc a fi utile notațiile de mai jos.

Cu semnul $[x]$ (se citește „partea întreagă a lui x“) se notează cel mai mare dintre numerele întregi care nu sînt mai mari decît x. De exemplu

$$\left[\frac{3}{2}\right] = 1,\ [10{,}85] = 10,\ [5] = 5,\ [-8{,}2] = -9 \text{ etc.}$$

(menționăm că se va folosi semnul $[x]$ numai în aplicațiile referitoare la numere pozitive x).

---

[1] Se poate demonstra că cel mai mic dintre segmentele MA și MB este cel mai scurt dintre **toate** segmentele care unesc punctul M cu toate punctele posibile ale sferei Σ.

Cu semnul (x) (se citeşte „cel mai apropiat număr întreg de x") se notează numărul întreg, care este cel mai apropiat de numărul x. De exemplu

$$(5{,}4) = 5, \quad (8{,}73) = 9, \quad (6) = 6, \quad (-2{,}8) = -3 \text{ etc.}$$

Este clar că (x) va fi egal cu $[x]$ sau cu $[x] + 1$ după cum diferenţa $x - [x]$ va fi mai mică sau mai mare decît o doime. În cazul $x - [x] = 1/2$, putem lua drept (x) şi $[x]$ şi $[x] + 1$; în acest caz, convenim să considerăm $(x) = [x]$ (observăm, de altfel, că aici semnul (x) va fi folosit doar în cazurile în care $x - [x] \neq 1/2$, astfel că nu vor apărea nedumeriri în ceea ce priveşte considerarea lui (x) egal cu $[x]$ sau cu $[x] + 1$).

În toate problemele următoare, în al căror enunţ intervine numărul n, acest număr va fi considerat ca un număr întreg pozitiv.

11. a) Cîte dintre numerele întregi, mai mici decît 1 000, nu sînt divizibile nici cu 5, nici cu 7?

b) Cîte dintre aceste numere întregi nu sînt divizibile nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?

12*. Cîte dintre numerele întregi, mai mici decît 56 700 000, sînt prime cu acest număr?

13. Cîte dintre numerele întregi pozitive x, mai mici decît 10 000, sînt astfel încît diferenţa $2^x - x^2$ nu se divide cu 7?

14. Cîte perechi diferite de numere întregi x, y, cuprinse între 1 şi 1 000, sînt astfel încît $x^2 + y^2$ se divide cu 49?

15*. În cîte moduri poate fi descompuns un milion în produse de trei factori? Descompunerile care diferă numai prin ordinea factorilor se consideră ca fiind identice.

16*. Cîţi divizori diferiţi are numărul 86 400 000 (inclusiv 1 şi numărul 86 400 000)? Să se determine suma tuturor acestor divizori.

17. Cîte perechi diferite de numere întregi A, B sînt astfel încît cel mai mic multiplu comun al lor este egal cu 59 400 000?

18. Să se determine coeficienţii lui x^{17} şi al lui x^{18} după desfacerea parantezei şi reducerea termenilor asemenea în expresia

$$(1 + x^5 + x^7)^{20}.$$

19. În cîte moduri se pot schimba 20 copeici în monede de 5 copeici, 2 copeici şi 1 copeică?

20. În cîte moduri se pot obţine n copeici din monede în valoare de 1 copeică şi 2 copeici?

21.** În cîte moduri se pot obţine n copeici din monede:

a) în valoare de 1 copeică, 2 copeici şi 3 copeici?

b) în valoare de 1 copeică, 2 copeici şi 5 copeici?

22**. În cîte moduri poate fi obținută o rublă din monede în valoare de 1, 2, 5, 10, 20 și 50 copeici?

23. În cîte moduri poate fi reprezentat numărul n sub forma unei sume de două numere întregi pozitive, dacă reprezentările care diferă doar prin ordinea termenilor sînt considerate identice?

24. Cîte soluții în numere întregi are inegalitatea

$$|x| + |y| < 100?$$

Se va considera că pentru $x \neq y$ soluțiile x, y și y, x sînt diferite.

25. În cîte moduri poate fi reprezentat numărul n sub forma unei sume de trei numere întregi pozitive, dacă reprezentările care diferă prin ordinea termenilor sînt considerate ca fiind diferite?

26**. În cîte moduri poate fi reprezentat numărul n sub forma unei sume de trei numere întregi pozitive, dacă reprezentările care diferă numai prin ordinea termenilor sînt considerate identice?

27*. Se consideră ecuația

$$x + y + z = n,$$

care verifică inegalitățile

$$x \leqslant y + z, \quad y \leqslant x + z, \quad z \leqslant x + y.$$

Cîte soluții în numere întregi pozitive admite această ecuație?

28**. Cîte triunghiuri diferite, de perimetru n, au laturile de lungimi ce pot fi exprimate prin numere întregi?

29*. a) Cîte soluții diferite în numere întregi pozitive admite ecuația

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n?$$

b) Cîte soluții în numere întregi nenegative are ecuația

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n?$$

Observație. Un caz particular al problemei 29, a) (care corespunde la $m = 3$) este problema 25.

În încheierea acestei serii de probleme se vor da cîteva teoreme generale referitoare la descompunerea numerelor în sume de termeni. Primele trei se datoresc marelui matematician elvețian al secolului al XVIII-lea Leonhardt Euler (1707—1783), care a obținut multe rezultate importante în cele mai diferite domenii ale matematicii [1]. Euler își demonstrează teoremele [22] printr-o metodă generală foarte interesantă (metoda funcțiilor generatoare); aceste demonstrații diferă de demonstrațiile mult mai elementare, date în cartea de față ca rezolvări ale problemelor 30 și 31.

---

[1] Unele dintre rezultatele lui Euler sînt conținute în problemele 51, b), 143, 162.

În problemele 30 și 31 reprezentările unui număr sub forma unor sume de termeni, diferite numai prin ordinea termenilor, sînt considerate identice.

30*. a) Să se demonstreze că numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de m numere întregi pozitive egale sau diferite este egal cu numărul reprezentărilor numărului $n - m$ sub forma unor sume de termeni care iau valorile $1, 2, \dots, m$.

Astfel, numărul 8 poate fi reprezentat sub forma unor sume de trei termeni în următoarele cinci moduri:

$$1+1+6, \quad 1+2+5, \quad 1+3+4,$$
$$2+2+4, \quad 2+3+3.$$

Există, de asemenea, cinci reprezentări ale numărului $5 = 8 - 3$ sub forma unor sume de termeni, care iau valorile 1, 2, 3 și anume

$$1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+2,$$
$$1+1+3, \quad 1+2+2, \quad 2+3.$$

b) Să se demonstreze că numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de m numere întregi pozitive diferite este egal cu numărul reprezentărilor numărului

$$n - \frac{m(m+1)}{2}$$

sub forma unor sume de termeni care iau valorile $1, 2, \dots, m$.

Astfel, numărul 10 poate fi reprezentat sub forma unor sume de trei termeni diferiți în următoarele patru moduri:

$$1+2+7, \quad 1+3+6, \quad 1+4+5, \quad 2+3+5.$$

Există de asemenea, exact patru reprezentări ale numărului.

$$4 = 10 - \frac{3 \cdot 4}{2}$$

sub forma unor sume de termeni care iau valorile 1, 2 și 3:

$$1+1+1+1, \quad 1+1+2, \quad 1+3; \quad 2+2.$$

Din problemele-teoreme 30, a) și b) rezultă că *numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de m termeni egali sau diferiți este egal cu numărul reprezentărilor lui* $n + \frac{m(m-1)}{2}$ *sub forma unor sume de m termeni diferiți* (ambele aceste numere sînt egale cu numărul reprezentărilor lui $n - m$ sub forma unor sume de termeni care iau valorile $1, 2, \dots, m$).

31*. a) Să se demonstreze că numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de numere întregi pozitive diferite este egal cu numărul reprezentărilor aceluiași număr sub forma unor sume de numere întregi pozitive impare, egale sau diferite.

Astfel, numărul 6 poate fi reprezentat în patru moduri, sub forma unor sume de termeni neegali:

$$6, \quad 1+5, \quad 2+4, \quad 1+2+3.$$

În tot atîtea moduri poate fi reprezentat numărul 6 sub forma unor sume de termeni impari, egali sau diferiți:

$$1+5, \quad 3+3, \quad 1+1+1+3, \quad 1+1+1+1+1+1.$$

b) Să se demonstreze că numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de numere întregi, pozitive, dintre care nici unul nu se repetă mai des decît de $k-1$ ori, este egal cu numărul reprezentărilor aceluiași număr sub forma unor sume de termeni dintre care nici unul nu se divide cu k.

Astfel, numărul 6 poate fi reprezentat în şapte moduri diferite sub forma unor sume de termeni, dintre care nici unul nu se repetă mai mult decît de două ori:

$$6, \quad 3+3, \quad 4+2, \quad 5+1, \quad 3+2+1,$$

$$2+2+1+1, \quad 4+1+1.$$

În tot atîtea moduri poate fi reprezentat numărul 6 sub forma unor sume de termeni primi cu 3:

$$5+1, \quad 4+2, \quad 4+1+1, \quad 2+2+2, \quad 2+2+1+1,$$

$$2+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1.$$

Se vor mai da, fără demonstrație, următoarele propoziții, analoage problemelor-teoreme 31, a) și b) (dintre care, evident, prima este un caz particular al celei de-a doua).

Numărul reprezentărilor numărului n sub forma unor sume de numere întregi pozitive, în care fiecare număr a nu se repetă mai des decît a — 1 ori (respectiv nu mai des decît de $a^{k-1}-1$ ori), este egal cu numărul reprezentărilor aceluiași număr sub forma unor sume de termeni, dintre care nici unul nu este pătrat perfect (respectiv *o putere de exponent k) al unui număr întreg.*

Astfel există opt reprezentări ale numărului 10 sub forma unor sume de termeni în care 1 nu apare deloc, 2 apare nu mai des decît o dată, 3 nu mai des decît de trei ori etc.:

$$10, \quad 8+2, \quad 7+3, \quad 6+4,$$

$$5+5, \quad 5+3+2, \quad 4+4+2, \quad 4+3+3,$$

și există tot atîtea reprezentări ale aceluiași număr sub forma unor sume de termeni printre care nu figurează 1 și 4 (acestea sînt pătrate):

$$10, \quad 8+2, \quad 7+3, \quad 6+2+2, \quad 5+5,$$

$$5+3+2, \quad 3+3+2+2, \quad 2+2+2+2+2.$$

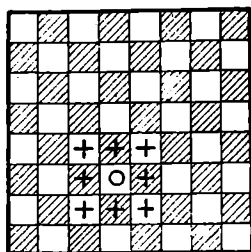
3. PROBLEME DE ANALIZĂ COMBINATORIE PE O TABLĂ DE ŞAH

Problemele din ciclul de față se referă la diferitele configurații ale figurilor pe o tablă de şah. Cu acest prilej, pe lîngă tabla de şah obișnuită formată din 8 rînduri orizontale de pătrate („orizontalele" tablei) și din 8 rînduri verticale („verticalele"), adică pe lîngă tablele care conțin 64 pătrate („pătratele" tablei) vom mai considera și tabla de șah cu n^2 pătrate conținînd n

orizontale şi n verticale. Pentru înţelegerea acestor probleme trebuie să se ştie că:

a) turnul ţine sub ameninţare toate pătratele tablei aflate pe aceeaşi verticală cu el [1];

b) nebunul ţine sub ameninţare toate pătratele tablei aflate pe aceeaşi diagonală cu el [1];



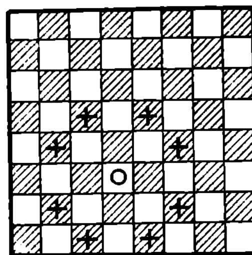


Fig. 1.

c) regina ţine sub ameninţare toate pătratele tablei aflate pe aceeaşi orizontală, pe aceeaşi verticală sau pe aceeaşi diagonală cu ea [1];

d) regele ţine sub ameninţare pătratele tablei învecinate cu pătratul pe care stă (v. fig. 1, *a*, unde sînt notate cu cruciuliţe toate pătratele pe care le ţine sub ameninţare regele, acesta stînd pe pătratul notat printr-un cerc);

e) calul ţine sub ameninţare pătratele tablei aflate la intersecţia dintre orizontala, al cărei număr diferă cu 1 sau cu 2 de numărul orizontalei ocupate de el, şi verticala al cărei număr diferă cu 2 sau 1 de numărul verticalei ocupate de cal (v. fig. 1, *b*, unde sînt notate cu cruciuliţe toate pătratele pe care le ţine sub ameninţare calul aflat pe pătratul notat cu un cerc).

Pentru înţelegerea şi rezolvarea acestor probleme nu este necesar nimic altceva referitor la jocul de şah (nici măcar cunoaşterea jocului).

32. a) Care este cel mai mare număr de turnuri care pot fi aşezate pe o tablă de şah cu n^2 pătrate, astfel ca să nu existe două turnuri care să se ameninţe? În cîte moduri diferite se poate obţine o astfel de aşezare?

b) Care este cel mai mic număr de turnuri care pot fi aşezate pe o tablă de şah cu n^2 pătrate, astfel ca ele să ţină sub ameninţare toate pătratele tablei? În cîte moduri diferite se poate obţine această condiţie?

33. a) Care este numărul maxim de nebuni care pot fi aşezaţi pe o tablă de şah obişnuită (cu 64 pătrate), astfel încît nici o pereche de nebuni să nu se ameninţe? Să se rezolve aceeaşi problemă pentru o tablă de şah cu n^2 pătrate.

b) Care este cel mai mic număr de nebuni care pot fi aşezaţi pe o tablă de şah cu 64 pătrate, astfel încît ei să ţină sub ameninţare toate pătratele tablei? Să se rezolve aceeaşi problemă pentru tabla de şah cu n^2 pătrate.

34. Să se demonstreze că pentru n par sînt pătrate perfecte:

a) numărul configuraţiilor diferite pe o tablă de şah cu n^2 pătrate, formate cu cel mai mare număr posibil de nebuni care nu se ameninţă;

---

[1] Se consideră că, printre pătratele pe care le ţine sub ameninţare turnul, nebunul sau regina se află şi pătratul ocupat de figura respectivă. În literatura şahistă se convine ca pătratul ocupat de o figură să nu fie considerat printre cele care se află sub ameninţare. Într-o astfel de accepţiune, în enunţurile problemelor 32, b), 33, b), 34, b) şi 36 expresia „toate pătratele tablei" ar fi urmat să fie înlocuită cu „toate pătratele tablei neocupate de figuri" (compară cu enunţul problemei 38).

b) numărul configurațiilor diferite pe o tablă de șah cu n^2 pătrate, formate cu cel mai mic număr posibil de nebuni care țin sub amenințare toate pătratele tablei.

35*. a) Să se demonstreze că, dacă pe o tablă de șah cu n^2 pătrate se așază cel mai mare număr posibil de nebuni în așa fel ca să nu existe doi nebuni care să se amenințe, atunci toți nebunii în mod obligatoriu sînt situați pe pătratele marginale ale tablei.

b)** Să se determine numărul configurațiilor diferite pe o tablă de șah cu n^2 pătrate formate cu numărul maxim posibil de nebuni, care nu se amenință.

36*. a) Să se determine numărul configurațiilor diferite formate cu nebuni pe o tablă de șah cu 64 pătrate, astfel încît acești nebuni să țină sub amenințare toate pătratele tablei, iar numărul lor să fie cît mai mic posibil.

b) Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu 100 pătrate.

c) Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu 81 pătrate.

d) Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu n^2 pătrate.

37. a) Care este numărul maxim de regi care pot fi așezați pe o tablă de șah cu 64 pătrate, astfel încît să nu se amenințe doi cîte doi?

b) Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu n^2 pătrate.

38. a) Care este cel mai mic număr de regi care pot fi așezați pe o tablă de șah cu 64 pătrate, astfel încît să țină sub amenințare toate pătratele tablei neocupate de figuri?

b) Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu n^2 pătrate.

39. a) Care este cel mai mare număr de regine care pot fi așezate pe o tablă de șah cu 64 pătrate, astfel încît să nu se amenințe?

b)*** Aceeași problemă pentru o tablă de șah cu n^2 pătrate.

40. a) Care este numărul maxim de cai care pot fi așezați pe o tablă de șah cu 64 pătrate, astfel încît să nu se amenințe?

b)** Să se determine numărul configurațiilor diferite formate cu numărul maxim posibil de cai astfel ca să nu se amenințe.

Alte probleme de analiză combinatorie, legate de poziția figurilor pe tabla de șah, pot fi găsite în [8], [29] ș.a.

4. PROBLEME DE ANALIZĂ COMBINATORIE ÎN GEOMETRIE

41. a) Două vîrfuri ale unui triunghi sînt unite prin drepte cu cîte n puncte situate pe latura opusă fiecăruia. În cîte părți este împărțit triunghiul prin aceste drepte?

b) Cele trei vîrfuri ale unui triunghi sînt unite prin drepte cu cîte n puncte situate pe laturile opuse fiecăruia. În cîte părți este împărțit triunghiul de aceste drepte, dacă nici un grup de trei dintre ele nu sînt concurente?

42*. Care este numărul maxim de părţi în care poate fi împărţit planul prin:

a) n drepte? b) n cercuri?

43**. Care este numărul maxim de părţi în care poate fi împărţit spaţiu prin:

a) n plane? b) n sfere?

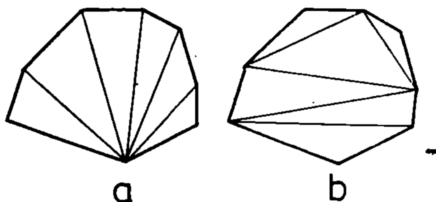


Fig. 2

44*. În cîte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă nici un grup de trei dintre ele nu sînt concurente?

45*. În cîte părţi este împărţit un poligon convex cu n laturi prin diagonalele sale, dacă nici un grup de trei dintre ele nu sînt concurente?

46. a) Cîte dreptunghiuri diferite ca mărime sau ca poziţie, formate dintr-un număr întreg de pătrate, pot fi trasate pe o tablă de şah cu 64 pătrate?

b) Aceeaşi problemă pentru o tablă de şah cu n^2 pătrate.

47. a) Cîte pătrate diferite ca mărime sau ca poziţie, formate dintr-un număr întreg de pătrate, pot fi trasate pe o tablă de şah cu 64 pătrate?

b) Aceeaşi problemă pentru o tablă de şah cu n^2 pătrate.

*48**. Nici un grup de trei dintre diagonalele unui poligon convex cu n laturi nu sînt concurente. Cîte triunghiuri diferite ca mărime sau ca poziţie pot fi trasate astfel ca toate laturile lor să fie situate pe laturile sau pe diagonalele acestui poligon?

*49***. P r o b l e m a l u i C a y l e y [1]. Cîte poligoane convexe cu k laturi există, astfel încît vîrfurile lor să coincidă cu vîrfurile unui poligon convex cu n laturi dat, iar toate laturile lor să fie diagonale ale acestuia?

50. Un poligon convex cu n laturi poate fi împărţit în triunghiuri în mai multe moduri diferite cu ajutorul diagonalelor care nu se intersectează în interiorul poligonului (v. fig. 2, unde sînt indicate două moduri posibile de împărţire a octogonului).

a) Să se demonstreze că numărul triunghiurilor obţinute printr-o astfel de împărţire nu depinde de modul de împărţire şi să se determine acest număr.

b) Să se demonstreze că numărul diagonalelor care fac parte dintr-o astfel de diviziune nu depinde de modul de împărţire şi să se determine acest număr.

51*. a) În cîte moduri diferite poate fi împărţit octogonul convex în triunghiuri, prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul octogonului?

b)*** P r o b l e m a l u i E u l e r. În cîte moduri poate fi împărţit poligonul convex cu n laturi în triunghiuri, prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul poligonului?

---

[1]) A r t h u r C a y l e y (1821—1895) — cunoscut matematician englez.

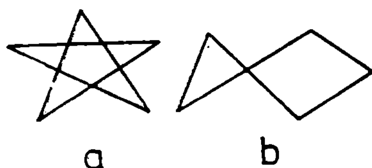


Fig. 3

52*. a) Pe un cerc sînt însemnate 20 puncte. În cîte moduri diferite pot fi unite aceste puncte două cîte două, prin zece coarde care nu se intersectează în interiorul cercului?

b)*** Pe un cerc sînt însemnate $2n$ puncte. În cîte moduri diferite pot fi unite aceste puncte două cîte două, prin n coarde care nu se intersectează în interiorul cercului?

Problemele 51, b) şi 52, b) vor fi repetate mai departe în alte ordine de idei [v. problema 82, a)]. Acolo vor fi date cîteva probleme înrudite (problemele 82, b) şi c); rezultate mai generale v. în observaţia de la sfîrşitul soluţiei problemei 82, c).

---

53. a) Un cerc este împărţit în p sectoare egale, unde p este un număr prim. În cîte moduri diferite pot fi vopsite aceste p sectoare în n culori, dacă este permisă vopsirea mai multor sectoare (sau chiar a tuturor) cu o aceeaşi culoare şi dacă două astfel de moduri de vopsire se consideră diferite doar atunci cînd nu se pot suprapune prin rotirea cercului?

b) Să se utilizeze rezultatul problemei a) pentru demonstrarea următoarei teoreme a lui Fermat[1]: dacă p este un număr prim, atunci $n^p - n$, pentru orice n, se divide cu p.

Alte demonstraţii ale teoremei lui Fermat vezi, de exemplu, în [53], [56], [17].

54*. a) Un cerc este împărţit în p părţi efale prin punctele $A_1, A_2, \ldots A_p$, p fiind un număr prim impar. Cîte poligoane stelate diferite cu p laturi au vîrfurile în aceste puncte, dacă se consideră ca fiind diferite doar acele poligoane care nu pot fi suprapuse prin rotaţia cercului? (Se numeşte poligon stelat poligonul ale cărui laturi nevecine se intersectează; v. de exemplu, poligoanele reprezentate în fig. 3.)

b) Să se utilizeze rezultatul problemei a) pentru demonstrarea următoarei teoreme a lui Wilson[2]: dacă p este un număr prim, atunci $(p-1)!+1$ se divide cu p.

5. PROBLEME REFERITOARE LA COEFICIENŢII BINOMIALI

Problemele următoare vor fi consacrate unor proprietăţi ale numerelor

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \qquad (*)$$

În cursul de algebră se demonstrează că aceste numere sînt coeficienţii dezvoltării

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

---

[1] Pierre Fermat (1601—1665) — mare matematician francez, unul din creatorii geometriei analitice; s-a ocupat mult de teoria numerelor.

[2] John Wilson (1741—1793) — matematician englez.

(teorema binomului lui Newton). În legătură cu aceasta, numerele C_n^k se numesc coeficienți binomiali. Folosind teorema binomului lui Newton, se pot demonstra o serie de relații între coeficienții C_n^k; demonstrarea directă a acestor relații cu ajutorul formulei (*) deseori se dovedește a fi mult mai complicată decît demonstrarea lor cu ajutorul binomului lui Newton.

55. Să se aplice teorema binomului lui Newton la determinarea valorii următoarelor sume:

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n,$

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots$
$\ldots + (-1)^n C_n^n,$

c) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \ldots +$
$+ \frac{1}{n+1} C_n^n,$

d) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n,$

e) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots$
$\ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n,$

f) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m,$

g) $C_n^k + C_{n+1}^k + C_{n+2}^k + \ldots + C_{n+m}^k,$

h) $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n,$

i) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \ldots + 2^n C_n^n,$

j) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2,$

k) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots$
$\ldots + (-1)^n (C_n^n)^2,$

l) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots$
$\ldots + C_n^k C_m^0.$

Unele dintre sumele cuprinse în această problemă vor mai fi întîlnite cu alte prilejuri, uneori sub o formă mult mai generală. Astfel, suma de la l) va fi calculată altfel în soluțiile problemelor 58, a), 59, c) și 70, b). Rezultatul de la e) va fi generalizat în soluția problemei 79, c). Suma de la i) va fi determinată astfel în soluția problemei 71, b).

56. Să se aplice teorema binomului lui Newton la determinarea valorilor următoarelor sume (punctele de la sfîrșitul acestor sume înseamnă că suma se prelungește atîta timp cît termenii ei nu-și pierd sensul, adică atîta timp cît indicele superior nu devine mai mare decît cel inferior):

a) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots,$

b) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \ldots,$

c) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots,$

d) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots,$

e) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \ldots,$

f) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \ldots,$

g)* $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots,$

h)* $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots,$

i)* $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \ldots$

---

57. Teorema binomului factorial. Se va introduce notația

$$a(a-h)(a-2h)\ldots[a-(n-1)h] = a^{n|h},$$

astfel, în particular, $a^{n|0} = a^n$, $a^{1|h} = a$. Să se demonstreze că are loc egalitatea

$$(a+b)^{n|h} = a^{n|h} + C_n^1 a^{n-1|h} b + C_n^2 a^{n-2|h} b^{2|h} + \ldots + b^{n|h}.$$

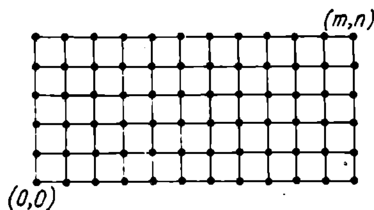


Fig. 4

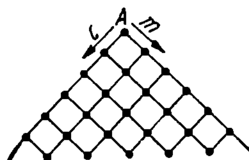


Fig. 5

Teorema exprimată de această ultimă egalitate se numeşte **teorema binomului factorial**. Este clar că ea conţine drept caz particular (pentru $h = 0$) teorema obişnuită a binomului lui Newton.

58. Să se utilizeze teorema binomului factorial la calculul valorilor următoarelor sume:

a) $C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + C_n^2C_m^{k-2} + \ldots + C_n^kC_m^0$;

b) $C_m^0C_n^k - C_{m+1}^1C_n^{k-1} + C_{m+2}^2C_n^{k-2} - \ldots + (-1)^k C_{m+k}^kC_n^0$.

Uneori pentru stabilirea relaţiilor dintre coeficienţii binomiali este util să se ţină seama de faptul că C_n^k este egal cu numărul combinărilor de n elemente luate cîte k. Pentru a ilustra aceste procedee, este comod să fie folosită următoarea schemă geometrică. Presupunînd că ne aflăm într-un oraş ale cărui străzi sînt dispuse după două direcţii perpendiculare (v. fig. 4, unde toate străzile oraşului considerat sînt reprezentate prin drepte orizontale şi verticale), se vor numerota străzile paralele cu 0, 1, 2, 3 etc., iar intersecţiile prin două „coordonate" (m, n), unde m este numărul străzii „verticale", care trece prin această intersecţie, iar n este numărul străzii „orizontale" (în fig. 4 intersecţiile sînt însemnate prin puncte). Se presupune acum că trebuie să trecem de la casa care se află în intersecţia (0, 0) la aceea de la intersecţia (m, n). În acest caz, vor exista C_{m+n}^n drumuri care sînt cele mai scurte, de lungime egală şi legînd cele două case. Într-adevăr, fiecare dintre aceste cele mai scurte drumuri conţine $m + n$ cartiere[1] şi dintre acestea n cartiere sînt „verticale". Aceste n cartiere „verticale" pot fi distribuite printre cele $m + n$ cartiere în C_{m+n}^n moduri. Împărţind mai departe mulţimea celor mai scurte drumuri într-o serie de clase după anumite criterii, se pot, cu ajutorul acestei scheme, obţine unele relaţii interesante între coeficienţii binomiali.

59. a) Să se utilizeze schema geometrică descrisă pentru demonstrarea relaţiei

$$C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} + \ldots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m.$$

b) Să se demonstreze următoarea generalizare a relaţiei precedente:

$$C_n^mC_k^0 + C_{n-1}^{m-1}C_{k+1}^1 + C_{n-2}^{m-2}C_{k+2}^2 + \ldots + C_{n-m}^0C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m.$$

c) Să se calculeze suma

$$C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + C_n^2C_m^{k-2} + \ldots + C_n^kC_m^0.$$

60. a) Fie o reţea de drumuri (fig. 5). Din punctul A pleacă 2^{1000} persoane. Jumătate din ele merg în direcţia l, iar cealaltă jumătate în direcţia m.

[1] S-a adoptat termenul „cartier" pentru cuvîntul rus „квартал" care în sensul de aici înseamnă porţiunea dintr-o stradă, cuprinsă între două străzi consecutive care o intersectează (N. R.).

Ajungînd la prima intersecţie, fiecare grup se împarte: jumătate pleacă în direcţia l, iar cealaltă jumătate în direcţia m. O astfel de împărţire se produce la fiecare intersecţie. Cîte persoane vor ajunge la cele trei intersecţii periferice de la stînga B_1, B_2 şi B_3 aflate în rîndul de intersecţii de rangul o mie?

b) Să se rezolve această problemă pentru toate intersecţiile din rîndul de rang o mie.

Se consideră următorul triunghi de numere:

				1				
			1	1	1			
		1	2	3	2	1		
	1	3	6	7	6	3	1	
1	4	10	16	19	16	10	4	1
..	..	..	..	..	..	..	..	..

În rîndul de sus (de rang zero) al triunghiului stă un unu, iar numerele din celelalte rînduri sînt scrise după următoarea regulă: fiecare număr este suma a trei numere din rîndul precedent, care sînt cele mai apropiate de el (adică este suma dintre numărul situat imediat deasupra lui şi cele două numere vecine cu acesta); în cazul în care unele dintre aceste trei numere lipsesc (cum se întîmplă pentru cele două numere periferice de ambele părţi ale fiecărui rînd), termenii corespunzători se consideră egali cu zero. În rîndul de rang n al acestui triunghi se vor afla $2n + 1$ numere, se vor nota aceste numere cu $B_n^0, B_n^1, B_n^2, \ldots, B_n^{2n}$.

*61**. Să se demonstreze că

a) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \ldots + B_n^{2n} = 3^n$;

b) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \ldots + B_n^{2n} = 1$;

c) $(B_n^0)^2 + (B_n^1)^2 + (B_n^2)^2 + \ldots + (B_n^{2n})^2 = B_{2n}^{2n}$.

Orice cititor după ce a rezolvat problema 61 va putea să formeze alte relaţii între numerele B_n^k.

6. PROBLEME DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR

O clasă foarte importantă de probleme de analiză combinatorie o constituie problemele de teoria probabilităţilor. Acum se va trece la acest gen de probleme; mai întîi, însă, vor fi expuse cîteva noţiuni teoretice necesare pentru înţelegerea celor ce urmează.

În practică se găsesc deseori experimente (altfel spus, probe, observaţii, încercări, procese), care pot să dea rezultate diferite după împrejurări pe care nu le cunoaştem sau nu ştim să le apreciem influenţa. Astfel, la aruncarea cu zarul (un cub ale cărui feţe sînt numerotate cu cifrele de la 1 la 6) nu putem şti dinainte care dintre feţe va ieşi deasupra, deoarece aceasta depinde de foarte multe împrejurări necunoscute nouă (abilitatea cu care se mişcă mîna

la aruncarea zarului, poziția zarului în momentul aruncării, particularitățile suprafeței pe care cade zarul etc.). De asemenea, nu se poate prevedea care dintre obligațiile unui împrumut vor ieși cîștigătoare (numerele obligațiilor cîștigătoare se obțin extrăgînd cîteva bilete dintr-o urnă care conține, bine amestecate, biletele cu numerele tuturor obligațiilor). La măsurarea oricărei mărimi fizice, obținem totdeauna rezultatul cu o anumită eroare care depinde atît de persoana care face măsurarea cît și de particularitățile instrumentului cu care se măsoară; la producția în masă articolele produse diferă totdeauna între ele într-o oarecare măsură (de exemplu, în producția becurilor electrice, durata de ardere a becului este diferită pentru becuri diferite); la tragerea la țintă, glontele nu va nimeri totdeauna exact în mijlocul țintei; în toate aceste cazuri, de asemenea, nu putem prevedea dinainte rezultatul experimentului (adică nu putem spune dinainte care va fi eroarea în măsurarea dată; cît de repede va arde becul electric dat; cu cît va devia glontele de la centrul țintei). Se poate da, desigur, un număr oricît de mare de astfel de exemple.

Utilizarea matematicii la studiul fenomenelor de o asemenea natură se bazează pe faptul că, în multe cazuri, probabilitatea apariției unuia sau altuia dintre rezultatele experimentului poate fi evaluată cantitativ, adică poate fi exprimată printr-un număr p. Existența unei probabilități determinate p pentru rezultatul experimentului se dovedește prin aceea că la repetarea de un mare număr de ori a experimentului în aceleași condiții, frecvența apariției rezultatului considerat (adică raportul dintre numărul de încercări în care se constată acest rezultat și numărul total al încercărilor efectuate) rămîne aproape tot timpul aproximativ aceeași, apropiată de o valoare constantă p. Astfel, se știe că frecvența nimeririi centrului țintei este aproape totdeauna aproximativ aceeași pentru un trăgător dat și în condiții de tragere date, abătîndu-se doar rareori ceva mai mult de o anumită valoare medie (această valoare medie poate, bineînțeles, să varieze în timp — în astfel de cazuri se spune că trăgătorul se perfecționează sau, dimpotrivă, pierde din îndemînare). De asemenea, frecvența apariției feței șase la aruncarea cu zarul sau procentul de obiecte rebutate în condiții de producție date se modifică, de obicei, puțin la o repetare în masă a „experimentelor" corespunzătoare (aruncarea zarului, fabricarea obiectelor date). Plecînd de la aceste fapte se conchide că măsura posibilității de a nimeri în centrul țintei, de a cădea șase la aruncarea cu zarul, de a apărea un obiect rebutat într-o serie de obiecte fabricate etc. poate fi exprimată printr-un număr. Acest număr se numește probabilitatea evenimentului considerat; în vecinătatea lui se va afla frecvența medie a rezultatului obținut într-un lung șir de „experimente". În mod analog se definește probabilitatea și într-o altă serie de probleme, referitoare la cele mai diferite domenii: tehnică, mecanică, fizică.

Din însăși definiția probabilității rezultă că aceasta este un număr pozitiv, care nu este mai mare decît unu. Probabilitatea evenimentelor certe se consideră egală cu unu; astfel, se poate spune „cu probabilitate egală cu unu" că ziua care vine după sîmbătă va fi duminică. Probabilitatea evenimentelor care nu se pot produce se consideră egală cu zero; astfel probabilitatea ca ziua care urmează după sîmbătă să fie luni este egală cu zero.

Studiul problemelor în care se consideră probabilităţile a diferite evenimente face obiectul unei discipline matematice independente — t e o r i a p r o b a b i l i t ă ţ i l o r. Din păcate, nu este posibil să dăm aici o prezentare (nici măcar în liniile cele mai generale) a obiectului acestei ştiinţe; aceasta ar necesita o creştere considerabilă a volumului cărţii şi, pe de altă parte, majoritatea problemelor din teoria probabilităţilor cer pentru rezolvare utilizarea unor metode care ies din cadrul matematicii elementare. Aici ne vom opri numai asupra celei mai simple probleme legate de probabilităţi, anume asupra problemei calculării probabilităţii unuia sau altuia dintre rezultatele experimentului.

S-a arătat mai înainte că probabilitatea poate fi evaluată aproximativ cu ajutorul rezultatelor obţinute într-o serie lungă de experimente. Bineînţeles, însă, că existenţa probabilităţii este independentă de efectuarea experimentelor. De aceea ne putem întreba dacă probabilităţile nu pot fi calculate şi fără a se efectua vreun experiment. Se constată că într-o serie de cazuri acest lucru se poate face, plecînd direct de la natura experimentului considerat. Deseori, probabilitatea poate fi calculată direct, dacă obiectul experimentului prezintă o anumită simetrie; în aceste cazuri, calculul probabilităţii se bazează de obicei pe consideraţii de analiză combinatorie, deseori destul de complexe şi foarte frumoase. În cele ce urmează vor fi examinate numai astfel de exemple. Se mai observă că, în aplicaţiile practice ale teoriei probabilităţilor, raţionamentele de analiză combinatorie se asociază deseori cu unele raţionamente de natură neelementară; faptul că multe dintre exemplele ce urmează au un caracter artificial, de multe ori, chiar un caracter „distractiv", se explică prin aceea că ne-am străduit să dăm aici din problemă numai partea de analiză combinatorie pură.

A. *Cazul experimentului cu un număr finit de rezultate posibile*

Să examinăm, ca un prim exemplu, cel mai simplu experiment care poate să ne dea un rezultat sau altul depinzînd de întîmplare şi anume aruncarea cu zarul. Acest experiment poate avea şase rezultate diferite: deasupra poate ieşi oricare dintre cele şase feţe ale zarului. Dată fiind simetria zarului, este firesc să ne aşteptăm ca, într-o serie lungă de aruncări cu zarul, fiecare faţă să iasă deasupra de aproximativ tot atîtea ori cît oricare alta, adică fiecare faţă să cadă deasupra aproximativ în a şasea parte din numărul total de aruncări. Într-adevăr, experimentul confirmă această presupunere (dacă, bineînţeles zarul este „corect", adică are exact forma unui cub şi este făcut dintr-un material omogen). Astfel, pentru fiecare faţă a unui zar „corect", probabilitatea ca să cadă deasupra este egală cu 1/6.

În mod analog, la aruncarea monedei, căderea „stemei" sau a „banului", se produce aproximativ tot atît de des; această împrejurare, de asemenea, putea fi prevăzută, ţinînd seama de simetria monedei. În cazul extragerii la întîmplare a unei bile dintr-o urnă conţinînd 100 bile identice, bine amestecate, dacă operaţia va fi repetată de un număr mare de ori, fiecare bilă va fi extrasă aproximativ tot atît de des ca şi oricare alta (adică aproximativ în a suta

parte din totalul extracțiilor), — aici poate servi ca explicație „simetria" celor 100 rezultate diferite ale experimentului.

Așadar, vedem că într-o serie de cazuri, datorită unei anumite simetrii care există în condițiile experimentului se poate susține că toate rezultatele posibile ale experimentului se vor repeta aproximativ tot atît de des, adică toate aceste rezultate sînt e g a l p o s i b i l e. Dacă numărul total al unor astfel de rezultate egal posibile este egal cu n, probabilitatea fiecărui rezultat în parte va fi exprimată prin numărul $1/n$; se poate ajunge la această concluzie fără a efectua un șir lung de experiențe.

Să examinăm acum o problemă ceva mai complicată.

Să admitem că se dă o urnă în care se află $n + m$ bile amestecate, care se deosebesc numai prin culoare: n albe și m negre. Din urmă se extrage la la întîmplare o bilă: care este probabilitatea ca această bilă să fie albă?

Cele $n + m$ rezultate diferite ale experimentului vor fi de asemenea, egal posibile și fiecare dintre ele va avea probablitatea $1/(n + m)$. Însă evenimentul care ne interesează — apariția unei bile albe — va avea loc numai pentru n rezultate din aceste $n + m$ rezultate egal posibile. Este deci clar că, într-o îndelungată repetare a experimentului, acest eveniment se va produce aproximativ de $n/(n + m)$ ori din numărul total al extracțiilor: de fapt, extracția fiecărei bile albe în parte se va produce aproximativ de $1/(n + m)$ ori din numărul total al extragerilor. Așadar, putem caracteriza probabilitatea extragerii unei bile albe în experiment considerată prin numărul $n/(n + m)$.

În cele ce urmează, se dau o serie de probleme care se referă la cazuri cu totul analoage acestui ultim exemplu. Anume, în toate aceste cazuri ne vom ocupa de experimente care pot conduce la un număr finit de rezultate egal posibile. După ce a fost stabilită această împărțire a rezultatelor posibile în rezultate egal posibile, *probabilitatea oricărui eveniment, definit ca rezultat al experimentului, va fi egală cu raportul dintre numărul rezultatelor, în care acest eveniment se poate realiza, și numărul total al rezultatelor egal posibile.* Cu alte cuvinte, aceasta se poate formula astfel: *probabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul rezultatelor egal posibile favorabile evenimentului considerat și numărul total al rezultatelor egal posibile.*

Pentru înțelegerea enunțurilor și pentru rezolvarea problemelor ce urmează (62—83) nu sînt necesare alte cunoștințe din teoria probabilităților în afară de aceea a definiției probabilității scrise în cursive. Observăm, însă, că determinarea numărului total al evenimentelor egal posibile, care figurează în această definiție, nu este totdeauna la fel de simplă ca în cazul pe care l-am examinat — al extragerii unei bile dintr-o urnă: adeseori determinarea acestui număr poate prezenta dificultăți însemnate. Se va da aici încă un exemplu, cît se poate de simplu, dar instructiv.

E x e m p l u. Care este probabilitatea ca în două aruncări ale monedei să iasă de două ori stema?

Rezolvare. În acest caz, experimentul constă în a arunca moneda de două ori și a nota de fiecare dată ce față a monedei a căzut deasupra. Acest experiment poate să conducă la următoarele trei rezultate: sau în ambele cazuri va ieși deasupra stema sau va ieși de două ori banul sau va ieși o dată stema

şi o dată banul. Evident, numărul rezultatelor favorabile este aici egal cu 1; am putea deci să credem că probabilitatea căutată este egală cu 1/3. Se constată însă că această concluzie este falsă: se poate verifica că într-un şir lung de cîte două aruncări ale monedei frecvenţa de apariţie a stemei în ambele aruncări este apropiată de 1/4 şi nu de 1/3. Greşeala provine din faptul că cele trei rezultate stabilite nu au fost egal posibile: numai primele două au fost egal posibile: însă nu avem nici un motiv să afirmăm că al treilea rezultat este egal posibil cu primele două (al treilea rezultat corespunde căderii a două feţe diferite ale monedei în prima şi în a doua aruncare, iar primele două căderi — unei aceleiaşi feţe). Într-adevăr, experienţa arată că al treilea dintre aceste rezultate apare de două ori mai des decît primele două.

Raţionamentul corect în acest caz va fi următorul. În prima aruncare a monedei poate ieşi deasupra sau stema sau banul; ambele rezultate sînt, evident, egal posibile, deoarece moneda este simetrică. La a doua aruncare, de asemenea, poate ieşi deasupra sau stema sau banul. Combinînd cele două rezultate posibile ale primei aruncări cu cele două rezultate posibile ale celei de-a doua aruncări, vom obţine în total patru rezultate diferite şi anume: stemă-stemă, stemă-ban, ban-stemă, ban-ban. Aceste patru rezultate sînt egal posibile: fiecare dintre ele corespunde unui anumit rezultat al primei aruncări şi unui anumit rezultat al celei de-a doua aruncări, fără a interesa anume despre care rezultat al unei aruncări sau alteia este vorba, deoarece apariţia fiecărei feţe a monedei este egal posibilă. Rezultă deci că probabilitatea căutată este egală cu 1/4; mai înainte am obţinut un rezultat incorect, deoarece nu am făcut deosebire în ce priveşte ordinea în care au ieşit stema şi banul şi am considerat două rezultate egal posibile (stemă-ban şi ban-stemă) ca unul şi acelaşi, ceea ce a denaturat proprietatea de egală posibilitate a rezultatelor.

Astfel, probabilitatea ca la două aruncări să iasă de fiecare dată stema este egală cu pătratul probabilităţii de a obţine stema într-o singură aruncare $\left(\text{căci } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$. Acest rezultat este un caz particular al unei reguli generale denumite teorema probabilităţilor compuse. Iată în ce constă această teoremă. Să presupunem că se dau două evenimente A şi B, fiecare în parte fiind definit ca rezultatul unui experiment. Să presupunem că evenimentele A şi B sînt independente, adică rezultatul fiecăruia dintre încercări nu apare în nici un fel în condiţiile celei de-a doua (indiferent, desigur, dacă experimentele sînt efectuate simultan sau succesiv). Se cere probabilitatea de a se produce amîndouă evenimentele A şi B.

Pentru a răspunde la această întrebare vom presupune că primul experiment poate avea, n_1 rezultate egale posibile, dintre care m_1 favorabile evenimentului A; al doilea experiment poate avea n_2 rezultate egal posibile, dintre care m_2 favorabile evenimentului B. În acest caz, probabilitatea evenimentului A este egală cu m_1/n_1, iar probabilitatea evenimentului B este egală cu m_2/n_2. Se va examina acum experimentul complex care constă în producerea ambelor evenimente. Evident acest experiment complex va avea n_1n_2 rezultate egal posibile care se obţin prin asocierea celor n_1 rezultate ale primului experiment cu cele n_2 rezultate ale celui de -a doilea experiment. Din aceste $n_1 \cdot n_2$ rezultate egal posibile, pentru evenimentul care constă în producerea evenimentelor A şi B, vor fi favorabile $m_1 \cdot m_2$ rezultate (aceste $m_1 \cdot m_2$ rezultate se obţin asociind cele m_1 rezultate favorabile lui A cu cele m_2 rezultate favorabile lui B). Deci probabilitatea producerii ambelor evenimente A şi B este egală cu $\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$, adică este egală cu

produsul probabilităţilor evenimentelor A şi B $\left(\text{căci } \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}\right)$. Cu alte cuvinte, *probabilitatea de a se produce două evenimente independente este egală cu produsul probabilităţilor acestor două evenimente*; aceasta este teorema probabilităţilor compuse.

Teorema probabilităţilor compuse poate fi generalizată; în particular, ea poate fi extinsă la cazul a mai mult de două evenimente şi la cazul în care evenimentele nu sînt independente (v., de exemplu, rezolvarea problemei 63). Aici, însă, nu ne vom ocupa de stabilirea regulilor generale, ci vom trece direct la exemple concrete din teoria probabilităţilor. Se poate ca cititorul, după ce va cunoaşte aceste exemple, să formuleze singur unele reguli.

62. Într-un oraş se află 10 000 biciclete purtînd toate numerele posibile de la 1 la 10 000. Care este probabilitatea ca numărul primei biciclete întîlnite să nu conţină cifra 8?

63. a) Se formează cuvîntul „renova" din litere tăiate din alfabet. După aceea, fişele cu literele acestui cuvînt se amestecă bine şi apoi se extrag la întîmplare patru dintre ele şi se aşază una după alta în ordinea extragerii. Cu ce probabilitate se va obţine cuvîntul „nora"?

b) Se face o operaţie asemănătoare cu literele care au format la început cuvîntul „mamaia". Cu ce probabilitate se va obţine în acest fel cuvîntul „mama"?

64.* Într-o urnă se află bilete cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9. Se extrag la întîmplare cinci bilete şi se aşază unul după altul în ordinea extragerii. Care este probabilitatea ca numărul format să fie divizibil cu 396?

65. Presupunem că aţi uitat una dintre cifrele unui număr de telefon de care aveţi nevoie şi o formaţi la întîmplare. Care este probabilitatea să nu faceţi mai mult de două apeluri?

66. Probabilitatea ca ziua de naştere a unei persoane să cadă într-o anumită lună a anului poate fi considerată aproximativ aceeaşi pentru oricare dintre cele 12 luni. Care este probabilitatea ca:

a) Într-o grupă de 12 persoane, toate cele 12 zile de naştere să cadă în luni diferite?

b) Într-o grupă de 6 persoane, toate cele 6 zile de naştere să cadă în două luni anumite?

67. În trei vagoane ale unui tramvai s-au suit nouă călători. Fiecare călător se urcă în vagon la întîmplare. Care este probabilitatea ca:

a) în primul vagon să se afle trei persoane?

b) în fiecare vagon să se afle cîte trei persoane?

c) în unul dintre vagoane să se afle patru, în altul trei şi în al treilea două persoane?

68. La campionatele de fotbal din U.R.S.S., după jocurile de selecţionare, echipele se împart prin tragere la sorţi în două grupe cu un număr egal de echipe. În fiecare grupă se selecţionează echipa cîştigătoare şi cele două echipe se întîlnesc în finală. Să presupunem că numărul total de echipe care au mai rămas după jocurile de selecţionare este egal cu 20.

a) Care este probabilitatea ca două dintre echipele cele mai tari să facă parte din grupe diferite?

b) Care este probabilitatea ca patru din cele mai tari echipe să facă parte din aceeaşi grupă? Ca timp de doi ani consecutiv patru dintre cele mai tari echipe să facă parte din aceeaşi grupă?

c) Care este probabilitatea ca patru dintre cele mai tari echipe să facă parte două cîte două din grupe diferite?

69. Faţă de un adversar la fel de tare, ce este mai probabil să se cîştige: trei partide din patru sau cinci partide din opt?

70. a) Dintr-o urnă în care se află n bile albe şi m negre se extrag la întîmplare k bile. Care este probabilitatea ca printre bilele extrase să se obţină r bile albe?

b) Utilizînd rezultatul de la a), să se determine valoarea sumei

$$C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + C_n^2C_m^{k-2} + \dots + C_n^kC_m^0.$$

Observaţie. Alte procedee pentru determinarea acestei sume v. în rezolvările problemelor 55, l), 58, a), 59, c).

*71**. a) Problema lui Banach[1]. O persoană a cumpărat două cutii de chibrituri şi le-a pus în buzunar. Apoi, ori de cîte ori a avut nevoie să aprindă un chibrit a folosit la întîmplare o cutie sau alta. După cîtva timp, scoţînd una dintre cutii, a constatat că este goală. Care este probabilitatea ca în acest moment cea de-a doua cutie să mai conţină k chibrituri, dacă numărul chibriturilor într-o cutie neîncepută este egal cu n?

b) Utilizînd rezultatul de la a) să se determine cu cît este egală suma

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^nC_n^n.$$

Observaţie. Un alt procedeu pentru determinarea acestei sume v. în rezolvarea problemei 55, i).

*72**. Doi vînători A şi B au plecat la vînătoare de raţe. Se presupune că fiecare dintre ei, ochind o raţă, o poate nimeri cu aceleaşi şanse cu care o poate rata. În timpul vînătorii, vînătorul A a tras în 50 raţe, iar B în 51 raţe. Care este probabilitatea ca vînătorul B să fi împuşcat mai multe raţe decît vînătorul A?

73. a) Doi vînători au văzut în acelaşi timp o vulpe şi au tras simultan în ea. Se presupune că, la distanţa respectivă, fiecare dintre ei nimereşte de obicei în vulpe şi o ucide o dată la trei trageri. Care este probabilitatea ca vulpea să fie ucisă?

b) Să se rezolve aceeaşi problemă pentru trei vînători, considerînd că precizia acestor vînători este aceeaşi ca şi în problema a).

c) Să se rezolve aceeaşi problemă în cazul a n vînători.

74. Un vînător trage primul foc într-o vulpe care fuge la o distanţă de 100 m de el; se admite că în ceea ce priveşte probabilitatea de a nimeri la această distanţă este 1/2 (adică la distanţa de 100 m vînătorul are tot atîtea

---

[1] Ştefan Banach (1892—1945) — cunoscut matematician polonez.

şanse de a nimeri o vulpe care fuge, cît are de a o rata). Dacă ratează, vînătorul reîncarcă arma şi trage din nou, dar în acest timp vulpea reuşeşte să se mai îndepărteze cu 50 m. Dacă ratează iarăşi, vînătorul reîncarcă arma şi trage a treia (şi ultima) oară; în acest timp, vulpea se mai îndepărtează cu 50 m. Presupunînd că probabilitatea de a nimeri este invers proporţională cu pătratul distanţei, să se calculeze probabilitatea ca vînătorul să nimerească vulpea.

*75****. Problema celor patru mincinoşi. Se ştie despre patru persoane A, B, C şi D că fiecare spune adevărul doar o dată din trei cazuri. Dacă A declară că B neagă că C susţine că D minte, care este probabilitatea ca D să fi spus totuşi adevărul?

Observaţie. În problemă se presupune fireşte că C ştie precis dacă D a spus adevărul sau a minţit şi că, dacă A sau B spun neadevărul, aceasta înseamnă că B, respectiv C, a afirmat tocmai contrariul celor ce îi atribuie A sau B.

Această problemă mai poate fi formulată şi în modul următor. Presupunem că D scrie pe hîrtie semnul „plus" sau „minus" şi îl arată de departe lui C; C transcrie semnul şi îl arată lui B; B transcrie semnul şi-l arată lui A; în sfîrşit A transcrie semnul arătat de B. Se ştie că D scrie semnul „plus" numai o dată din trei cazuri; mai departe, pentru C, B şi A probabilitatea de a nu greşi la transcriere este egală cu 1/3 (adică, ei transcriu exact doar o dată din trei cazuri). Admiţînd că semnul transcris de A este semnul „plus", care este probabilitatea ca şi D să fi scris semnul „plus"[1]?

Acest gen de probleme joacă un rol important în unele aplicaţii tehnice; ele sînt legate, de asemenea, de o importantă ramură actuală a teoriei probabilităţilor (aşa-numita teorie a lanţurilor Markov; v. observaţia la finele rezolvării problemei).

76. a) În unele sate ale Rusiei exista cîndva următoarea metodă de ghicire. O fată ţine în mînă şase fire de iarbă, astfel ca vîrfurile lor să rămînă libere; o prietenă leagă firele de iarbă două cîte două şi la capetele de sus şi la cele de jos. Dacă, după aceasta, toate cele şase fire de iarbă se găseau legate într-un inel, aceasta însemna că fata avea să se mărite în curs de un an. Se întreabă care este probabilitatea ca filrele de iarbă legate la întîmplare să formeze un inel?

b) Să se rezolve aceeaşi problemă în cazul a $2n$ fire de iarbă.

*77***. a) O urnă conţine $2n$ bile bine amestecate: n albe şi n negre. Dacă n persoane extrag din urnă, la întîmplare, cîte o pereche de bile, care este probabilitatea ca fiecare dintre ele să scoată bile de culori diferite (bilele extrase nu se reintroduc în urnă)?

b) În condiţiile problemei precedente, care este probabilitatea ca fiecare dintre cele n persoane să scoată bile de aceeaşi culoare?

*78*****. a) Cineva a scris n scrisori şi le-a închis în plicuri fără a scrie, mai înainte, adresele. După aceasta, nu mai ştie fiecare scrisoare în care plic

---

[1]) Problema 75 poate fi formulată şi astfel: „Dacă A declară că B susţine că C susţine că D a spus adevărul, care este probabilitatea ca aceasta să fie într-adevăr aşa?" Cu alte cuvinte, în condiţiile problemei se spune că A, încredinţîndu-se în B şi C, susţine că D a spus adevărul; în noua formulare, aceasta înseamnă că A a scris semnul „plus" ca rezultat al transcrierii succesive.

se află şi scrie la întîmplare pe plicuri cele n adrese. Care este probabilitatea ca cel puţin unul dintre destinatari să primească scrisoarea destinată lui?

b) Către ce limită tinde probabilitatea din problema a), cînd $n \to \infty$?

*79***. a) Un tren este format din n vagoane. Fiecare dintre k călători îşi alege vagonul la întîmplare. Care este probabilitatea ca în fiecare vagon să se afle cel puţin cîte un călător?

b) În condiţiile problemei a), care este probabilitatea ca să fie ocupate r vagoane ale trenului?

c) Utilizînd rezultatul problemei a), să se determine valoarea sumei

$$1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n,$$

unde k este un număr întreg pozitiv, nu mai mare decît n.

Observaţie. Problema 79, b) este echivalentă cu următoarea problemă care prezintă interes pentru fizică: un fascicol format din k particule este captat de un sistem de n contori (aparate fizice speciale pentru înregistrarea particulelor, dispuse unul lîngă altul). Fiecare particulă nimereşte cu aceeaşi probabilitate în oricare dintre contori. Cu ce probabilitate prezenţa particulelor va fi înregistrată de r contori? Soluţia acestei probleme, formulată aşa cum s-a arătat, a fost publicată în 1951 într-o importantă revistă de fizică.

Calculul sumei din problema 79, c) pentru cazul particular $k = 1$ face obiectul problemei 55, e).

*80***. 20 de litere a, b, c, d, e, f, g, h, i, j; A, B, C, D, E, F, G, H, I, J sînt scrise pe bilete diferite; aceste bilete se aşază pe un cerc într-o ordine întîmplătoare, însă astfel ca literele mari să alterneze de fiecare dată cu cele mici. Care este probabilitatea ca nici una dintre cele două litere identice (mare şi mică) să nu fie alături?

*81****. a) La o casă de bilete stau la rînd $n + m$ oameni; n dintre ei au monede de cîte cinci lei, iar ceilalţi m au numai monede de cîte zece lei. Biletul costă cinci lei. La începutul vînzării casa nu are bani. Care este probabilitatea ca nici unul din cumpărători să nu fie nevoit să aştepte restul?

b) Să se rezolve aceeaşi problemă dacă se presupune că la începutul vînzării casa avea p monede de cîte cinci lei.

c) La o casă de bilete stau la rînd $n + m$ oameni; n dintre ei au monede de cîte un leu, iar ceilalţi m au numai monede în valoarea de trei lei. Un bilet costă un leu. La începutul vînzării la casă nu este nici un ban. Care este probabilitatea ca nici unul din cumpărători să nu fie nevoit să aştepte restul?

Observaţie. Problemele 81, a) — c), indiferent de enunţurile lor artificiale, prezintă un mare interes în practică; la astfel de scheme se reduc şi unele probleme importante din fizică şi din teoria controlului statistic al producţiei.

*82****. a) Din rezultatele problemei 81, a) să se deducă o nouă rezolvare a problemelor 51, b) şi 52, b).

b) Pe un cerc sînt dispuse $3n$ puncte. În cîte moduri diferite pot fi împărţite aceste puncte în n grupuri de cîte trei, astfel ca laturile celor n triunghiuri înscrise, cu vîrfurile în cele n grupuri de trei puncte, să nu se intersecteze?

c) În cîte moduri poate fi împărțit un poligon[1] convex cu $2n$ laturi în patrulatere ducînd diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului?

B. *Cazul experimentului cu un număr infinit de rezultate posibile*

În problemele precedente a fost mereu folosită definiția probabilității unui eveniment ca raportul dintre numărul rezultatelor experimentului favorabile acestui eveniment și numărul total al rezultatelor egal posibile. Există însă cazuri în care numărul rezultatelor egal posibile ale experimentului nu este finit și nici numărul rezultatelor favorabile nu este finit, dar se poate da totuși definiției probabilității un sens determinat, care să permită calculul ei pe baza unor considerații de analiză combinatorie. Astfel, nu se poate vorbi despre n u m ă r u l numerelor întregi pozitive, deoarece există o infinitate de astfel de numere. Însă dacă ne întrebăm care este probabilitatea ca un număr luat la întîmplare să fie divizibil cu 5, această întrebare este corectă: probabil că oricare dintre cititori va răspunde că această probabilitate este egală cu 1/5, deși nu am dat pînă acum o definiție a probabilității utilă în acest caz.

Pentru a formula o astfel de definiție, se va examina o problemă mai generală. Se consideră un șir de numere

$$a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

și se pune problema determinării probabilității ca un număr luat la întîmplare din acest șir să aibă o proprietate dată. Este firesc să se dea noțiunii de probabilitate următorul sens. Se consideră, în primul rînd, primii N termeni din șirul dat:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N.$$

Se vor scrie aceste N numere pe N bilete, pe care le vom amesteca bine și apoi vom scoate la întîmplare unul din ele. Această experiență are N rezultate egal posibile; dacă se va nota cu $q(N)$ numărul acelora dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$ care au proprietatea considerată, probabilitatea ca pe biletul scos să fie scris un număr care are această proprietate va fi egală cu $q(N)/N$. *Să presupunem că pentru $N \to \infty$ raportul $q(N)/N$ tinde către o limită determinată; atunci această limită se numește probabilitatea ca numărul luat la întîmplare din întregul șir să aibă proprietatea cerută.*

În cazul în care șirul este format din toate numerele întregi pozitive, iar proprietatea considerată este divizibilitatea numărului cu 5, definiția dată aici conduce, bineînțeles, la răspunsul căutat 1/5. Într-adevăr, aici evident, $q(N) = \left[\frac{N}{5}\right]$, adică este egal cu partea întreagă a numărului $\frac{N}{5}$.

[1] Nu este greu de văzut că un poligon cu un număr impar de laturi nu poate fi împărțit în patrulatere în modul indicat în problemă.

Însă orice număr N poate fi reprezentat sub forma $N = 5q + r$, unde $q = \left[\frac{N}{5}\right]$, iar r este restul împărțirii lui N prin 5, egal cu 0, 1, 2, 3 sau 4. De aici rezultă că

$$\frac{\left[\frac{N}{5}\right]}{N} = \frac{q}{5q+r} = \frac{\left(q+\frac{r}{5}\right)-\frac{r}{5}}{5q+r} = \frac{1}{5} - \frac{r}{5(5q+r)} = \frac{1}{5} - \frac{r}{5N}$$

și, deoarece $0 \leqslant r \leqslant 4$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\left[\frac{N}{5}\right]}{N} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{5} - \frac{r}{5N}\right) = \frac{1}{5}.$$

În felul acesta, probabilitatea ca numărul luat la întîmplare din numărul primelor N numere întregi (unde N este mare, însă finit) să fie divizibil cu 5 este totdeauna apropiată de 1/5. De exemplu, probabilitatea ca numărul de pe o bancnotă de 10 lei luată la întîmplare să fie divizibil cu 5 poate fi considerată egală cu 1/5 (deoarece numărul total al bancnotelor de 10 lei este foarte mare); în acest caz, nici nu trebuie să cunoaștem numărul exact al bancnotelor de zece lei care există. Un sens analog îl vor avea și răspunsurile date la problemele 83—91. Enunțurile tuturor acestor probleme au un aspect artificial; există însă probleme mai complexe de același tip, a căror rezolvare prezintă importanță practică.

83. Care este probabilitatea ca un număr întreg pozitiv luat la întîmplare să fie prim cu 6? Ca cel puțin unul din două numere luate la întîmplare să fie prim cu 6?

84. a) Care este probabilitatea ca pătratul unui număr întreg luat la întîmplare să se termine cu cifra 1? Cubul unui număr luat la întîmplare să se termine cu 11?

b) Care este probabilitatea ca puterea a zecea a unui număr întreg luat la întîmplare să se termine cu cifra 6? Ca puterea a douăzecea a unui număr luat la întîmplare să se termine cu cifra 6?

85. Care este posibilitatea ca C_n^7, unde n este un număr întreg luat la întîmplare, mai mare decît șapte, să se dividă cu 7? Ca C_n^7 să se dividă cu 12?

86. Care este probabilitatea ca 2^n, unde n este un număr întreg pozitiv luat la întîmplare, să se termine cu cifra 2? Ca 2^n să se termine cu cifrele 12?

87.* Care este probabilitatea ca 2^n să aibă ca primă cifră 1?

*88***.* a) Să se demonstreze că 2^n poate să înceapă cu orice combinație de cifre.

b) Fie M un număr de k cifre. Care este probabilitatea ca primele k cifre ale numărului 2^n să formeze numărul M?

Observație. Problema 87 este, evident, un caz particular al problemei 88, b).

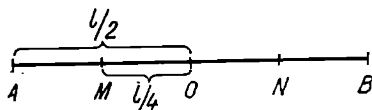


Fig. 6.

*89***. a) Să se calculeze cu o eroare de 0,1 probabilitatea ca două numere întregi, luate la întîmplare, să fie prime între ele.

b) Să se calculeze cu o eroare de 0,05 probabilitatea ca patru numere întregi, luate la întîmplare, să aibă un divizor comun.

*90****. a) Problema lui Cebîşev [1]. Să se arate că probabilitatea ca două numere întregi luate la întîmplare să fie prime între ele este egală cu $6/\pi^2$, unde $\pi \approx 3{,}14$ este raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său.

b) Să se demonstreze că probabilitatea ca patru numere întregi, luate la întîmplare, să aibă un divizor comun este egală cu $1 - 90/\pi^4$.

*91****. Care este probabilitatea ca un număr întreg n, luat la întîmplare, să aibă un divizor prim mai mare decît rădăcina sa pătrată?

C. *Cazul experimentului cu o mulţime continuă de rezultate posibile*

În încheierea acestei părţi se vor mai examina cîteva probleme de calculul probabilităţilor, referitoare la experimente ale căror rezultate pot fi reprezentate sub forma unor mulţimi de puncte ale unui segment sau ale ariei unei figuri sau ale unui corp din spaţiu. Se înţelege de la sine că nici în astfel de experimente nu se poate vorbi despre numărul rezultatelor egal posibile ale experimentului şi despre numărul rezultatelor favorabile ale evenimentului dat; totuşi, în multe probleme de acest fel, calculul probabilităţilor este deplin posibil şi nu prezintă dificultăţi. Modul de aplicare a unui astfel de calcul poate fi explicat cel mai simplu pe exemple concrete.

Exemplul 1. O bară de lungime l este frîntă într-un punct luat la întîmplare. Care este probabilitatea ca cea mai mică dintre bucăţile astfel obţinute din bară să aibă o lungime mai mare decît $l/4$?

Toate rezultatele experimentului considerat în acesată problemă se determină prin alegerea pe bară a punctului de frîngere, adică mulţimea rezultatelor este formată aici din mulţimea punctelor de pe segmentul AB de lungime l (fig. 6).

În rezolvarea problemei, trebuie mai întîi să definim precis ce înţelegem prin condiţia că punctul de frîngere este luat „la întîmplare". Aici nu se poate admite că această expresie ar însemna că toate rezultatele reprezentate prin diferitele puncte ale segmentului AB sînt egal posibile: deoarece numărul total al evenimentelor este infinit, ultima afirmaţie înseamnă numai că probabilitatea fiecărui eveniment în parte este egală cu zero şi nu dă nimic pentru calculul probabilităţilor. În locul probabilităţii fiecărui rezultat, este util

[1] Pafnuti Lvovici Cebîşev (1821—1894), ilustru matematician rus este fondatorul şi cel mai strălucit reprezentant al şcolii matematice din Petersburg. Cele mai importante lucrări ale lui Cebîşev se referă la teoria numerelor, teoria probabilităţilor, teoria aproximării funcţiilor şi teoria mecanismelor. V. mai departe, în legătură cu aceasta, problemele 132 şi a 166.

să se considere aici probabilitatea ca punctul de frîngere să se afle în interiorul unui mic segment al barei; în felul acesta expresia „la întîmplare" va fi acceptată în sensul că probabilitatea ca punctul de frîngere să fie cuprins în interiorul unui mic segment depinde numai de lungimea acestui segment, dar nu depinde de poziția acestui segment pe bară. Cu acest sens al expresiei „la întîmplare", rezolvarea problemei poate fi ușor găsită.

Într-adevăr, din faptul că probabilitatea ca punctul de frîngere să se afle în interiorul unui segment este aceeași pentru toate segmentele de lungime egală, rezultă că probabilitatea ca punctul de frîngere să se afle în interiorul oricărui segment de lungime l/n este egală cu $1/n$[1]. Însă lungimea celei mai mici dintre cele două bucăți ale barei va fi mai mare decît $l/4$, dacă punctul de frîngere se va afla în interiorul segmentului MN de lungime $l/2$ și simetric față de mijlocul barei (v. fig. 6); în caz contrar, lungimea celei mai mici bucăți va fi mai mică decît $l/4$. De aici rezultă imediat că probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{l}{2} : l = \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2. Pe parchet este aruncată la întîmplare o monedă de diametru d. Parchetul este format din pătrate cu latura $a > d$. Care este probabilitatea ca moneda să nu cadă pe nici una dintre laturile pătratelor de pe parchet?

Toate rezultatele posibile ale experimentului considerat în această problemă se determină prin poziția centrului monedei aruncate. Deoarece toate pătratele parchetului sînt la fel de corecte, ne putem mărgini la cercetarea pătratului în interiorul căruia a căzut centrul monedei; în acest caz, mulțimea tuturor rezultatelor va fi reprezentată prin mulțimea punctelor pătratului $ABCD$ de latură a.

Prin expresia „la întîmplare" din enunțul acestei probleme trebuie să se înțeleagă că probabilitatea ca centrul monedei să cadă în interiorul unui dreptunghi mic oarecare depinde numai de suprafața acestui dreptunghi și nu de poziția acestui dreptunghi în interiorul pătratului $ABCD$. Cu alte cuvinte, această expresie arată că probabilitatea ca centrul monedei să cadă în interiorul unei părți a pătratului este egală cu raportul dintre aria acestei părți și aria întregului pătrat (compară cu nota de picior). Însă este ușor de văzut că moneda nu va cădea pe laturile pătratelor parchetului dacă centrul ei se va afla în interiorul pătratului $MNPQ$, a cărui latură este egală cu $a - d$ și avînd centrul în centrul pătratului $ABCD$ (fig. 7).

---

[1] Deoarece orice segment comensurabil cu lungimea întregii bare poate fi reprezentat sub forma unei sume de segmente de lungime l/n, rezultă că probabilitatea ca punctul de frîngere să se afle în interiorul oricărui astfel de segment este egală cu raportul dintre lungimea acestui segment și lungimea întregii bare. Deoarece orice segment incomensurabil cu lungimea întregii bare este limita segmentelor comensurabile, probabilitatea ca punctul de frîngere să se afle în interiorul oricărui segment va fi, de asemenea, egală cu raportul dintre lungimea segmentului și lungimea barei. În legătura cu aceasta, în cele ce urmează, în probleme analoage, expresia „la întîmplare" va avea de la început sensul de probabilitate ca un punct să se afle în interiorul unui segment este proporțională ca lungimea acestui segment.

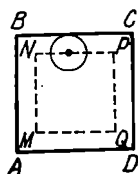


Fig. 7

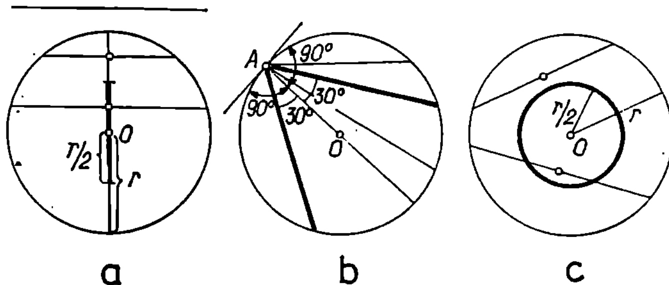


Fig. 8

Rezultă deci că probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{\text{aria } MNPQ}{\text{aria } ABCD} = \frac{(a-d)^2}{a^2} = \left(1 - \frac{d}{a}\right)^2.$$

Se observă că în ambele exemple considerate soluția problemei a depins în esență de sensul expresiei „la întîmplare". În toate cazurile în care poate apărea vreo îndoială asupra sensului acestei expresii este necesar ca în textul problemei să fie date explicații corespunzătoare; altfel, nu se poate găsi o soluție unică a problemei (v. textul de mai jos). În problemele ce urmează este puțin probabil să mai apară astfel de îndoieli, în special după analiza celor două exemple de mai sus; ținînd seama de aceasta, în enunțul lor expresia „la întîmplare" va fi folosită fără altă explicație.

Un exemplu clasic de problemă care nu are sens dacă nu se explică precis ce se înțelege prin expresia „la întîmplare" este următoarea:

„Care este probabilitatea ca o coardă luată la întîmplare într-un cerc să fie mai mare decît latura unui triunghi regulat înscris în cerc?"

Înțelegînd expresia „la întîmplare" în diferite feluri, se pot obține aici răspunsuri cu totul diferite. Astfel, din considerații de simetrie, ne putem mărgini la considerarea coardelor paralele cu o direcție dată, atribuind expresiei „la întîmplare" sensul că probabilitatea ca punctul de intersecție a coardei cu diametrul perpendicular pe ea să se afle în interiorul unui segment al acestui diametru este proporțională cu lungimea segmentului; în acest caz, obținem pentru probabilitatea căutată valoarea 1/2 (v. fig. 8, *a*). Pe de altă parte, tot din considerații de simetrie, pot fi considerate numai coardele care trec doar printr-un punct dat A de pe cerc (fig. 8, *b*); deoarece toate coardele sînt situate în interiorul unuia dintre cele două unghiuri drepte formate de tangenta în punctul A și rază și deoarece coardele mai mari decît latura unui triunghi regulat înscris în cerc trebuie să se afle în interiorul unuia dintre cele două unghiuri de 30°, ar rezulta de aici că probabilitatea căutată este egală cu $\frac{30°}{90°} = \frac{1}{3}$. În sfîrșit, se poate, de asemenea, considera că expresia „la întîmplare" înseamnă că probabilitatea ca mijlocul coardei să se afle în interiorul unei părți oarecare a cercului este proporțională cu aria acestei părți; deoarece în general, mijlocul coardei poate fi orice punct al cercului și deoarece mijloacele coardelor mai mari decît latura triunghiului regulat înscris în cerc acoperă un cerc de rază de două ori mai mică, $r/2$ (fig. 8, *c*), atunci în r-un astfel de sens al expresiei „la întîmplare" se obține, pentru probabilitatea căutată, valoarea $\frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$.

Este ușor de înțeles cum se explică o astfel de nedeterminare a răspunsului în problema considerată. Termenul „probabilitate", prin însuși sensul său, presupune prezența unei anu-

mite experiențe la care el se referă (v. introducerea generală în ce privește problemele de teoria probabilităților de la p. 21). Expresia „la întîmplare" trebuie înțeleasă ca indicare a metodei de efectuare a experimentului considerat. În exemplele analizate mai înainte, fringerea barei și aruncarea monedei, ca și în problemele următoare 92—100, sensul acestei expresii reiese din enunțul problemei. În cazul coardei luate „la întîmplare" într-un cerc, fără alte explicații, nu este deloc clar cum se ia această coardă, iar expresia „la întîmplare" în sine nu spune mai nimic. Astfel, dacă vom desena cercul pe o foaie mare de hîrtie și apoi vom arunca pe ea un ac, iar prin punctul în care cade vîrful acului (în cazurile în care acest punct se va găsi în interiorul cercului) vom duce coardele perpendiculare pe raza care trece prin punctul obținut, atunci va fi valabilă cea de-a treia soluție găsită mai sus și probabilitatea căutată va fi egală cu 1/4. Dacă vom alege un punct pe cerc și în acest punct vom fixa o bară căreia îi vom da un impuls ca să se rotească în jurul punctului fix, iar apoi vom aștepta pînă ce se va opri, atunci pentru coardele duse în direcția barei va fi valabilă a doua soluție, iar probabilitatea căutată va fi egală cu 1/3. În sfîrșit, nu este greu de arătat că, pentru majoritatea procedeelor mult mai firești de luare a coardei „la întîmplare" (aruncarea unui disc pe un plan pe care s-au trasat drepte; aruncarea unei bare pe un plan pe care s-a trasat un cerc; studiul traiectoriilor stelelor care intersectează discul Lunii sau al traiectoriilor unor particule care se mișcă liniar în cîmpul vizual circular al unei lupe, al unui microscop sau al unui telescop) va fi valabilă prima soluție a problemei, iar probabilitatea căutată va fi egală cu 1/2; în acest sens, prima dintre cele trei rezolvări date va fi „cea mai corectă".

92. Problema întîlnirii. Două persoane au convenit să se întîlnească într-un anumit loc între orele 12 și 13. Conform înțelegerii, primul sosit așteaptă pe al doilea timp de 15 minute, după care pleacă. Care este probabilitatea ca cele două persoane să se întîlnească dacă pentru fiecare dintre ele momentul sosirii la locul convenit este luat la întîmplare între orele 12 și 13?

93. O bară este frîntă în trei bucăți; cele două locuri de fringere sînt luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca din cele trei bucăți obținute să se poată forma un triunghi?

94.* O bară de lungime l este frîntă în trei bucăți în două locuri luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca lungimea nici uneia dintre bucățile obținute să nu fie mai mare decît o mărime dată a?

95. Pe un cerc sînt luate la întîmplare trei puncte A, B și C. Care este probabilitatea ca triunghiul ABC să fie ascuțitunghic?

96.* Din trei bare identice se rupe cîte o bucată; locurile în care sînt frînte cele trei bare au fost luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca din cele trei bucăți obținute să se poată forma un triunghi?

*97**.* Din trei bare identice se rupe la întîmplare cîte o bucată. Care este probabilitatea ca din aceste trei bucăți să poată fi format un triunghi ascuțitunghic?

*98***.* O bară este frîntă în trei părți; cele două puncte de fringere sînt luate la întîmplare. Care este probabilitatea ca din cele trei bucăți obținute să se poată forma un triunghi ascuțitunghic?

*99***.* O bară este frîntă în două părți într-un punct luat la întîmplare. Apoi cea mai mare dintre cele două bucăți formate este frîntă din nou în două bucăți într-un punct luat la întîmplare. Care este probabilitatea că din cele trei bucăți astfel obținute să poată fi format un triunghi?

*100****. Problema lui Buffon[1]. Pe o suprafață se trasează drepte paralele situate la distanța $2a$ una de alta. Pe suprafață se aruncă la întîmplare un ac subțire a cărui lungime este egală tot cu $2a$. Să se arate că probabilitatea ca acul să intersecteze una dintre drepte este egală cu $2/\pi \approx \approx 0{,}637$ ($\pi = 3{,}14 \ldots$ este raportul dintre lungimea cercului și diametru).

Observație. Rezultatul acestei probleme permite să se determine numărul π, în mod experimental, aruncînd de mai multe ori un ac pe o hîrtie liniată și însemnînd numărul de cazuri în care acul intersectează liniile trasate (amintim că frecvența de apariție a evenimentului dat este aproximativ egală cu probabilitatea lui). Astfel, prin 5 000 de aruncări repetate ale actului s-a obținut pentru π valoarea $\pi \approx 3{,}159$ (o exactitate mai mare în determinarea lui π cu acest procedeu este greu de obținut, deoarece ar trebui efectuate extrem de multe aruncări). Vă mai recomandăm cărțile [12], [32] și [42].

Cu acestea încheiem seria de probleme consacrate calculului probabilităților. Subliniem că problemele date aici se referă de fapt la „preistoria“ teoriei probabilităților: de rezolvarea unor astfel de probleme este legată, în secolul al XVII-lea, apariția acestei discipline matematice în lucrările lui Pascal, Fermat și Huygens. Dezvoltarea ulterioară a teoriei probabilităților în secolul al XVIII-lea și la începutul secolului al XIX-lea este legată de numele lui J. Bernoulli, Laplace și Gauss; în lucrările acestor savanți au fost analizate multe probleme teoretico-probabiliste și, pentru prima oară, au fost schițate căile de aplicare a noii discipline la probleme de științe naturale și de tehnică. Însă constituirea definitivă a teoriei probabilităților într-o știință mare, independentă, profundă și foarte importantă pentru practică, cu metode specifice de cercetare, s-a produs abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea și la începutul secolului al XX-lea; un rol deosebit au avut lucrările iluștrilor savanți ruși P.L. Cebîșev, A.A. Markov și A.M. Leapunov.

---

[1] Georges Buffon (1707—1788) — ilustru cercetător francez al științelor naturii.

PROBLEME DIN DIFERITE DOMENII ALE MATEMATICII

1. PROBLEME REFERITOARE LA CONFIGURAŢII DE PUNCTE ŞI DREPTE

Problemele 101—107 se referă la acea parte a geometriei în care se cercetează numai poziţia reciprocă a punctelor şi dreptelor în plan, fără a se lua în consideraţie distanţele dintre puncte sau unghiurile formate de drepte. Această parte a geometriei s-a dezvoltat în secolul al XIX-lea ca o disciplină importantă, care a primit denumirea de *geometrie proiectivă*. Chestiunile atinse în problemele 101—107 se referă la un domeniu relativ restrîns al geometriei proiective, anume la aşa-numita *teorie a configuraţiei* [38], [65], ş.a.), această teorie are o mare importanţă în matematica modernă (de aceasta ţine şi teoria algebrică a planelor proiective).

101. Este posibil să se creeze o reţea urbană de autobuze, formată din 10 trasee, astfel ca în cazul suspendării oricăruia dintre aceste trasee să rămînă posibilitatea de a călători din fiecare staţie existentă de autobuz la oricare alta (se admite ca pe parcurs să se schimbe autobuzul), iar în cazul suspendării a două trasee oarecare să existe staţii care să nu fie legate cu o altă staţie?

102. Să se arate că o reţea urbană de autobuze poate fi astfel alcătuită, încît fiecare traseu să aibă exact trei staţii, oricare două trasee să aibă o staţie comună (în care se poate schimba autobuzul) şi din orice staţie să se poată călători la alta fără a se schimba autobuzul.

103*. O reţea urbană de autobuze, formată din mai multe trasee (mai mult decît două), este organizată astfel încît:

1° fiecare traseu are nu mai puţin de trei staţii;

2° dintr-o staţie în alta se poate ajunge fără schimbarea autobuzului;

3° pentru orice pereche de trasee există o staţie (şi numai una) în care se poate schimba autobuzul de pe un traseu pe altul.

a) Să se arate că fiecare traseu de autobuze are acelaşi număr de staţii şi că prin fiecare staţie trece acelaşi număr de trasee (egal cu numărul de staţii ale fiecărui traseu).

b) Să se găsească numărul de staţii de pe fiecare traseu de autobuze, dacă numărul total de trasee din oraş este egal cu 57.

104. a) Să se dispună în plan nouă drepte şi nouă puncte astfel încît prin fiecare punct să treacă cîte trei drepte şi pe fiecare dreaptă să fie situate cîte trei puncte.

b) Să se demonstreze că nu se pot dispune în plan şapte drepte şi şapte puncte, astfel încît prin fiecare punct să treacă trei drepte şi pe fiecare dreaptă să se afle trei puncte.

105*. Într-un plan sînt date *n* drepte care nu sînt paralele două cîte două şi sînt astfel situate, încît prin fiecare punct de intersecţie a două dintre ele să mai treacă şi o a treia dreaptă din cele *n* considerate. Să se demonstreze că toate cele *n* drepte se intersectează într-un acelaşi punct.

106** (Problema lui J. Sylvester[1]). Într-un plan sînt date *n* puncte astfel dispuse încît pe fiecare dreaptă care uneşte două din aceste puncte mai este situat cel puţin încă unul. Să se demonstreze că toate cele *n* puncte sînt coliniare (se află pe o aceeaşi dreaptă).

Observaţie. Cu ajutorul principiului dualităţii din geometria proiectivă se poate demonstra că problemele 105 şi 106 rezultă una din cealaltă.

107.** Într-un plan sînt date *n* puncte, care nu sînt toate situate pe aceeaşi dreaptă (necoliniare). Să se demonstreze că printre dreptele care unesc toate perechile posibile de astfel de puncte vor exista cel puţin *n* drepte diferite

2. ÎNCĂ DOUĂ PROBLEME REFERITOARE LA POZIŢIA PUNCTELOR ÎN PLAN

108. a) Să se determine toate poziţiile posibile a patru puncte în plan pentru care distanţele a două cîte două dintre ele pot lua numai două valori diferite *a* şi *b*. Să se calculeze toate valorile raportului *b/a* pentru care sînt posibile astfel de distribuţii.

b) Să se determine toate poziţiile a *n* puncte în plan, astfel încît toate distanţele a două cîte două dintre ele să ia una dintre cele două valori *a* sau *b*. Pentru care valori ale lui *n* există astfel de distribuţii?

109.* a) Să se demonstreze că într-un plan pot fi găsite oricît de multe puncte necoliniare astfel încît distanţele dintre două oarecare astfel de puncte să fie exprimate prin numere întregi.

b)** Să se demonstreze că în plan nu poate fi indicată o infinitate de puncte care să verifice condiţiile problemei a).

3. REŢELE PLANE DE PUNCTE

Problemele 110—112 sînt consacrate reţelelor plane de puncte, adică sistemelor de puncte reprezentate de vîrfurile unei reţele de pătrate din plan, asemănătoare celei de pe paginile caietelor „de aritmetică“. Reţelele de puncte de acest gen joacă un rol important în matemati-

---

[1] J. Sylvester (1814—1897) — matematician englez.

ca modernă (teoria numerelor) și în alte științe (cristalografia); este deosebit de importantă teorema lui Minkowski (v. problema 111), care are multe aplicații în teoria numerelor [(45], [38]).

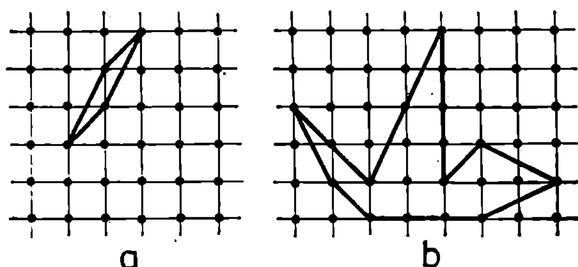


Fig. 9

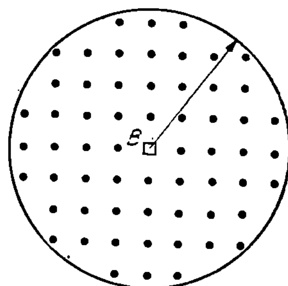


Fig. 10

110*. a) Pe o foaie de aritmetică este desenat un paralelogram ale cărui vîrfuri se află în noduri ale rețelei de pătrate, iar pe laturi și în interiorul lui nu se află alte noduri ale acestei rețele (fig. 9,*a*) Să se demonstreze că aria acestui paralelogram este egală cu aria unui pătrat al rețelei.

b) Pe o foaie de aritmetică este desenat un poligon, ale cărui vîrfuri se află în noduri ale unei rețele de pătrate (fig. 9,*b*). Să se demonstreze că aria S a acestui poligon poate fi calculată cu ajutorul formulei

$$S = N + \frac{k}{2} - 1,$$

unde N este numărul de noduri ale rețelei de pătrate situate în interiorul acestui poligon, iar k este numărul de noduri ale acestei rețele situate pe laturile lui; ca unitate de arie se ia aici aria unui pătrat al rețelei $\left(\text{astfel, aria poligonului reprezentat în fig. 9,}b \text{ este egală cu } 4 + \frac{16}{2} - 1 = 11\right)$.

Evident că problema a) este un caz particular al problemei b).

111**. Teorema lui Minkowski[1]. Pe o foaie de aritmetică este desenat un poligon convex simetric față de centru, centrul său de simetrie fiind unul din nodurile rețelei de pătrate. Să se demonstreze că, dacă în afară de centrul de simetrie în interiorul poligonului nu mai există alte noduri ale rețelei, atunci aria poligonului nu poate fi mai mare decît 4 (ca unitate de arie se consideră aria unui pătrat al rețelei).

112**. Fie o grădină rotundă de rază 50, în care copacii sînt așezați în nodurile rețelei de pătrate de latură 1; în centrul grădinii se află un chioșc B (fig. 10). Atîta timp cît copacii rămîn destul de subțiri (îi considerăm ro-

---

[1] Hermann Minkowski (1864—1909) — cunoscut matematician german.

tunzi şi de aceeaşi grosime), ei nu acoperă vederea din chioşc (adică există raze duse din centrul grădinii care nu întîlnesc nici un copac); cînd însă copacii vor creşte, ei vor acoperi total vederea din chioşc. Să se demonstreze că, atîta timp cît raza tuturor copacilor rămîne mai mică decît $\frac{1}{\sqrt{2\,501}} \approx \frac{1}{50{,}01}$, vederea din chioşc nu va fi acoperită, însă atunci cînd această rază va creşte peste 1/50, vederea din chioşc va fi desigur complet acoperită.

4. PROBLEME DE TOPOLOGIE

Topologie se numeşte ramura matematicii care studiază proprietăţile cele mai generale, pur calitative, ale figurilor geometrice. Topologia a apărut ca ştiinţă independentă relativ recent (abia în secolul al XX-lea). În prezent, aceasta este una dintre ştiinţele matematice importante, cu importante aplicaţii în multe alte ramuri ale matematicii ([2], [38], [17], [13]).

113. Într-un plan sînt duse n drepte. Să se demonstreze că domeniile în care este împărţit planul prin aceste drepte pot fi vopsite cu două culori astfel ca nici un grup de două domenii vecine (adică domenii adiacente pe un segment) să nu fie vopsite cu aceeaşi culoare (fig.11).

Problema 113 poate fi formulată şi în modul următor: o hartă geografică, formată de n drepte duse în plan, poate fi vopsită cu două culori astfel încît nici un grup de două ţări vecine să nu fie vopsite cu aceeaşi culoare. În această formă, problema considerată se prezintă ca un caz particular al următoarei probleme generale: care este numărul minim de culori cu care poate fi vopsită o hartă geografică oarecare astfel încît nici un grup de două ţări vecine să nu fie vopsite cu aceeaşi culoare? Această problemă este recent rezolvată (numărul culorilor este egal cu patru), deşi ea preocupa pe matematicieni de peste o sută de ani. Problema vopsirii liniilor reţelei (problema 114) şi aceea a vopsirii nodurilor reţelei (v. observaţia la problema 116) sînt şi ele legate de această problemă a vopsirii ţărilor de pe o hartă geografică.

*114***. Într-un plan este dusă o reţea de linii astfel încît în fiecare nod al ei se să întîlnească nu mai mult de 10 linii (se numeşte nod un punct în care se întîlnesc trei sau mai multe linii). Liniile se vopsesc cu culori diferite, astfel ca nici un grup de două linii vecine (linii care se întîlnesc în acelaşi nod) să nu fie vopsite cu aceeaşi culoare. Să se demonstreze că se poate realiza totdeauna un astfel de mod de vopsire dacă folosim 15 culori diferite; în anumite cazuri însă 14 culori pot fi prea puţine.

Observaţie. Un mod de vopsire a reţelelor de linii, analog celui din problemă, este întîlnit uneori în practică. Anume, în cazul circuitelor electrice complexe, ca să nu se încurce firele la conectare, este comod să folosim fire de culori diferite (sau fire ale căror capete sînt însemnate cu panglici de diferite culori); în acest caz, clemele aparatelor sînt vopsite în aceleaşi culori ca şi firele.

Binelnţeles că, în acest caz, nici un grup de două fire, prinse de un aparat, nu trebuie să fie de aceeaşi culoare. Aparatele electrice joacă, în acest caz, rolul de noduri ale reţelei din problema noastră, iar firele rolul de linii ale reţelei.

*115***. a) Un triunghi este împărțit în triunghiuri mai mici care nu se acoperă, astfel încît oricare două triunghiuri ale descompunerii sau nu au nici un punct comun, sau au un vîrf comun, sau au o latură comună (adică nici un grup de două triunghiuri ale descompunerii nu sînt alipite numai pe o por-

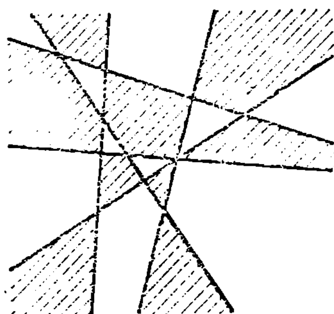


Fig. 11

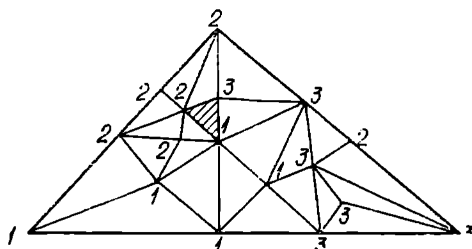


Fig. 12

țiune din latura comună). Cele trei vîrfuri ale triunghiului mare sînt numerotate cu cifrele *1*, *2* și *3*. Vîrfurile triunghiurilor din descompunere sînt numerotate cu aceleași cifre *1*, *2* și *3* astfel încît toate vîrfurile situate pe latura *12* a triunghiului mare să fie notate cu cifrele *1* sau *2*, toate vîrfurile situate pe latura *13* — cu cifrele *1* sau *3* și toate vîrfurile situate pe latura *23* — cu cifrele *2* sau *3*, restul fiind cu totul arbitrar (fig. 12). Să se demonstreze că printre triunghiurile din descompunere se va găsi cel puțin unul, ale cărui vîrfuri sînt numerotate cu cele trei cifre diferite *1*, *2* și *3*.

b) Să se formuleze și să se demonstreze teorema descompunerii tetraedrului în tetraedre mai mici, analoagă teoremei din problema a).

*116**. Un triunghi este împărțit în triunghiuri mai mici în condițiile date în problema 115, a). Să se demonstreze că, dacă în fiecare vîrf al descompunerii se întîlnește un număr par de triunghiuri, toate vîrfurile pot fi numerotate cu cifrele *1*, *2* și *3* astfel încît vîrfurile fiecărui triunghi al descompunerii să fie numerotate cu trei cifre diferite (fig. 13).

Există ipoteza că în toate cazurile (adică chiar dacă condiția de paritate a numărului de triunghiuri care se întîlnesc în fiecare vîrf nu are loc) vîrfurile descompunerii pot fi numerotate cu patru cifre *1*, *2*, *3* și *4* astfel încît vîrfurile fiecărui triunghi al descompunerii să fie numerotate cu trei cifre diferite.

Vom observa că problema 116 poate fi formulată în modul următor: dacă triunghiul este împărțit în triunghiuri mai mici în condițiile date în problema 115,a) și în fiecare vîrf al descompunerii se întîlnește un număr par de triunghiuri, atunci toate vîrfurile descompunerii se întîlnește un număr par de triunghiuri, atunci toate vîrfurile descompunerii pot fi vopsite cu trei culori, astfel încît nici un grup de două vîrfuri vecine (adică vîrfuri care aparțin aceluiași triunghi) să nu fie vopsite cu aceeași culoare (compară cu problemele 113 și 114).

*117****. Problema vecinilor. Un pătrat de latură 1 este împărțit în poligoane mai mici (pot fi și concave; fig. 14). Să se demonstreze că, dacă toate aceste poligoane sînt suficient de mici (de exemplu dacă fie-

care dintre ele poate fi cuprins în interiorul unui cerc de diametru 1/30), atunci se va găsi cel puţin un poligon al descompunerii care are nu mai puţin de şase vecini (adică poligoane care se ating cu alte poligoane date cel puţin într-un punct; v. fig. 14).

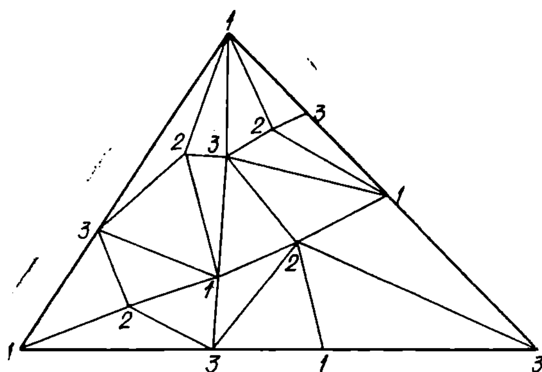


Fig. 13

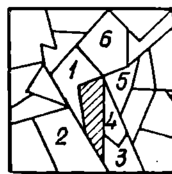


Fig. 14

5. O PROPRIETATE A INVERSELOR NUMERELOR ÎNTREGI

*118****. Fie a un număr invers al unui număr întreg: $a = 1/n$, unde n este un număr întreg pozitiv. Să se demonstreze că orice curbă continuă care uneşte punctele A şi B, a căror distanţă este egală cu 1, are o coardă[1] paralelă cu AB, de lungime a. Dacă însă numărul a nu este inversul unui număr întreg, atunci va exista o curbă continuă care uneşte punctele A şi B şi care nu are nici o coardă paralelă cu AB, de lungime a.

6. TREI PROBLEME REFERITOARE LA POLIGOANE CONVEXE

Problemele 119—121 sînt probleme de maxim şi minim, legate de poligoane convexe. Aceste probleme mai pot fi generalizate, înlocuind în enunţul lor poligonul convex cu o figură convexă oarecare (adică cu o figură în care se poate duce în orice punct de pe frontieră o dreaptă care să nu intersecteze figura; această condiţie înseamnă că figura nu are „intrînduri"). În acest caz, aproape că nici nu trebuie să modificăm rezolvările problemelor 119—121.

Teoria figurilor convexe este o ramură importantă a geometriei, cu multiple aplicaţii în alte ramuri ale matematicii şi în ştiinţele naturii (vezi [45], [40], [43], [6], [19], [61], ş.a.).

119. a) Să se demonstreze că orice poligon convex de arie egală cu 1 poate fi inclus într-un paralelogram de arie 2.

b) Să se demonstreze că un triunghi de arie 1 nu poate fi inclus într-un paralelogram de arie mai mică decît 2.

---

[1] Coardă a unei curbe oarecare se numeşte orice segment de dreaptă ale cărui capete se află pe curbă.

120. a) Să se demonstreze că orice poligon convex de arie 1 poate fi inclus într-un triunghi de arie 2.

b)** Să se demonstreze că un paralelogram de arie 1 nu poate fi inclus într-un triunghi de arie mai mică decît 2.

121*. a) Fie M un poligon convex și l o dreaptă oarecare. Să se demonstreze că în M poate fi înscris un triunghi cu o latură paralelă cu l și a cărui arie nu este mai mică decît 3/8 din aria lui M.

b) Fie M un hexagon regulat și l o dreaptă paralelă cu una dintre laturile sale. Să se demonstreze că în M nu poate fi înscris un triunghi cu o latură paralelă cu l și de arie mai mare decît 3/8 din aria lui M.

7. CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR DE NUMERE

*122***. a) Să se demonstreze că, dacă orice grup de două din n progresii aritmetice de numere întregi (adică progresii aritmetice cu toți termenii numere întregi) infinite în ambele sensuri au un termen comun, atunci și toate cele n progresii au un termen comun. Să se demonstreze că, pentru progresii care nu sînt formate din numere întregi, această proprietate poate să nu fie adevărată.

b) Să se demonstreze că, dacă orice grup de trei din n progresii aritmetice date infinite în ambele sensuri au un termen comun, atunci și toate cele n progresii au un termen comun.

Observație. Este interesant să observăm analogia dintre forma în care este enunțată această problemă și aceea a următoarei teoreme geometrice: Dacă „orice grup de trei n figuri convexe date au un punct comun, atunci și toate aceste n figuri au un punct comun" (vezi [40]).

123. a) Să se demonstreze că un șir compus dintr-un număr oarecare (mai mare decît trei!) de cifre 1 și 2 dispuse într-o ordine oarecare conține o cifră sau un grup de cifre care se repetă succesiv de două ori.

b)** Să se demonstreze că există șiruri oricît de lungi formate din cifrele 1 și 2 în care nici o cifră sau grup de cifre nu se repetă succesiv de trei ori.

*124****. a) Să se demonstreze că există șiruri oricît de lungi formate din cifrele 0, 1, 2 și 3, în care nici o cifră sau grup de cifre nu se repetă succesiv de două ori.

b) Să se demonstreze că există șiruri oricît de lungi formate din cifrele 1, 2 și 3, în care nici o cifră sau grup de cifre nu se repetă succesiv de două ori.

Observație. Teorema din problema a) este o consecință a teoremei din problema b), deoarece orice șir format din cifrele 1, 2 și 3 poate fi considerat ca un șir format din cifrele 0, 1, 2 și 3 în care nu figurează cifra 0. Însă am dat aici separat problema a), deoarece rezolvarea ei este ceva mai simplă decît rezolvarea problemei b).

*125***. Fie T un număr întreg pozitiv oarecare format din N zerouri și unități. Să considerăm toate numerele de n cifre, unde $n<N$, formate din n

cifre consecutive oarecare ale numărului T; aceste numere vor fi în număr de $N-n+1$ [ele vor începe cu a 1-a, a 2-a, a 3-a, ..., a $(N-n+1)$-a cifră a numărului T [1]].

Să se demonstreze că numărul de cifre N şi însuşi numărul T poate fi astfel alese ca numerele de n cifre obţinute din T prin procedeul indicat să fie toate diferite şi ca printre ele să existe toate numerele posibile de n cifre formate din zerouri şi unităţi.

8. PROBLEMA DISTRIBUŢIEI OBIECTELOR

Problema prezentată aici are o formulare artificială, însă chestiunea pusă se referă în realitate la proprietăţile cele mai generale ale distribuţiei diferitelor obiecte (prăjituri") după două criterii („sortul" şi „numărul cartonului"). Teorema din problema 126 şi unele generalizări ale ei sînt esenţiale pentru o serie de probleme din matematica modernă.

*126**. 20 sorturi de prăjituri cu cîte 10 prăjituri de fiecare sort sînt împachetate într-un mod oarecare în 20 cartoane (cîte 10 prăjituri în fiecare carton). Să se demonstreze că oricare ar fi distribuţia prăjiturilor în cartoane, este totdeauna posibil să obţinem 20 de prăjituri din cele douăzeci de sorturi diferite, luînd cîte o prăjitură din fiecare carton.

9. PROBLEME REFERITOARE LA SISTEME DE NUMERAŢIE DIFERITE DE CEL ÎN BAZA ZECE

Următoarele trei probleme sînt înrudite prin faptul că în soluţiile lor se folosesc sisteme de numeraţie diferite de cel în baza zece.

127***. Pătratele unei table infinite de şah se numerotează succesiv în modul următor: în pătratul din colţ se pune numărul 0, iar după aceea în fiecare pătrat se înscrie cel mai mic număr posibil care nu a fost încă folosit la numerotarea pătratelor precedente de pe aceeaşi orizontală sau de pe aceeaşi verticală (fig. 15). Ce număr va căpăta, în acest caz, pătratul de la intersecţia orizontalei a 100-a cu verticala a 1 000-a?

128**. J o c u l „n i m". Se iau trei grămezi formate fiecare din cîte un număr oarecare de chibrituri. Doi jucători iau alternativ chibrituri din ele, fiecare jucător putînd lua orice număr de chibrituri din orice grămadă (însă numai din una). Se consideră că a cîştigat cel care ia ultimul chibrit.

Să se determine în ce condiţii iniţiale jucătorul care începe jocul poate să cîştige sigur şi în care nu, şi să se găsească metoda jocului corect în primul caz.

O b s e r v a ţ i e. În loc de trei grămezi de chibrituri se poate juca desenînd o tablă din trei şiruri de pătrate şi punînd în aceste trei şiruri cîte o damă (fig. 16). Jucătorii mută alter-

[1] Astfel, din numărul de cinci cifre 10 010 vom obţine în modul indicat următoarele patru numere de două cifre: 10, 00, 01 şi din nou 10.

nativ cîte una din dame cu orice număr de pătrate la dreapta şi se consideră că a cîştigat cel care face ultima mutare. Sub această formă, jocul poate fi jucat foarte comod pe o tablă neagră, cu o cretă şi un burete.

O observaţie analoagă poate fi făcută şi în problema următoare.

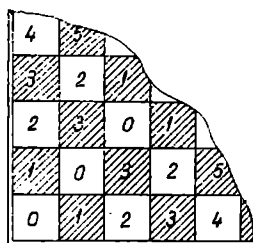


Fig. 15

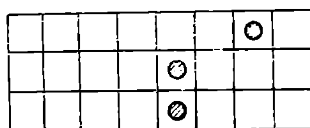


Fig. 16

129***. J o c u l „ţ z i a n ş i ţ z i" [1]. În două grămezi se află cîte un anumit număr de chibrituri. Doi jucători, care joacă alternativ, iau chibrituri din aceste grămezi, încît la fiecare mişcare jucătorul poate lua sau nu număr oarecare de chibrituri din una dintre grămezi sau un număr egal din amîndouă. Se consideră că a cîştigat cel care va lua ultimul chibrit.

Să se determine în ce situaţii iniţiale primul jucător poate cîştiga neapărat şi în care nu, şi să se determine metoda jocului corect în primul caz.

10. POLINOAMELE CU CEA MAI MICĂ ABATERE DE LA ZERO (POLINOAMELE LUI CEBÎŞEV)

Problemele 130—135 sînt consacrate teoremei clasice a lui P. L. Cebîşev referitoare la polinoamele cu cea mai mică abatere de la zero (v. problema 132) şi la rezultatele legate de această teoremă. Acest ciclu de probleme joacă în matematica modernă un rol important.

A b a t e r e a f u n c ţ i e i $f(x)$ d e l a z e r o pe un segment oareare se numeşte cea mai mare valoare pe care o ia modulul funcţiei pe acest segment; astfel abaterea de la zero, pe segmentul AB, a funcţiei $y = f(x)$, al cărei grafic este dat în fig. 17, este egală cu lungimea segmentului MP.

130. P o l i n o a m e l e l u i C e b î ş e v. Să se demonstreze că pentru $x \in [-1, 1]$ expresia

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

reprezintă un polinom în x de gradul n, cu coeficientul dominant egal cu 2^{n-1}. Să se determine toate rădăcinile polinomului

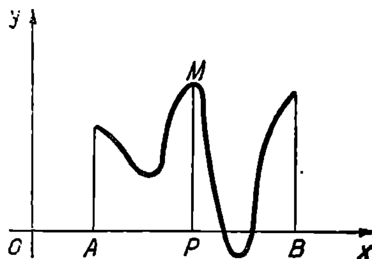


Fig. 17

[1] „Nim" şi „ţzianşiţzi" sînt jocuri populare din China („ţzianşiţzi" în traducere în limba română înseamnă „alegerea pietrelor"; bineînţeles că înlocuirea chibriturilor prin pietre în enunţul jocului nu îl modifică cu nimic).

$T_n(x) = 0$ şi toate valorile lui $x \in [-1, 1]$ pentru care polinomul $T_n(x)$ ia cea mai mare şi cea mai mică valoare.

131. Să se determine trinomul de gradul al doilea

$$x^2 + px + q,$$

a cărui abatere de la zero pe segmentul $[-1, 1]$ are cea mai mică valoare posibilă.

*132***. Să se demonstreze că abaterea de la zero a polinomului

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

de gradul n, cu coeficientul dominant egal cu 1, nu poate fi mai mică decît $1/2^{n-1}$ pe segmentul $[-1, 1]$ şi este egală cu $1/2^{n-1}$ numai pentru polinomul $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ (v. problema 130).

*133**. Să se determine toate polinoamele cu coeficientul dominant egal cu 1, a căror abatere de la zero pe segmentul $[-2, 2]$ are cea mai mică valoare posibilă.

*134***. Să se determine polinomul de gradul n cu coeficientul dominant egal cu 1, a cărui abatere de la zero în sistemul de $n + 1$ puncte $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ are cea mai mică valoare posibilă (abaterea de la zero a funcţiei $f(x)$ în sistemul de puncte $x = a, x = b, x = c, \ldots, x = l$ se numeşte cel mai mare dintre modulele valorilor funcţiei în aceste puncte, adică cel mai mare dintre numerele $|f(a)|, |f(b)|, \ldots, |f(l)|$).

*135****. Fie n puncte oarecare în plan şi anume $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Să se demonstreze că pe fiecare segment de lungime l se poate găsi un punct M, astfel ca produsul

$$MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$$

să fie nu mai mic decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Cum trebuie să fie dispuse punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pentru ca pe un segment dat PQ, de lungime l, să nu se poată găsi un punct M astfel încît produsul

$$MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$$

să fie mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$?

11. PATRU FORMULE PENTRU NUMĂRUL π

Se ştie că numărul π — raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său — nu numai că nu este raţional, dar nici nu poate fi reprezentat sub forma unei expresii algebrice finite, care să conţină operaţiile de adunare, de scădere, de înmulţire, de împărţire, de ridicare la putere şi de extragere a rădăcinii, efectuate asupra numerelor întregi, însă numărul π poate

fi reprezentat în multe moduri sub forma unei expresii infinite (sumă a unei serii infinite sau produs infinit); prima formulă de acest fel pentru numărul π a fost obținută încă în secolul al XVI-lea (v. problema 142, a)). În această serie de probleme sînt date unele formule clasice pentru π, care permit calculul acestui număr cu orice grad de precizie.

136. Să se demonstreze că:

a) dacă $0 < \alpha < \pi/2$, atunci $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$;

b) dacă $0 < n\alpha < \pi/2$, atunci $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$.

137. Să se simplifice expresia

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

138. Să se demonstreze că

a) $\sin n\alpha = C_n^1 \sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - C_n^3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha + C_n^5\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots$;

astfel

$$\sin 6\alpha = 6\sin\alpha\cos^5\alpha - 20\sin^3\alpha\cos^3\alpha + 6\sin^5\alpha\cos\alpha.$$

b) $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha + C_n^4\sin^4\alpha\cos^{n-4}\alpha - \ldots$;

astfel

$$\cos 6\alpha = \cos^6\alpha - 15\sin^2\alpha\cos^4\alpha + 15\sin^4\alpha\cos^2\alpha - \sin^6\alpha.$$

c) $\operatorname{tg} n\alpha = \dfrac{C_n^1\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha - \ldots}$;

astfel

$$\operatorname{tg} 6\alpha = \frac{6\operatorname{tg}\alpha - 20\operatorname{tg}^3\alpha + 6\operatorname{tg}^5\alpha}{1 - 15\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}^4\alpha - \operatorname{tg}^6\alpha}.$$

139. Să se formeze ecuațiile care admit ca rădăcini numerele

a) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2m+1}$, ..., $\operatorname{ctg}^2\frac{(m-1)\pi}{2m+1}$,

$\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}$;

$$-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}\ (n \text{ fiind par});$$

c) $\sin^2\frac{\pi}{2m},\quad \sin^2\frac{2\pi}{2m},\quad \sin^2\frac{3\pi}{2m},\ldots,\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m};$

d) $\sin^2\frac{\pi}{4m},\quad \sin^2\frac{3\pi}{4m},\quad \sin^2\frac{5\pi}{4m},\ldots,\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}.$

140. Să se demonstreze că

a) $$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2m+1}+\cdots$$
$$\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{m(2m-1)}{3};$$

b) $$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2m+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2m+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2m+1}+\cdots$$
$$\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{m(2m+2)}{3};$$

c) pentru n par

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}-$$
$$-\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=n.$$

141. Să se demonstreze că

$$\sin\frac{\pi}{2m}\sin\frac{2\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$$

$$\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}\sin\frac{5\pi}{4m}\ldots\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}=\frac{\sqrt{2}}{2^m}.$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}\ .^{2)}$$

b) Cu ce este egal produsul infinit

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}\cdots?$$

143. a) Din identitățile de la porblemele 140, *a*) și b) să se deducă formula lui Euler

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

b) Cu ce este egală suma seriei

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\dots?$$

144. a) Din identitatea de la problema 140, c) să se deducă formula lui Leibniz [3]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

b) Cu ce este egală suma seriei

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots?$$

---

[1] Francois Viète (1540—1603) — cunoscut matematician francez, unul dintre creatorii simbolicii algebrice moderne.

[2] Adică

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1:\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\times\dots\right.\right.$$
$$\left.\left.\dots\times\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}_{n\ \text{radicali}}\right]\right\}=\frac{\pi}{2}.$$

Un sens analog il au problemele 142, b), 143, 144, 145.

[3] Gotfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) — ilustru matematician german, unul dintre creatorii calculului diferențial și integral.

*145**. Din identitățile de la problema 141 să se deducă **formula lui Wallis**[1]

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

12. CALCULUL ARIILOR FIGURILOR CURBE

Problemele 146-154 sînt consacrate calculului ariilor unor figuri curbe (adică mărginite de contururi curbe). În cursul de geometrie, predat în școala medie, se calculează ariile cîtorva figuri curbe simple — cerc, sector, segment. Însă în studiul multor probleme științifice și tehnice se întîmplă să întîlnim calculul ariilor unor figuri mai complicate, mărginite de contururi curbe, altele decît arcele de cerc. O mare parte a cursului de matematică superioară, studiat în institutele de învățămînt superior, este consacrată metodelor generale de găsire a unor astfel de arii. Aceste metode generale (metode de integrare a funcțiilor) au fost create în cea mai mare parte în cursul secolelor XVII-XVIII, cînd dezvoltarea tehnicii a dus la necesitatea efectuării a numeroase calcule de acest gen. Însă în știință au fost întîlnite diferite probleme de calcul al ariilor figurilor curbe cu mult înainte de această vreme; o serie de astfel de probleme au fost rezolvate mai înain' cu ajutorul a diferite artificii de calcu' a căror utilizare nu cere cunoștințe care să iasă di ...drul programei de liceu ([1], [46' Unele dintre aceste probleme vor fi date mai jo'

Un loc central printre problemele di acea serie îl ocupă problemele 149—1 ?, care conțin teoria geometrică a logaritmilor naturali.

Rezolvarea ultimelor două probleme din această serie se bazează pe rezultatul problemei 159,c).

În problemele următoare se vor calcula ariile unor **trapeze curbilinii** $ABCD$, mărginite de curba BC, dată de ecuația $y=f(x)$ (de exemplu, parabola $y=x^2$, sinusoida $y=\sin x$ etc.), de segmentul AD al axei absciselor și de două segmente AB și CD de pe dreptele paralele cu axa ordonatelor și care corespund la valorile $x=a$ și $x=b$ (fig. 18, *a*). În diferite cazuri,

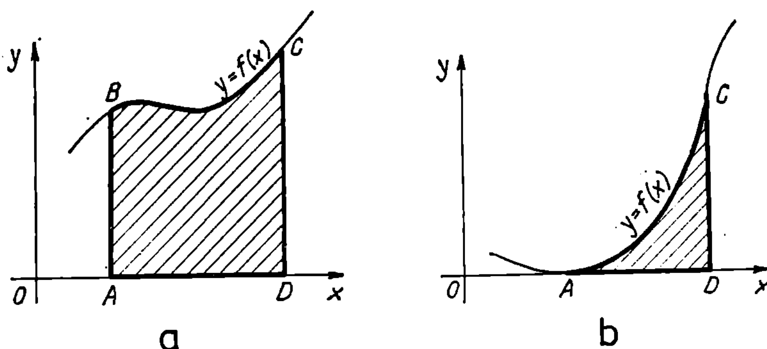


Fig. 18

latura AB a trapezului curbiliniu $ABCD$ va deveni un punct, așa că în locul trapezului curbiliniu $ABCD$ va fi **triunghiul curbiliniu** ACD (fig. 18,*b*).

[1] John Wallis (1616—1703) — cunoscut matematician englez.

În calculul ariei trapezului curbiliniu $ABCD$ (ca şi în calculul ariei cercului) trebuie folosită teoria limitelor. Se va împărţi baza AD a acestui trapez în n părţi, prin punctele $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ şi se va presupune că lungimile segmentelor $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., M_{n-1}D$ sînt egale respectiv cu $h_1, h_2, h_3, ..., h_n$. Se va duce, apoi, prin punctele $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ drepte paralele cu axa ordonatelor; aceste drepte vor intersecta curba $y = f(x)$ în punctele $N_1, N_2, ..., N_{n-1}$ (fig. 19). Se vor construi acum n dreptunghiuri, care au drept baze segmentele $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., M_{n-1}D$, iar ca înălţimi segmentele $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ..., DC$.

Se vor nota abscisele punctelor $M_1, M_2, ..., M_{n-1}, D$ cu $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$; deoarece abscisa punctului A este egală cu a, iar abscisa punctului D este egală cu b, rezultă $x_1 = a + h_1, x_2 = a + h_1 + h_2, ..., x_{n-1} = a + h_1 + h_2 + ... + h_{n-1} = b - h_n, x_n = b$. Lungimile segmentelor $M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3, ..., DC$ vor fi egale respectiv cu $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$; deci aria figurii în trepte formată din cele n dreptunghiuri va fi egală cu

$$S_n = f(x_1)\,h_1 + f(x_2)\,h_2 + f(x_3)\,h_3 + ... + f(x_n)\,h_n. \qquad (*)$$

Se va mări acum nemărginit numărul n; dacă, în acest caz, toate lungimile $h_1, h_2, h_3, ..., h_n$ ale segmentelor $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., M_{n-1}D$ vor descreşte nemărginit, suma ariilor celor n dreptunghiuri va tinde către o limită egală cu aria trapezului curbiliniu $ABCD$ [1]. Deci, trebuie aşezate cele $n - 1$ puncte $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ pe segmentul AD, astfel încît să se poată calcula suma (*); după aceasta, punînd în formula obţinută $n \to \infty$, se va găsi aria trapezului $ABCD$ (bineînţeles cu condiţia ca pentru $n \to \infty$ toate distanţele dintre punctele vecine să tindă către zero).

Aria triunghiului curbiliniu ACD (v. fig. 18, b) se va calcula fireşte la fel, deoarece triunghiul este un caz particular al trapezului.

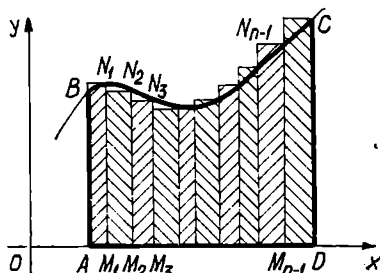


Fig. 19.

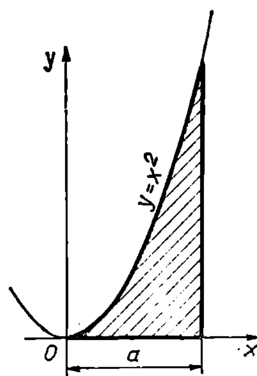


Fig. 20

---

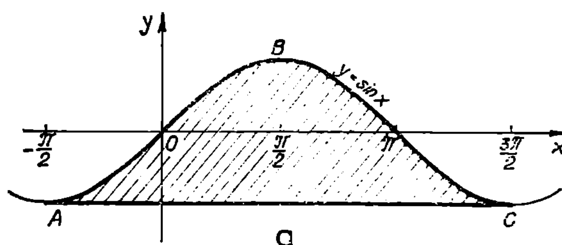
[1] Se observă că drept înălţimi ale celor n dreptunghiuri s-ar fi putut lua cu acelaşi succes segmentele $AB, M_1N_1, M_2N_2, ..., M_{n-1}N_{n-1}$; în toate problemele date mai jos este uşor de verificat direct că suma ariilor unor astfel de n dreptunghiuri, pentru $n \to \infty$, tinde către aceeaşi limită ca şi suma (*). Această limită comună va fi aria trapezului curbiliniu $ABCD$.

În problemele următoare, se consideră peste tot că numerele a și b sînt pozitive și $b > a$.

146. Să se determine aria triunghiului curbiliniu mărginit de parabola $y = x^2$, axa absciselor și dreapta $x = a$ (fig. 20).

147. a) Să se determine aria mărginită de bucla ABC a sinusoidei $y = \sin x (-\pi/2 \leqslant \leqslant x \leqslant 3\pi/2)$ și de dreapta AC (fig. 21, a).

b) Să se determine aria triunghiului curbiliniu mărginit de sinusoida $y = \sin x$, de axa absciselor și dreapta $x = a$, unde $a \leqslant \pi$ (fig. 21,b).



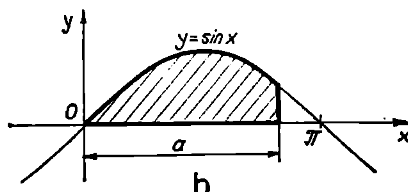


Fig. 21

*148**. a) Să se determine aria trapezului curbiliniu mărginit de parabola de gradul m, $y = x^m$, unde $m \neq -1$, de axa absciselor și de dreptele $x = a$ și $x = b$.

b) Utilizînd rezultatul problemei a), să se determine aria triunghiului curbiliniu mărginit de parabola de gradul m, $y = x^m$ $(m > 0)$, axa absciselor și dreapta $x = b$.

Următoarele patru probleme sînt consacrate calculului ariei trapezului curbiliniu, mărginit de curba $y = x^{-1} = 1/x$, axa absciselor și dreptele $x = a$ și $x = b$, adică sînt consacrate cazului $m = -1$, exclus din studiu în enunțul problemei 148, a).

149. Fie S_1 și S_2 ariile trapezelor curbilinii mărginite de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor și respectiv dreptele $x = a_1$, $x = b_1$ și $x = a_2$, $x = b_2$ (fig. 22). Să se demonstreze că, dacă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, atunci $S_1 = S_2$.

Se va determina, acum, valoarea ariei trapezului curbiliniu mărginit de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor și dreptele $x = a$ și $x = b$ (fig. 23). Conform rezultatului problemei 149, această problemă depinde doar de raportul $b/a = c$; trapezele pentru care acest raport este același au aceeași arie. Cu alte cuvinte, aria considerată este funcție de numărul $b/a = c$; o vom nota cu $F(c)$.

Evident că pentru fiecare număr z mai mare decît 1, $F(z)$ este egală cu aria trapezului curbiliniu mărginit de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor și dreptele $x = 1$ și $x = z$ (v. fig. 24, a, în care această suprafață este hașurată). Este firesc să considerăm că $F(1) = 0$; așa vom proceda în cele ce urmează.

În ceea ce priveşte numerele z mai mici decît unu, va fi comod să considerăm că pentru ele $F(z)$ este egală cu aria trapezului curbiliniu mărginit de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor şi dreptele $x = z$ şi $x = 1$ (fig. 24, *b*), luată cu semnul minus. Cu aceasta, funcţia $F(z)$ este definită pentru toate

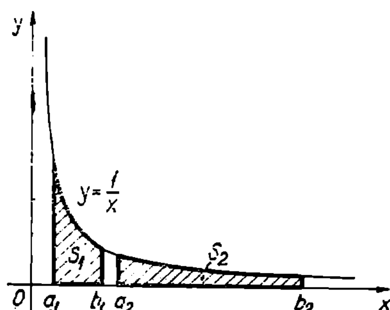


Fig. 22.

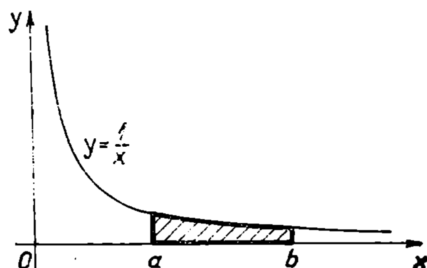


Fig. 23

valorile pozitive ale lui z; conform cu această definiţie $F(z) > 0$ pentru $z > 1$, $F(1) = 0$ şi $F(z) < 0$ pentru $z < 1$.

Următoarele trei probleme sînt consacrate studiului funcţiei $F(z)$; ele conduc la concluzia că această funcţie coincide cu funcţia logaritmică bine cunoscută din cursul de algebră elementară (pentru o anumită bază a logaritmilor, diferită de 10).

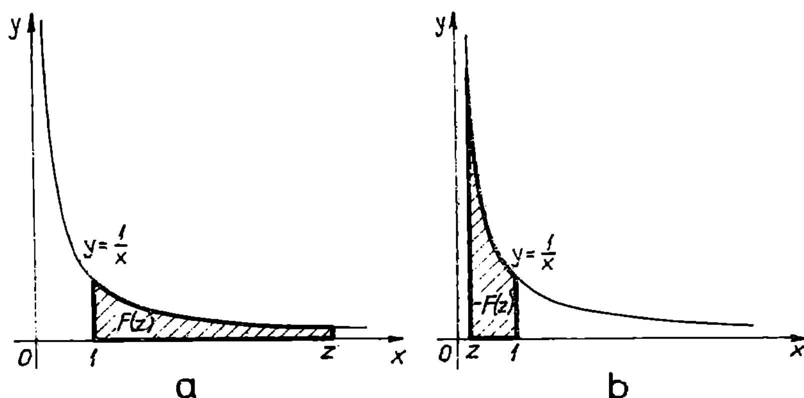


Fig. 24

150. Să se demonstreze că pentru oricare două numere pozitive z_1 şi z_2

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2).$$

151. Să se demonstreze că funcţia $F(z)$ ia valoarea 1 într-un anumit punct situat între 2 şi 3.

În cele ce urmează, valoarea lui z pentru care $F(z) = 1$ se va nota totdeauna cu litera e. Din problema 151 rezultă că $2 < e < 3$.

Numărul e joacă în matematică un rol considerabil și adesea apare în probleme diferite care la prima vedere nu sînt nicicum legate de definiția ariei „de sub hiperbolă" (v., de exemplu, problemele 156—158, 160—161 sau 78).

152. Să se demonstreze că

$$F(z) = \log_e z.$$

Deci, prin considerații geometrice, legate de calculul ariei „de sub hiperbolă", am fost conduși pe neașteptate la funcția $\log z$ cunoscută din cursul de algebră. În acest caz, baza sistemului de logaritmi nu mai este arbitrară, așa cum a fost la introducerea logaritmilor în cursul de algebră din școală: ajungem dintr-o dată la un anumit sistem de logaritmi[1)] care are ca bază un anumit număr e cuprinse între 2 și 3. Aceasta poate arunca o oarecare lumină asupra cauzei pentru care creatorii teoriei logaritmilor Neper și Briggs, care, independent unul de altul, au dezvoltat această teorie, cam în același timp, nu au luat ca bază a sistemului de logaritmi numărul 10 (ceea ce pare a fi mai simplu) ci un același număr irațional e. Neper și Briggs nu au cercetat ariile de sub hiperbolă, însă, în esență, modul lor de definire a logaritmilor este asemănător cu cel dat de noi și, la fel, conduce imediat la logaritmi în baza e (vezi [1]).

Logaritmii în baza e se numesc de obicei **logaritmi naturali** și se notează cu simbolul

$$\ln z = \log_e z.$$

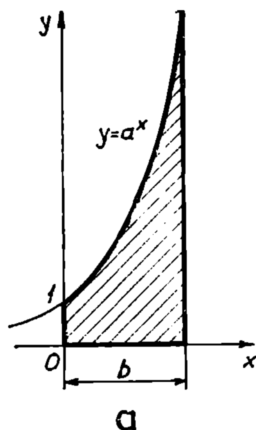
Astfel, s-a demonstrat că $F(z) = \ln z$. De aici rezultă că aria trapezului curbiliniu mărginit de hiperbola $y = 1/x$, de axa absciselor și de dreptele $x = a$ și $x = b$, unde $b > a$, este egală cu $\ln \frac{b}{a}$ (v. p. 52). Acest rezultat are aplicații multiple; prin aceasta se explică faptul că logaritmii (tocmai logaritmii naturali) apar adeseori în răspunsurile multor probleme care la prima vedere nu au nici o legătură cu funcția logaritmică (v., de exemplu, problemele 159, *c*), 162, 166, 169, 170 sau problemele 91, 98, 99).

153.* a) Să se determine aria trapezului curbiliniu mărginit de curba $y = a^x$, axa absciselor, axa ordonatelor și dreapta $x = b$ (fig. 25, *a*).

---

1) Se poate ajunge geometric și la logaritmi într-o bază diferită de e: pentru aceasta, trebuie numai ca în locul hiperbolei $y = 1/x$ să se considere hiperbola $y = c/x$, unde numărul c este diferit de unu. Astfel, luînd pentru c un anumit număr irațional egal aproximativ cu 0,4343, se obțin logaritmii în baza zece. Însă într-un astfel de procedeu, logaritmii în baza e apar deosebit de simplu și firesc (deoarece dintre toate hiperbolele de forma $y = c/x$ hiperbola $y = 1/x$ este cea mai simplă).

b) Să se determine aria triunghiului curbiliniu mărginit de curba $y = \log_a x$, de axa absciselor și de dreapta $x = b$, unde $b > 1$ (fig. 25, b).



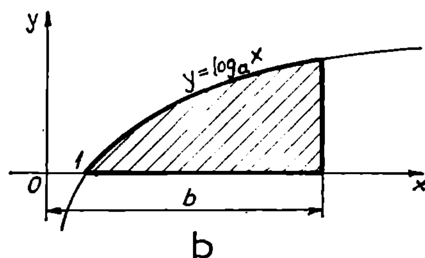


Fig. 25

*154**. **Să se determine aria trapezului curbiliniu mărginit de curba**

$$y = \frac{\log_a x}{x},$$

axa absciselor și dreapta $x = b$, unde $b > 1$ (fig. 26).

13. CÎTEVA LIMITE REMARCABILE

Problemele culese mai jos referitoare la găsirea limitelor sînt înrudite cu problemele geometrice din ciclul precedent; rezolvările acestor probleme se bazează pe rezultatele problemelor 146—154. Rezolvări pur algebrice pentru unele probleme pot fi găsite în [56].

155. Să se demonstreze că pentru $k > -1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

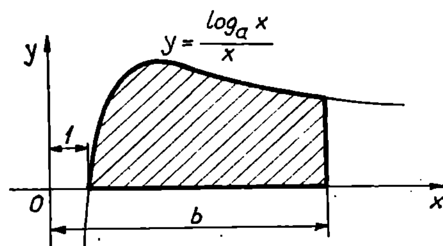


Fig. 26

Rezultatul problemei 155 arată că, pentru n mare, suma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, unde $k > -1$, are mărimea de ordinul $\frac{1}{k+1} n^{k+1}$. Aceeași sumă pentru $k = -1$ și $k < -1$ va fi studiată în problemele 162 și 164.

Mai departe, se vor mai întîlni de multe ori evaluări aproximative ale sumelor sau ale produselor, presupunînd că numărul termenilor (sau al fac-

torilor) este mare. Evaluările obținute în acest caz vor fi de două tipuri diferite. În unele cazuri, va fi găsită o expresie simplă, astfel încît d i f e r e n ț a dintre sumă și această expresie să descrească nemărginit cînd n crește, adică să tindă către zero cînd $n \to \infty$. În aceste cazuri, e r o a r e a a b s o l u t ă provenită din înlocuirea sumei cu expresia noastră va fi foarte mică pentru n mare. Cu alte cuvinte, aici suma a n termeni este a p r o x i m a t i v e g a l ă cu expresia considerată; ca semn al egalității aproximative se va utiliza semnul $\approx$.

Însă, uneori, ca de exemplu în cazul problemei 155, are loc o altă situație. Aici nu se poate afirma că pentru n mare diferența $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k - \frac{1}{k+1} n^{k+1}$ devine foarte mică. Însă r a p o r t u l $\frac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}/(k+1)}$, pentru n mare, este foarte apropiat de unu, adică înlocuind suma $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ prin expresia $n^{k+1}/(k+1)$, se comite o eroare, posibil foarte mare în valoarea absolută, însă mică în raport cu suma însăși $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ (adică e r o a r e a r e l a t i v ă în acest caz va fi mică). În asemenea cazuri, în matematică se vorbește despre e c h i v a l e n ț a a două expresii și se utilizează semnul $\sim$; astfel, rezultatul problemei 155 înseamnă că suma $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ este echivalentă cu $n^{k+1}/(k+1)$;

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \sim \frac{1}{k+1} n^{k+1}.$$

*156**. a) Să se demonstreze că șirul de numere

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

este crescător.

b) Să se demonstreze că șirul de numere

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^4, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ldots$$

este descrescător.

Din rezultatele problemelor 156, *a*) și b) rezultă ușor că șirurile de numere scrise în enunțurile acestor probleme tind către o limită (una și aceeași!). Într-adevăr, șirul de numere

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$$

conform enunțului problemei a) este crescător; în afară de aceasta, aceste numere nu pot crește nelimitat: ele sînt toate mai mici decît 4, deoarece

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4$$

(deoarece, şirul din problema b) este descrescător). Deci termenii şirului tind către o anumită limită. La fel se arată că termenii şirului $\left(1+\frac{1}{1}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^4$, ... tind către o anumită limită: acest şir este descrescător şi toate numerele care-l formează sînt mai mari decît $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$, întrucît

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{1}\right)^n.$$

Deoarece, în afară de aceasta,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

rezultă că limitele celor două şiruri coincid.

Limita comună a şirurilor din problemele 156, *a*) şi *b*) este situată între 2 şi 4; ea coincide cu numărul e, definit geometric la p. 54,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

(v. rezolvarea problemei 156).

Din rezultatele problemelor a) şi b) rezultă că pentru orice n întreg pozitiv

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

aceasta permite să determinăm numărul e cu un grad de precizie oricît de mare. Primele cîteva semne zecimale ale numărului e sînt următoarele: e = 2,7182818284590 45 ... Să mai observăm că în calculul numărului e nu folosim în mod obişnuit nu de rezultatul problemei 156, ci de seria dată mai departe în enunţul problemei 158.

*157**. Să se demonstreze că pentru orice z pozitiv sau negativ

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

unde e este limita comună a şirurilor din problemele 156, a) şi b).

Problema 157 mai poate fi formulată astfel: să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^z.$$

*158***. Să se demonstreze că

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots;$$

în particular (pentru $z = +1$ şi $z = -1$),

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

159. Să se determine valorile următoarelor limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

*161****. Să se demonstreze că pentru orice n întreg pozitiv, numărul $n!$ se află între limitele

$$\sqrt{\frac{4}{5}} e \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \cdot \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

161***. a) Să se demonstreze că raportul

$$(n!) \Big/ \left[\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$$

cînd $n \to \infty$ tinde către o anumită limită C $\Big($situată, conform rezultatului problemei precedente, între $\sqrt{\frac{4}{5}} e$ şi e, adică între 2,43 şi 2,72$\Big)$.

b) Să se demonstreze că numărul C din problema a) este egal cu $\sqrt{2\pi} \approx$ $\approx 2{,}50$ (π este raportul dintre lungimea cercului şi diametru: $\pi \approx 3{,}14$). Din rezultatul problemei 161 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1, \quad \text{adică} \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(în ceea ce priveşte semnul $\sim$ v. p. 56). Această formulă aproximativă se numeşte formula lui Stirling[1]; ea are numeroase aplicaţii în diferite probleme de matematică şi fizică. Se constată că încă pentru $n = 10$

---

[1] John Stirling (1692—1770) — matematician scoţian.

formula lui Stirling dă valoarea lui $n!$ cu o precizie foarte bună (într-adevăr $10! = 3\,628\,800$, iar cu ajutorul tabelelor de logaritmi cu cinci zecimale găsim că, cu o eroare mai mică decît a cincea cifră, $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \approx 3\,598\,700$; astfel, dacă înlocuim $10!$ cu numărul $\sqrt{20\pi}\left(\frac{10}{e}\right)^{10}$, eroarea va fi mai mică decît 1%); cînd n crește, precizia acestei formule crește repede. În același timp, tocmai pentru valori mari ale lui n calculul direct al lui $n!$ ca produsul tuturor numerelor întregi de la 1 la n devine foarte greoi. Pentru unele aplicații ale formulei lui Stirling v. observațiile la rezolvările problemelor 76, *b*), 77, a) și b).

162. Vom nota

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n=\gamma_n.$$

Să se demonstreze că:

a) pentru orice n, numărul γ_n este cuprins între 0 și 1;

b) pentru $n \to \infty$, numărul γ_n tinde către o limită determinată γ (bineînțeles cuprinsă de asemenea între 0 și 1).

Astfel, pentru valori mari ale lui n are loc egalitatea aproximativă

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln(n+1)+\gamma,$$

a cărei precizie crește odată cu n. Întrucît pentru $n \to \infty$ diferența

$$\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

tinde către zero $\left[\text{deoarece } \left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1\right]$, rezultă că și această egalitate poate fi scrisă într-o formă mai elegantă:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$$

(compară cu rezultatul problemei 169).

Numărul

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\ln n\right)$$

este esențial pentru o serie de probleme din matematica superioară (v. de exemplu, așa-numita a treia teoremă a lui Mertens, problema 170), acest număr se numește constanta lui Euler. Primele cîteva zecimale ale acestui număr sînt următoarele: $\gamma = 0{,}57721566\ldots$

*163**. a) Să se demonstreze că există un număr C astfel ca diferența

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg(n-1)}{n-1}-C\lg^2 n=\delta_n$$

să se afle pentru orice n între $-1/4$ și $+1/4$. Să se determine acest număr C.

b) Să se demonstreze că, pentru $n \to \infty$, δ_n tinde către o limită determinată (situată, de asemenea, între $-1/4$ și $+1/4$).

Astfel, pentru valori mari ale lui n este adevărată egalitatea aproximativă

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg(n-1)}{n-1}\approx C\lg^2 n+\delta$$

sau, ceea ce este același lucru (compară cu problema 162),

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg n}{n}\approx C\lg^2 n+\delta.$$

Precizia acestei egalități crește odată cu n.

Este interesant să se compare rezultatul acestei probleme cu teorema din problema 167.

164. Să se demonstreze că, pentru $l > 1$, suma

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}$$

tinde, cînd n crește nemărginit, către o limită anumită C, situată între $1/(l-1)$ și $l/(l-1)$.

Astfel, pentru n mare este adevărată egalitatea aproximativă, a cărei precizie crește odată cu n:

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}\approx C;$$

aici C este o constantă cuprinsă între limitele $\frac{1}{l-1} < C < \frac{l}{l-1}$.

Propoziția din problema 164 mai poate fi formulată și în modul următor: suma infinită

$$1+\frac{1}{2^l}+\frac{1}{3^l}+\frac{1}{4^l}+\ldots+\frac{1}{n^l}+\ldots, \qquad (*)$$

unde $l > 1$, este cuprinsă între $1/(l-1)$ și $l/(l-1)$; astfel, pentru $l = 2$ această sumă este cuprinsă între 1 și 2, iar pentru $l = 4$, între 1/3 și 4/3. [În ceea ce privește expresia exactă a sumelor seriilor $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ și $1+$

$+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ v. problemele 143, a) şi b). Pentru $l \leqslant 1$, seria (*) nu are o sumă finită; v. problemele 155 şi 162.]

14. CÎTEVA PROBLEME DIN TEORIA NUMERELOR PRIME

Teoria numerelor este o ramură a matematicii care studiază proprietăţile numerelor întregi. Un loc însemnat în teoria numerelor îl ocupă problemele legate de studiul numerelor prime (adică al numerelor care nu au alţi divizori în afară de ele înseşi şi unitatea); din acest ciclu de probleme fac parte şi problemele 165—170. Un loc central îl ocupă aici teorema lui P. L. Cebîşev (problema 166), care se referă la un număr de proprietăţi mai profunde ale teoriei numerelor (vezi [4], [57], [64], [60]).

Să observăm că, cu toată formularea lor elementară, problemele de teoria numerelor prime se referă la cele mai grele probleme din matematică; o parte dintre ele au fost rezolvate doar în ultimul timp, iar unele nu sînt rezolvate nici pînă în vremea noastră.

Numărul numerelor prime care nu sînt mai mari decît numărul N se notează cu $\pi(N)$; astfel,

$$\pi(1)=0,\ \pi(2)=1,\ \pi(3)=\pi(4)=2,\ \pi(5)=\pi(6)=3,$$

$$\pi(7)=\pi(8)=\pi(9)=\pi(10)=4,\ \pi(11)=\pi(12)=5,$$

$$\pi(13)=\pi(14)=\pi(15)=\pi(16)=6,\ldots$$

*165***. Să se demonstreze că pentru $n \to \infty$

$$\pi(N)/N \to 0.$$

*166****. T e o r e m a l u i C e b î ş e v. Să se demonstreze că se pot găsi două numere A şi B, astfel încît pentru orice N

$$A\frac{N}{\lg N} < \pi(N) < B\frac{N}{\lg N}.$$

Evident că proprietatea din problema 165 rezultă din teorema lui Cebîşev: din inegalitatea $\pi(N) < B\frac{N}{\lg N}$ rezultă că $\frac{\pi(N)}{N} \to 0$ pentru $N \to \infty$.

Teorema lui Cebîşev afirmă că numărul $\pi(N)$ al numerelor prime care nu sînt mai mari decît N are ordinul lui $N/\lg N$; această teoremă remarcabilă a constituit un prim pas în rezolvarea problemei distribuţiei numerelor prime.

Cebîşev a găsit limite destul de strînse între care poate să fie cuprins $\pi(N)$; anume, el a arătat că

$$0{,}40\frac{N}{\lg N} < \pi(N) < 0{,}48\frac{N}{\lg N}.$$

Acest rezultat capătă o formă mult mai elegantă, dacă se trece la logaritmi naturali (logaritmi în baza e = 2,718 ..., v. problemele 149—152): $\pi(N)$ este cuprins între limitele

$$0{,}92\frac{N}{\ln N} < \pi(N) < 1{,}11\frac{N}{\ln N}.$$

Astfel, se vede că variaţia funcţiei $\pi(N)$ este redată cu o mare exactitate de funcţia $N/\ln N$ (factorii numerici 0,92 şi 1,11 diferă puţin de 1). Cebîşev a demonstrat , de asemenea, că dacă raportul $\pi(N) : \frac{N}{\ln N}$ tinde, pentru $N \to \infty$, către o limită anumită, această limită este egală cu 1. Faptul că limita raportului $\pi(N) : \frac{N}{\ln N}$, pentru $N \to \infty$, există într-adevăr (şi deci, este egală cu 1), a putut fi demonstrat abia la sfîrşitul secolului trecut, adică aproximativ după 50 ani de la lucrările remarcabile ale lui P. L. Cebîşev. Prima demonstraţie a existenţei limitei raportul $\pi(N) : \frac{N}{\ln N}$ (datorită matematicianului francez J. Hadamard) a cerut utilizarea unui aparat destul de complicat, aparţinînd matematicilor superioare: demonstraţia elementară (deşi prea complicată) a fost dată pentru primă oară de matematicianul danez Selberg abia în zilele noastre.

Se obţine deci, în definitv,

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln N}.$$

*167****. Prima teoremă a lui Mertens[1]. Fie 2, 3, 5, 7, 11, ..., p toate numerele prime nu mai mari decît un număr N. Să se demonstreze că, pentru orice N, expresia:

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p}-\lg N$$

este mai mică în valoare absolută decît un anumit număr R (ca număr R poate fi luat, de exemplu, numărul 4).

Cînd N creşte nemărginit, logaritmul acestui număr va creşte şi el nemărginit: $\lg N$ va fi mai mare decît orice număr K dat dinainte, de îndată ce N va fi luat mai mare decît 10^K. Suma

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p}.$$

unde 2, 3, 5, 7, 11, ..., p sînt toate numerele prime nu mai mari decît N, de asemenea creşte nemărginit cînd N creşte nemărginit. Prima teoremă a lui

[1] F. Mertens — matematician austriac, specialist în teoria numerelor. Lucrările sale de bază datează de la sfîrşitul secolului al XIX-lea.

Mertens afirmă că diferența dintre aceste două expresii care cresc nemărginit rămîne totdeauna relativ mică: în valoare absolută, această diferență este mai mică decît numărul 4. Astfel, suma

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\frac{\lg 7}{7}+\frac{\lg 11}{11}+\ldots+\frac{\lg p}{p}$$

poate fi înlocuită, cu aproximație, prin expresia $\lg N$; în acest caz, eroarea va fi totdeauna mai mică decît numărul 4, așa că, pentru un N mare, eroarea relativă va fi foarte mică.

Din prima teoremă a lui Mertens, rezultă în particular că

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}\sim\lg N$$

(relativ la notații v. p. 56): într-adevăr, pentru $N\to\infty$

$$\frac{\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}}{\lg N}-1=$$

$$=\frac{\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 5}{5}+\ldots+\frac{\lg p}{p}-\lg N}{\lg N}\to 0.$$

168. a) Formula lui Abel[1]. Fie suma

$$S=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n,$$

unde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ sînt două șiruri oarecare de numere. Sumele b_1, b_1+b_2, $b_1+b_2+b_3, \ldots, b_1+b_2+\ldots+b_n$ le vom nota respectiv cu $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Să se demonstreze că

$$S=(a_1-a_2)B_1+(a_2-a_3)B_2+(a_3-a_4)B_3+\ldots$$
$$\ldots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n.$$

b) Aplicînd formula lui Abel, să se calculeze sumele:

1) $1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}$; 2) $1+4q+9q^2+\ldots+n^2q^{n-1}$.

*169****. A doua teoremă a lui Mertens. a) Fie 2, 3, 5, 7, 11, ..., p toate numerele prime nu mai mari decît numărul întreg N. Să se demonstreze că, pentru orice N, expresia

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}-\ln\ln N$$

[1] Nils Henrik Abel (1802—1829) — ilustru matematician norvegian, care a izbutit, în scurta sa viață, să obțină o serie de rezultate importante în algebră și în analiza matematică.

(ln N este logaritmul natural al lui N; v. p. 54) este în valoare absolută mai mică decît un anumit număr T (ca număr T se poate lua, de exemplu, numărul 15).

b) Să se demonstreze că diferența

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}-\ln\ln N$$

tinde, pentru $N \to \infty$, către o limită determinată β [1].

Astfel, are loc egalitatea aproximativă

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}\approx\ln\ln N+\beta,$$

a cărei precizie crește nemărginit odată cu N.

*170****. A treia teoremă a lui Mertens. Fie 2, 3, 5, 7, 11, ..., p toate numerele prime nu mai mari decît numărul întreg N. Să se demonstreze că există un număr c astfel încît, pentru $N \to \infty$, raportul dintre produsul

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

și numărul $c/\ln N$ să tindă către unu.

A treia teoremă a lui Mertens mai poate fi scrisă și sub formă

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{c}{\ln N}$$

(relativ la semnul $\sim$ v. p. 56). Utilizînd metode din matematica superioară se poate demonstra că valoarea constantei c este egală cu $e^{-\gamma}$, unde $e\approx 2{,}718$ este baza sistemului de logaritmi naturali (v. p. 54), iar $\gamma \approx 0{,}577$ este așa-numita constantă a lui Euler, definită în enunțul teoremei 162.

Se mai remarcă și următoarea formulă interesantă, asemănătoare cu a treia teoremă a lui Mertens:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p}\right)\sim\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\ln N$$

(2, 3, 5, 7, ..., p sînt toate numerele prime nu mai mari decît N); aici, ca și mai sus, e este baza logaritmilor naturali, γ este constanta lui Euler, iar $\pi \approx 3{,}142$ este raportul dintre lungimea cercului și diametru. Această formulă rezultă din relația

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

---

[1] Din rezultatul la problema a) rezultă că $\beta < 15$; de fapt, valoarea aproximativă a acestui număr este egală cu 0,25.

şi

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)\sim\frac{e^{-\gamma}}{\ln N}$$

(v. problema 170), iar

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\sim\frac{6}{\pi^2}$$

conform formulei lui Euler, care face obiectul problemei 143, *a*) (compară cu rezolvarea problemei 90, a)).

Cele trei teoreme ale lui Mertens (problemele 167, 169, 170), ca şi teorema Cebîşev—Hadamard (v. textul referitor la problema 166), subliniază importanta legătură dintre distribuţia numerelor prime în şirul tururor numerelor întregi şi logaritmii naturali. .

PARTEA ÎNTÎI

PROBLEME DE ANALIZA COMBINATORIE ŞI DE TEORIA PROBABILITAŢILOR

1. Deoarece cele patru puncte nu sînt coplanare, rezultă că un plan egal depărtat de aceste puncte nu poate să se afle de aceeaşi parte a tuturor acestor puncte. De aceea sînt posibile doar următoarele două cazuri: 1) trei puncte se află de o parte a planului considerat, iar al patrulea de cealaltă parte; 2) de fiecare parte a planului se află cîte două puncte.

Să cercetăm primul caz. Presupunem că punctele A, B şi C se află de aceeaşi parte a planului Π egal depărtat de punctele A, B, C şi D, iar punctul D se află de cealaltă parte (fig. 27). Punctele A, B şi C nu pot să fie coliniare; în caz contrar, toate cele patru puncte s-ar fi aflat în acelaşi plan. Deoarece planul Π este egal depărtat de punctele A, B şi C dispuse de una şi de aceeaşi parte a lui, rezultă că acest plan trebuie să fie paralel cu planul ABC. Pentru ca distanţa de la punctul D la acest plan să fie egală cu distanţa de la plan

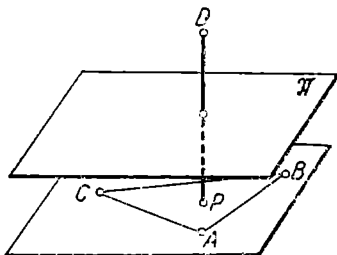


Fig. 27

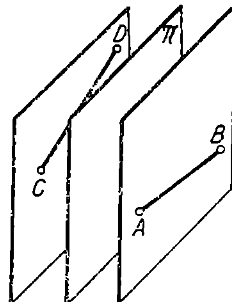


Fig. 28

la cele trei puncte A, B şi C, planul Π trebuie să treacă prin mijlocul perpendicularei DP coborîte din punctul D pe planul ABC (v. fig. 27). Deci, planul Π egal depărtat de punctele A, B, C şi D de o parte a căruia se află punctele A, B şi C, iar de cealaltă parte punctul D este determinat în mod unic.

În mod analog se determină planul egal depărtat de cele patru puncte date, de o parte a căruia se află numai punctul C (sau punctul B sau punctul A), iar de cealaltă parte celelalte trei puncte. În definitiv, există p a t r u plane egal depărtate de cele patru puncte date și care sînt astfe încît de o parte a lor se află numai un punct, iar de cealaltă parte celelalte trei.

Să cercetăm al doilea caz. Presupunem că punctele A și B se află de o parte a planului Π egal depărtat de punctele A, B, C și D, iar punctele C și D de cealaltă parte (fig. 28). Deoarece planul π este egal depărtat de punctele A și B aflate de aceeași parte a sa, rezultă că acest plan trebuie să fie paralel cu dreapta AB. La fel se demonstrează că planul Π trebuie să fie paralel cu dreapta CD. Deoarece punctele A, B, C și D nu se află în același plan, rezultă că dreptele AB și CD trebuie să fie neparalele și neconcurente. Vom duce prin dreptele AB și CD două plane paralele; evident că planul Π trebuie să fie paralel cu aceste două plane și egal depărtat de ele, adică trebuie să treacă prin mijlocul distanței dintre ele (v fig. 28). Deci, există un singur plan egal depărtat de punctele A, B, C și D, astfel încît punctele A și B să se afle de o parte a lui, iar punctele C și D de cealaltă parte.

La fel, există un singur plan egal depărtat de cele patru puncte și astfel încît de aceeași parte de care se află punctul A să se afle numai punctul C (respectiv punctul D), iar celelalte două puncte (B și D sau B și C) să fie situate de cealaltă parte. Deci, în total, există numai t r e i plane egal depărtate de patru puncte date și astfel încît de o parte a fiecăruia se află două dintre cele patru puncte, iar de cealaltă parte celelalte două.

Deci, numărul total de plane egal depărtate de patru puncte date în spațiu este $4 + 3 = 7$. [Dacă se consideră o piramidă triunghiulară (tetraedru)

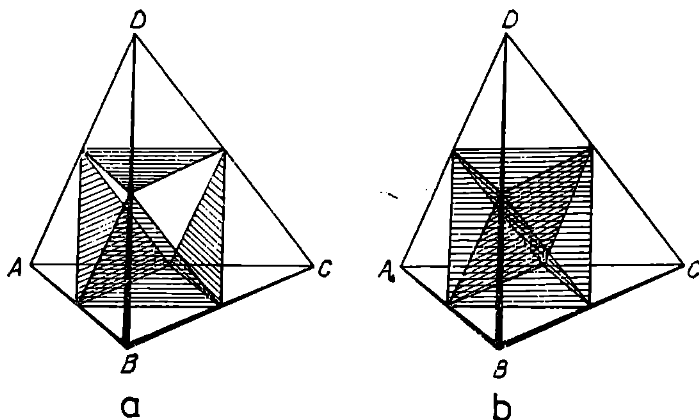


Fig. 29

cu vîrfurile în A, B, C și D, atunci patru dintre aceste șapte plane vor fi paralele cu fețele piramidei și vor trece prin mijloacele înălțimilor respective (fig. 29, *a*), iar celelalte trei vor fi paralele cu o pereche de muchii opuse fiind egal depărtate de acestea (fig. 29, *b*).]

2. Rezolvarea acestei probeleme este asemănătoare cu rezolvarea problemei 1. Deoarece punctele date A, B, C, D şi E nu se află toate pe o aceeaşi sferă (sau într-un acelaşi plan), rezultă că ele nu pot să se afle de aceeaşi parte

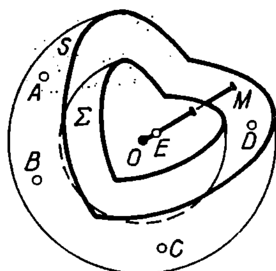


Fig. 30

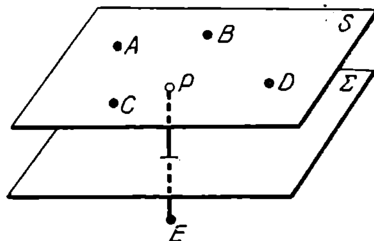


Fig. 31

a sferei (adică să fie toate interioare ori toate exterioare sferei) sau a planului, egal depărtate de aceste puncte. Deci rămîne să cercetăm numai două cazuri:

1) patru puncte se află de aceeaşi parte a sferei considerate (sau a planului considerat) Σ, iar al cincilea de cealaltă parte; 2) trei puncte se află de aceeaşi parte a sferei (planului) Σ, iar celelalte două de cealaltă parte.

Să presupunem că punctele A, B, C şi D se află de aceeaşi parte a sferei (sau a planului) Σ, iar punctul E de cealaltă parte. Punctele A, B, C şi D nu se pot afla pe un acelaşi cerc sau pe o aceeaşi dreaptă, deoarece, în acest caz, toate cele cinci puncte s-ar afla pe o aceeaşi sferă sau într-un acelaşi plan. Deci prin cele patru puncte A, B, C şi D se poate duce o singură sferă (sau plan) S. Dacă S este o sferă (fig. 30), atunci sfera Σ trebuie să fie egal depărtată de sfera S şi de punctul E, adică trebuie să fie concentrică cu S şi să treacă prin mijlocul segmentului ME, unde M este punctul de intersecţie a dreptei OE (O este centrul sferei S) cu sfera S. Dacă S este un plan (fig. 31), atunci Σ, de asemenea, va fi un plan şi anume va fi planul paralel cu S şi care trece prin mijlocul perpendicularei EP, coborîte din punctul E pe planul S. Deci, în toate cazurile, există o singură sferă (sau un singur plan) Σ egal depărtată de punctele A, B, C, D şi E şi care este astfel încît de o parte a lui Σ se află punctele A, B, C şi D, iar de cealaltă punctul E. La fel există o singură sferă (sau plan) egal depărtată de aceste cinci puncte care este astfel încît de o parte a ei se află punctul D (sau C sau B sau A), iar de cealaltă parte celelalte patru puncte. Deci, în total, există c i n c i sfere (sau plane) egal depărtate de cele cinci puncte date şi astfel încît de o parte a fiecăreia se află unul dintre cele cinci puncte, iar de cealaltă parte celelalte patru.

Să presupunem că punctele A, B, C se află de o parte a sferei (sau a planului) Σ, iar punctele D, E de cealaltă. Prin punctele A, B şi C se poate duce un singur cerc (sau o dreaptă) s. Presupunem mai întîi că s este un cerc (fig. 32).

Dacă Σ este o sferă, rezultă că centrul ei O trebuie să fie egal depărtat de punctele A, B şi C; deci, proiecţia punctului O pe planul ABC trebuie să coincidă cu centrul P al cercului s circumscris triunghiului ABC. Deci punctul O trebuie să se afle pe perpendiculara p, ridicată în punctul P pe planul ABC. Pe de altă parte, punctul O trebuie să fie egal depărtat de punctele

E și D, adică trebuie să fie situat în planul K, dus prin mijlocul segmentului DE perpendicular pe acest segment. Astfel, centrul sferei Σ nu poate fi decît punctul O aflat la intersecția planului K cu dreapta p; raza acestei sfere trebuie

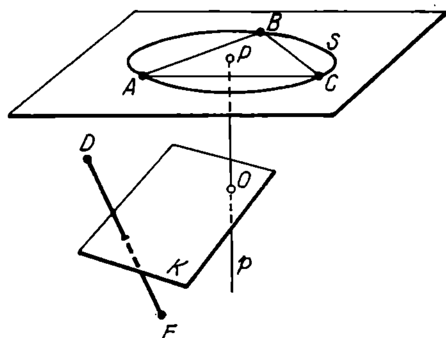


Fig. 32

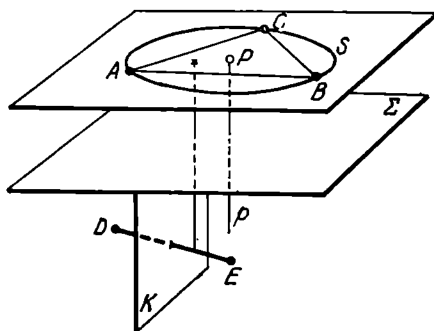


Fig. 33

să fie egală cu $(OA + OD)/2$ (sfera Σ trebuie să treacă prin mijlocul distanței dintre sferele concentrice Σ_1 și Σ_2, cu centrul în O și trecînd prin punctele A, B și C, respectiv prin D și E).

Dacă planul K nu se intersectează cu p, adică este paralel cu această dreaptă (fig. 33), segmentul DE va fi paralel cu planul ABC; în acest caz, planul Σ, paralel cu planul ABC și trecînd prin mijlocul perpendicularei coborîte dintr-un punct oarecare al segmentului DE pe acest plan, va fi egal depărtat de cele cinci puncte. Cazul în care dreapta p este situată în planul K nu este nevoie să fie cercetat, deoarece în acest caz, cum este ușor de văzut, prin cele cinci puncte A, B, C, D și E se poate duce o sferă, ceea ce contrazice condițiile problemei.

Vom presupune acum că s este o dreaptă (fig. 34). În acest caz, punctele A, B și C nu pot fi egal depărtate de o sferă dacă se găsesc toate de aceeași parte a ei. Însă, în acest caz, cele cinci puncte vor fi egal depărtate de planul Σ, care trece prin mijlocul distanței dintre cele două plane paralele duse prin dreptele neparalele și neconcurente ABC și DE; punctele A, B și C vor fi dispuse de o parte a acestui plan, iar punctele D și E de cealaltă parte.

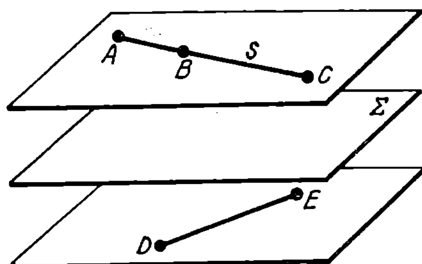


Fig. 34

Deci în toate cazurile există o singură sferă (sau un singur plan) egal depărtată de punctele A, B, C, D și E și astfel încît punctele A, B și C să fie situate de o parte a lui Σ, iar punctele D și E de cealaltă parte. La fel, există o singură sferă (sau un singur plan) egal depărtată de aceste cinci puncte și astfel încît de o parte a sa să se afle punctele E și C (sau E și B sau E și A sau D și C sau D și B sau D și A sau C și B sau C și A sau B și A), iar

de cealaltă parte celelalte trei puncte. Deci există totdeauna exact zece sfere (sau plane) egal depărtate de cinci puncte date (care nu se află pe o sferă sau într-un plan) şi astfel încît de o parte a sa să fie situate două dintre cele cinci puncte, iar de cealaltă parte celelalte trei.

Astfel, numărul total de sfere (sau plane) egal depărtate de cele cinci puncte este $5 + 10 = 15$.

3. Problema se reduce la determinarea numărului de puncte existente (centrele sferelor căutate) egal depărtate de cele patru feţe ale piramidei.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de feţele unui diedru dat este un plan care trece prin muchia diedrului şi care împarte acest unghi în jumătate, numit planul bisector al diedrului.

Deoarece două plane care se intersectează formează două perechi de diedre opuse la vîrf, rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane care se intersectează este format din două plane ce trec prin dreapta lor de intersecţie.

Locul geometric al punctelor egal depărtate de feţele unui triedru este dreapta de intersecţie a planelor bisectoare ale celor trei diedre ale triedrului, numită bisectoarea triedrului.

Deoarece trei plane care se intersectează formează patru perechi de triedre opuse la vîrf, rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de trei astfel de plane este format din patru drepte ce trec prin punctul lor de intersecţie.

Fie acum Π_1, Π_2, Π_3 şi Π_4 planele feţelor piramidei. Se consideră triedrul din interiorul piramidei format de planele Π_1, Π_2 şi Π_3. Locul geometric al punctelor egal depărtate de aceste trei feţe a unghiului considerat este format din patru drepte β_1, β_2, β_3 şi β_4. Mai departe, locul geometric al punctelor egal depărtate de planele Π_1 şi Π_4 este format din două plane B_1 şi B_2. Evident că fiecare dintre punctele de intersecţie ale uneia dintre dreptele β_1, β_2, β_3 şi β_4 cu unul dintre planele B_1 şi B_2 (şi numai aceste puncte) va fi egal depărtat de planele Π_1, Π_2, Π_3 şi Π_4. Astfel, în general, se obţin în total opt

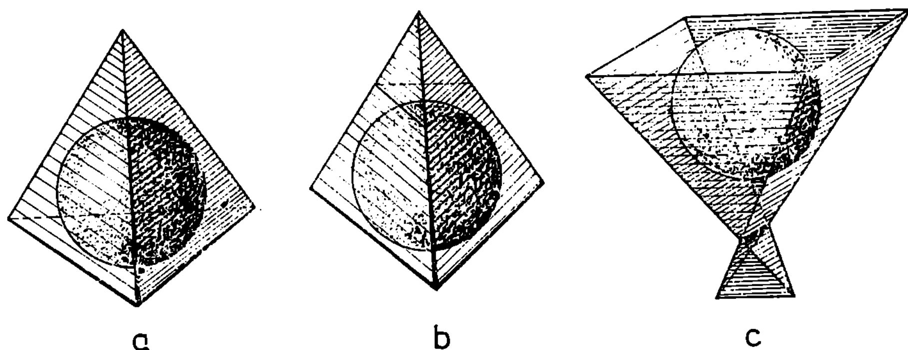


Fig. 35

puncte egal depărtate de feţele piramidei, deci opt sfere tangente la aceste feţe. Nu este greu de văzut că, dintre aceste opt sfere, una este interioară piramidei (sfera înscrisă, fig. 35, *a*), patru sînt exterioare, cîte una înlăuntrul

fiecărui triedru (sferele „exînscrise“, fig. 35, *b*) și celelalte trei înlăuntrul unghiului diedru exterior format de fețele piramidei şi în interiorul diedrului opus la vîrf diedrului opus (fig. 35, *c*).

Se observă că, în cazuri particulare, piramida triunghiulară poate să aibă mai puțin de opt sfere tangente la fețele ei. Astfel, tetraedrul regulat are numai cinci astfel de sfere (numai sfere de tipul reprezentat în fig. 35, *a* și *b*). Aceasta datorită faptului că, în diferite cazuri, unele dintre dreptele β_1, β_2, β_3 şi β_4 pot fi paralele cu unele dintre planele B_1 şi B_2.

O b s e r v a ț i e. Se poate demonstra că, dacă suma ariilor a două fețe ale piramidei triunghiulare este egală cu suma ariilor celorlalte două fețe, există numai șapte sfere tangente la toate fețele; dacă ariile fețelor sînt două cîte două egale, atunci există șase astfel de sfere; în sfîrșit, dacă toate fețele piramidei au aceeași arie (și deci sînt egale), atunci există numai cinci astfel de sfere (vezi [56], [33]).

4. Vom presupune că fețele cubului se vopsesc în verde, albastru, roșu, galben, alb şi negru. Vom aşeza cubul astfel ca fața de jos să fie verde. Acum, fața de sus poate fi vopsită cu una dintre celelalte cinci culori. Este clar că în nici unul din două moduri de vopsire în care fața de sus (adică opusă celei verzi) este acoperită cu culori diferite, fețele de aceeaşi culoare nu pot fi suprapuse printr-o rotație. Vom determina acum numărul de vopsiri în care fața de sus este acoperită cu o culoare anumită (să zicem, cu albastru); numărul total de moduri de vopsire este egal cu de cinci ori acest număr (deoarece fața de sus poate fi vopsită cu oricare dintre celelalte cinci culori).

Vom alege una dintre cele patru culori rămase după ce am folosit verdele și albastrul (să zicem, roșu) şi vom aşeza cubul astfel ca fața roșie să fie fața din spate; acest lucru poate fi obținut prin rotirea cubului în jurul axei verticale. Ne mai rămîn încă trei culori — galben, alb și negru, cu care trebuie să vopsim trei fețe (cea din față și cele două laterale). Evident, că în toate modurile de vopsire obținute astfel, fețele de aceeași culoare nu pot fi suprapuse printr-o rotație, deoarece la orice rotație sau fața de jos nu va mai fi verde sau fața din spate nu va mai fi roșie. Trei fețe pot fi vopsite cu trei culori în șase moduri diferite (cea din față poate fi vopsită cu oricare dintre cele trei culori și la fiecare astfel de vopsire mai putem alege în două moduri culoarea feței din stînga).

Deci, numărul total de moduri de vopsire, în care fețele de aceeaşi culoare nu pot fi suprapuse prin rotația cubului, este egal cu $5 \cdot 6 = 30$.

5. Cei 10 lucrători care alcătuiesc prima brigadă pot fi aleși din treizeci în $C_{30}^{10} = \frac{30 \cdot 29 \ldots 21}{10!}$ moduri. Apoi, din ceilalți 20 lucrători pot fi aleși în $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \ldots 11}{10!}$ moduri cei 10 lucrători din a doua brigadă. Asociind fiecare mod de formare a primei brigăzi cu fiecare dintre modurile de alcătuire a celei de-a doua brigăzi, vom obține în total $\frac{30 \cdot 29 \ldots 11}{(10!)^2} = \frac{30!}{(10!)^3}$ moduri de repartizare a muncitorilor în cele trei brigăzi. Aici se consideră însă ca fiind diferite și acele repartizări care se obțin una din alta schimbînd numai numerele brigăzilor; deci numărul obținut trebuie să fie împărțit la 3!, care este numă-

rul de moduri în care pot fi atribuite brigăzilor cele trei numere. Deci, numărul de moduri căutat este egal cu

$$\frac{30!}{3!(10!)^3} = 2\,775\,498\,395\,670.$$

Observație. Într-un mod cu totul analog se poate trage concluzia că din nk muncitori pot fi alcătuite în $\frac{(nk)!}{(n!)^k k!}$ moduri k brigăzi, fiecare fiind formată din n lucrători.

6. Se vor nota cele 11 sorturi de prăjituri cu $p_1, p_2, p_3, ..., p_{11}$. O prăjitură poate fi aleasă în 11 moduri. Să vedem acum în cîte moduri pot fi alese două prăjituri. Vom forma toate grupurile posibile de cîte două prăjituri, alăturînd pe rînd la fiecare sort cîte o prăjitură din toate cele 11 sorturi și apoi, separat, din nou același sort, după cum se arată în tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{lllll} p_1p_1, & p_1p_2, & p_1p_3, & ..., p_1p_{11}; & p_1p_1, \\ p_2p_1, & p_2p_2, & p_2p_3, & ..., p_2p_{11}; & p_2p_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{11}p_1, & p_{11}p_2, & p_{11}p_3, & ..., p_{11}p_{11}; & p_{11}p_{11}. \end{array}$$

Acest tabel are 11 rînduri și 12 coloane. Fiecare pereche de prăjituri figurează de două ori: perechile formate din prăjituri diferite se află în rînduri diferite ale tabelului, iar perechile formate din prăjituri identice se găsesc de două ori în același rînd. Astfel, numărul total de perechi diferite este egal cu

$$\frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

Să cercetăm acum cîte grupuri diferite de trei prăjituri pot fi formate. Vom alcătui un tabel format din 66 de rînduri corespunzînd celor 66 perechi diferite de prăjituri, alăturînd pe rînd la fiecare pereche cîte o prăjitură din toate cele 11 sorturi pe care le avem și apoi adăugînd, iarăși separat, de două ori prăjiturile din perechea considerată:

$$\begin{array}{llllll} p_1p_1p_1, & p_1p_1p_2, & p_1p_1p_3, & ..., p_1p_1p_{11}; & p_1p_1p_1, & p_1p_1p_1; \\ p_1p_2p_1, & p_1p_2p_2, & p_1p_2p_3, & ..., p_1p_2p_{11}; & p_1p_2p_1, & p_1p_2p_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{11}p_{11}p_1, & p_{11}p_{11}p_2, & p_{11}p_{11}p_3, & ..., p_{11}p_{11}p_{11}; & p_{11}p_{11}p_{11}, & p_{11}p_{11}p_{11}. \end{array}$$

Acum în tabelul care conține 66 rînduri și $11 + 2 = 13$ coloane, fiecare grup de trei prăjituri intră de trei ori. Într-adevăr, de exemplu, grupul $p_1p_2p_3$, format din trei prăjituri diferite, figurează în rîndurile corespunzătoare perechilor p_1p_2, p_1p_3 și p_2p_3; grupul $p_1p_1p_2$ figurează de două ori în rîndul corespunzător perechii p_1p_2 și o dată în rîndul corespunzător perechii p_1p_1; grupul

$p_1p_1p_1$ se găsește de trei ori în rîndul corespunzător perechii p_1p_1. În felul acesta, numărul total de grupuri posibile formate din trei prăjituri este egal cu

$$\frac{66 \cdot 13}{3} = 286.$$

Mai departe, vom forma tabelul din grupuri de cîte patru prăjituri, adăugînd pe rînd la fiecare grup de trei toate cele 11 sorturi de prăjituri și după aceea, separat, din nou prăjiturile din care este format grupul respectiv de trei; în acest tabel, format din 286 de rînduri și $11 + 3 = 14$ coloane, fiecare formație de patru prăjituri va figura de patru ori. Continuînd acest raționament, vom obține în sfîrșit că numărul căutat al formațiilor posibile de cîte șase prăjituri este egal cu

$$\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8\,008 = C_{16}^{6}.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă numărul total al sorturilor de prăjituri ar fi egal cu n, iar numărul prăjiturilor alese m, atunci ca răspuns la problema noastră am fi obținut numărul

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} = C_{n+m-1}^{m}.$$

Această expresie se numește uneori **n u m ă r u l   c o m b i n ă r i l o r   c u   r e p e t i ț i e   d e n e l e m e n t e   l u a t e   c î t e m.**

7. Conform condițiilor problemei, pentru orice grupă de cinci membri ai comisiei trebuie să există un lacăt, a cărui cheie să nu se afle la nici unul dintre acești membri (însă se află la fiecare dintre cei șase membri absenți, astfel încît prezența oricăruia dintre acești șase membri face posibilă ședința comisiei). Deci cel mai mic număr posibil de lacăte este egal cu numărul modurilor în care pot fi formate din 11 membri ai comisiei grupe de cîte cinci membri, adică este egal cu numărul combinărilor de 11 elemente luate cîte 5:

$$C_{11}^{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462.$$

Deoarece pentru fiecare lacăt trebuie să existe șase chei, rezultă că numărul total de chei va fi egal cu

$$462 \cdot 6 = 2\,772.$$

Fiecare membru al comisiei va avea $2\,772 : 11 = 252$ chei.

În acest caz, pentru ca să fie satisfăcute condițiile impuse în enunțul problemei, cheile trebuie să fie împărțite într-un anumit mod. Anume, trebuie ca cele șase chei ale fiecăruia dintre cele C_{11}^{5} lacăte să se afle la o grupă de șase membri ai comisiei și ca la fiecare grupă de șase membri să existe un lacăt, a cărui cheie să se afle la acești membri și numai la ei. Atunci ședința comisiei nu se va putea ține de îndată ce lipsesc 6 (sau mai mulți) membri ai comisiei.

Dacă numărul membrilor comisiei ar fi fost n şi s-ar fi cerut ca accesul la casă să fie posibil în prezenţa a m membri, numărul lacătelor casei ar fi trebuit să fie egal cu

$$C_n^{m-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)},$$

iar fiecare dintre membrii comisiei să aibă un număr de chei egal cu

$$\frac{m}{n}C_n^{m-1} = \frac{m(n-1)\dots(n-m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)}.$$

Rezultatul obţinut arată că un astfel de mod de păstrare a documentelor este practic irealizabil (chiar în cazul unei comisii relativ restrînse, deschiderea casei ar necesita o zi întreagă).

8. După prima rotaţie au fost tăiate toate numerele care dau restul 1 prin împărţirea cu 15; ultimul număr de acest gen va fi 991. Primul număr tăiat la a doua parcurgere va fi $991 + 15 - 1\,000 = 6$; apoi la a doua rotaţie sînt tăiate toate numerele care dau restul 6 prin împărţirea cu 15 (ultimul număr de acest gen va fi 996). Primul număr tăiat la a treia rotaţie va fi $996 + 15 - 1\,000 = 11$; mai departe la a treia rotaţie vor fi tăiate numerele care dau restul 11 prin împărţirea cu 15 (986 va fi ultimul număr de acest gen). Primul număr tăiat la a patra rotaţie va fi $986 + 15 - 1\,000 = 1$. Deoarece acest număr a fost tăiat mai înainte, rezultă că în continuare, numărînd intervale de cîte 15 numere, vom obţine mereu numere tăiate mai înainte, astfel că nu vor mai fi de tăiat numere noi.

În definitiv, vor fi tăiate astfel toate numerele şi numai acele numere care prin împărţirea cu 15 dau resturile 1, 6 şi 11. Însă numerele care dau resturile 1, 6 sau 11 prin împărţirea cu 15 sînt numerele care prin împărţirea cu 5 dau restul 1. Printre primele 1 000 numere, acestea sînt în număr de $\frac{1000}{5} = 200$ (numerele 1, 6, 11, 16, ..., $996 = 5\cdot 199 + 1$). Deci, vor rămîne netăiate $1\,000 - 200 = 800$ numere.

9. P r i m a   r e z o l v a r e. Vom calcula numărul numerelor din şirul nostru în care nu figurează cifra 1. Vom adăuga la începutul acestui şir şi numărul 0 (zero) şi vom suprima ultimul număr 10 000 000 000; vom obţine un şir de 10^{10} numere care, faţă de şirul iniţial, va conţine un număr în plus, în care nu figurează cifra 1. Vom conveni, acum, ca în şirul obţinut să adăugăm în faţa tuturor numerelor de mai puţin de 10 cifre atîtea zerouri cîte cifre lipsesc pînă la 10. Noul şir va fi format din 10^{10} numere de cîte zece cifre, începînd cu 0 000 000 000 şi sfîrşind cu 9 999 999 999. Dacă un număr din acest şir nu conţine cifra 1, aceasta înseamnă că pe primul loc în acest număr figurează una dintre celelalte nouă cifre 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Pe locul al doilea, de asemenea, trebuie să se afle una dintre aceste nouă cifre; asociind 9 valori posibile pentru prima cifră cu 9 valori pentru cea de-a doua, vom obţine în total 9^2 moduri posibile diferite pentru formarea primei perechi de cifre. La fel, pentru primele trei cifre ale numărului nostru se obţin 9^3 moduri posibile diferite, pentru primele patru cifre 9^4 moduri posibile diferite etc.; în sfîrşit, pentru primele zece cifre vom obţine 9^{10} moduri posibile diferite. Aceasta înseamnă că în şirul numerelor de la 0 000 000 000 la

9 999 999 999 există 9^{10} numere diferite, care nu conţin printre cifrele lor pe 1. Deci, în şirul de la 1 la 10 000 000 000, numărul acestor numere va fi egal cu

$$9^{10} - 1 = 3\,486\,784\,401 - 1 = 3\,486\,784\,400,$$

iar numerele în care figurează cifra 1 vor fi în număr de

$$10\,000\,000\,000 - 3\,486\,784\,400 = 6\,513\,215\,600.$$

Deci, în şirul considerat, există mai multe numere în care figurează cifra 1, decît numere care nu conţin pe 1.

R e z o l v a r e a a d o u a. Vom calcula numărul numerelor din şirul în care f i g u r e a z ă cifra 1. Vom conveni ca prin z e c e să înţelegem zece numere întregi consecutive începînd cu numărul care se termină cu zero şi terminînd cu numărul care se sfîrşeşte cu cifra 9; prin o s u t ă să înţelegem o sută de numere întregi consecutive începînd cu numărul care se termină cu două zerouri şi terminînd cu numărul care se sfîrşeşte cu doi de nouă; prin o m i e să înţelegem o mie de numere întregi consecutive începînd cu numărul care se termină cu trei de zero şi terminînd cu numărul care se sfîrşeşte cu trei de nouă etc. Pentru ca prima zece, prima sută, prima mie etc. să fie completă, vom mai adăuga la începutul şirului nostru de numere şi cifra 0.

În prima zece se află un singur număr în care figurează unitatea, acesta este numărul 1. Tot atîtea numere care conţin pe 1 se vor afla în oricare altă zece din prima sută, în afară de a doua — a doua zece (numerele de la 10 la 19) este în întregime formată din numere care conţin pe 1. Deci prima sută conţine

$$9 \cdot 1 + 10$$

numere, în care figurează cifra 1.

Tot atîtea numere conţinînd pe 1 se află şi în oricare altă sută din prima mie, în afară de a doua — a doua sută este formată în întregime din numere care conţin pe 1. Deci, în prima mie există

$$9(9 \cdot 1 + 10) + 100 = 9^2 + 9 \cdot 10 + 10^2$$

numere în care figurează cifra 1.

În fiecare mie din primele zece mii, în afară de a doua, vor exista tot atîtea numere conţinînd pe 1, iar a doua mie va fi în întregime compusă din astfel de numere. Astfel, printre primele 10 000 de numere vor exista

$$9(9^2 + 9 \cdot 10 + 10^2) + 1\,000 = 9^3 + 9^2 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + 10^3$$

numere care conţin printre cifrele lor pe 1.

Continuînd acest raţionament, vom arăta uşor că printre primele 10 000 000 000 de numere de la 0 la 9 999 999 999 există

$$9^9 + 9^8 \cdot 10 + 9^7 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^8 + 10^9$$

numere, în care figurează cifra 1. Această sumă se calculează ușor ca sumă a termenilor progresiei geometrice

$$9^9 + 9^8 \cdot 10 + 9^7 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^8 + 10^9 = \left(10^9 \cdot \frac{10}{9} - 9^9\right) \Big/ \left(\frac{10}{9} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{10^{10}}{9} - 9^9\right) \Big/ \frac{1}{9} = 10^{10} - 9^{10}.$$

Dar în șirul numerelor de la 1 la 10 000 000 000 care conțin pe 1 se află unul în plus, adică

$$10^{10} - 9^{10} + 1 = 6\,513\,215\,600.$$

Acest rezultat, firește, coincide cu cel obținut în prima soluție. El arată că, în acest șir sînt mai multe numere care conțin cifra 1 decît numere care nu conțin pe 1.

10. Evident că printre primele 222 222 222 numere întregi vor fi 22 222 222 numere care se termină cu zero (numerele 10, 20, 30, ..., 222 222 220). Mai departe, printre aceste numere vor fi 2 222 222 numere care se termină cu cifrele 00 (numerele 100, 200, 300, ... , 222 222 200); 2 222 222 numere care se termină cu cifrele 01 (numerele 101, 201, 301, ..., 222 222 201); 2 222 222 numere care se termină cu 02; 2 222 222 numere care se termină cu cifrele 03 etc., în sfîrșit, 2 222 222 numere care se termină cu cifrele 09. Deci în șirul numerelor de la 1 la 222 222 222, cifra 0 va ocupa penultimul loc de $2\,222\,222 + 2\,222\,222 + \ldots + 2\,222\,222 = 10 \cdot 2\,222\,222 = 22\,222\,220$ ori.

În mod analog, printre primele 222 222 222 numere vor fi 222 222 numere care se termină cu cifrele 000; 222 222 numere care se termină cu cifrele 001 etc., în sfîrșit, 222 222 numere, care se termină cu cifrele 099. În consecință, cifra 0 va ocupa locul al treilea de la coadă la $100 \cdot 222\,222 = 22\,222\,200$ ori. Mai departe se arată la fel că cifra 0 va ocupa locul al patrulea de la coadă de $1\,000 \cdot 22\,222 = 22\,222\,000$ ori; locul al cincilea de la coadă de $10\,000 \cdot 2\,222 = 22\,220\,000$ ori; locul al șaselea de la coadă de $100\,000 \cdot 222 = 22\,200\,000$ ori; locul al șaptelea de la coadă de $1\,000\,000 \cdot 22 = 22\,000\,000$ ori; în sfîrșit locul al optelea de la coadă de $10\,000\,000 \cdot 2 = 20\,000\,000$ ori. Deci cifra 0 apare în total de

$$22\,222\,222 + 22\,222\,220 + 22\,222\,200 + 22\,222\,000 +$$

$$+ 22\,220\,000 + 22\,200\,000 + 22\,000\,000 + 20\,000\,000 = 175\,308\,642$$

ori.

11. a) În total sînt 999 de numere mai mici decît 1 000 (numerele 1, 2, 3, ..., 999). Din șirul acestora, vom tăia numerele divizibile cu 5; avem în total astfel de numere $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$ (numerele 5, 10, 15, 20, ..., 995 = $= 199 \cdot 5$). Vom tăia apoi toate numerele divizibile cu 7; există $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$

astfel de numere (numerele 7, 14, 21, 28, ..., 994 = 142 · 7). Însă printre numerele divizibile cu 7 există $\left[\frac{999}{35}\right] = 28$ numere care se divid şi cu 5 (adică, care se divid cu 5 · 7 = 35); acestea sînt numerele 35, 70, 105, ..., 980 = = 28 · 35. Aceste 28 numere vor fi tăiate de două ori (şi la tăierea numerelor divizibile cu 5 şi la tăierea numerelor divizibile cu 7). Deci, în total, vor fi tăiate 199 + 142 — 28 = 313 numere. Astfel, printre numerele mai mici decît 1 000 vor rămîne netăiate 999 — 313 = 686 numere; acestea sînt chiar numerele prime şi cu 5 şi cu 7.

b) Vom tăia din nou toate numerele care se divid cu 5 şi toate numerele care se divid cu 7; cu aceasta vom tăia 313 numere (problema 11, *a*)). Vom tăia apoi toate numerele care se divid cu 3; există $\left[\frac{999}{3}\right] = 333$ astfel de numere. Însă printre aceste numere figurează şi toate numerele care sînt divizibile şi cu 5 sau cu 7, adică divizibile cu 15 sau cu 21 şi care au mai fost tăiate înainte. Dintre numerele mai mici decît 1 000 cu 15 se divid $\left[\frac{999}{15}\right] = 66$ numere, iar cu 21 se divid $\left[\frac{999}{21}\right] = 47$ numere. Însă $\left[\frac{999}{105}\right] = 9$ dintre aceste numere se divid şi cu 15 şi cu 21 (105 este cel mai mic multiplu comun al numerelor 15 şi 21) şi deci printre 66 numere divizibile cu 15 şi printre 47 numere divizibile cu 21 există 9 numere comune. De aceea dintre cele 333 numere divizibile cu 3 au fost tăiate mai înainte 66 + 47 — 9 = 104 numere, adică ultima dată vom mai tăia încă 333 — 104 = 229 numere. Deci, numărul total de numere netăiate (adică prime şi cu 3 şi cu 5 şi cu 7) este egal cu 686 — 229 = 457.

Observaţie. Raţionînd la fel ca la rezolvarea problemei 11, nu este greu de demonstrat că numărul numerelor mai mici decît un număr N şi care nu se divid cu nici unul dintre numerele $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n$, prime două cîte două, este egal cu

$$N - \left[\frac{N}{p_1}\right] - \left[\frac{N}{p_2}\right] - \ldots - \left[\frac{N}{p_n}\right] + \left[\frac{N}{p_1p_2}\right] + \left[\frac{N}{p_2p_3}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p_{n-1}p_n}\right] -$$

$$- \left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right] - \ldots - \left[\frac{N}{p_{n-2}p_{n-1}p_n}\right] + \ldots + (-1)^n \left[\frac{N}{p_1p_2 \cdots p_n}\right]$$

(compară cu prima soluţie a problemei 78, a)).

12. Problema este analoagă cu precedenta. Descompunerea numărului 56 700 000 în factori are forma 56 700 000 = $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7$. Problema se reduce deci la a stabili cîte dintre numerele mai mici decît 56 700 000 nu sînt divizibile cu 2, 3, 5 şi 7.

Se va scrie şirul numerelor de 1 la 56 700 000. Vom tăia din acest şir toate numerele divizibile cu 2 $\left(\text{numărul lor este egal cu } \frac{1}{2} \cdot 56\,700\,000 = 28\,350\,000\right)$; toate numerele divizibile cu 3 (numărul lor este egal cu

$\left.\frac{1}{3}\cdot 56\,700\,000 = 18\,900\,000\right)$; toate numerele divizibile cu 5 $\left(\text{numărul lor este egal cu } \frac{1}{5}\cdot 56\,700\,000 = 11\,340\,000\right)$; toate numerele divizibile cu 7 $\left(\text{numărul lor este egal cu } \frac{1}{7}\cdot 56\,700\,000 = 8\,100\,000\right)$. Numărul tuturor acestor numere este egal cu

$$28\,350\,000 + 18\,900\,000 + 11\,340\,000 + 8\,100\,000 = 66\,690\,000.$$

Printre aceste 66 690 000 numere există

$\frac{1}{2\cdot 3}\cdot 56\,700\,000 = 9\,450\,000$ numere divizibile cu 2 și cu 3;

$\frac{1}{2\cdot 5}\cdot 56\,700\,000 = 5\,670\,000$ numere divizibile cu 2 și cu 5;

$\frac{1}{2\cdot 7}\cdot 56\,700\,000 = 4\,050\,000$ numere divizibile cu 2 și cu 7;

$\frac{1}{3\cdot 5}\cdot 56\,700\,000 = 3\,780\,000$ numere divizibile cu 3 și cu 5;

$\frac{1}{3\cdot 7}\cdot 56\,700\,000 = 2\,700\,000$ numere divizibile cu 3 și cu 7;

$\frac{1}{5\cdot 7}\cdot 56\,700\,000 = 1\,620\,000$ numere divizibile cu 5 și cu 7.

Toate aceste numere apar de două ori în suma formată cu toate numerele divizibile cu 2 sau cu 3 sau cu 5 sau cu 7. Deci numărul total al acestor numere, egal cu

$$9\,450\,000 + 5\,670\,000 + 4\,050\,000 + 3\,780\,000 + 2\,700\,000 +$$
$$+ 1\,620\,000 = 27\,270\,000,$$

trebuie să fie scăzut din suma obținută mai sus:

$$66\,690\,000 - 27\,270\,000 = 39\,420\,000.$$

În diferența 66 690 000—27 720 000 intră evident, cîte o singură dată toate numerele divizibile numai printr-unul din factorii 2, 3, 5 și 7 și cîte o singură dată numerele divizibile cu doi dintre acești factori (primele se consideră o singură dată în descăzut; celelalte se consideră de două ori în descăzut și o singură dată în scăzător). Vom stabili acum de cîte ori este considerat în această diferență un număr divizibil prin trei din acești factori, de exemplu, divizibil cu 2, 3 și 5. Acest număr apare de trei ori în descăzut (printre numerele care se divid cu 2, printre numerele care se divid cu 3 și printre numerele care se divid cu 5) și de 3 ori în scăzător (printre numerele care

se divid cu 2 și cu 3, printre numerele care se divid cu 2 și cu 5 și printre numerele care se divid cu 3 și cu 5). Deci toate numerele care se divid cu trei oarecare dintre cei patru factori 2, 3, 5 și 7 nu apar deloc în diferența noastră și trebuie să adăugăm la diferență numărul total al acestor numere. Numărul total al acestor numere (care nu sînt mai mari decît 56 700 000), evident, este egal cu

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot5}\cdot 56\,700\,000+\frac{1}{2\cdot3\cdot7}\cdot 56\,700\,000+\frac{1}{2\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000+$$

$$+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000=1\,890\,000+1\,350\,000+810\,000+540\,000=4\,590\,000;$$

obținem astfel

$$66\,690\,000-27\,270\,000+4\,590\,000=44\,010\,000.$$

În expresia $66\,690\,000-27\,270\,000+4\,590\,000$ sînt considerate o singură dată toate numerele divizibile printr-unul din factorii 2, 3, 5 și 7; divizibile prin doi din acești factori; divizibile prin trei din acești factori. Vom arăta acum de cîte ori apar în această expresie numerele divizibile în același timp cu 2, cu 3, cu 5 și cu 7. Ele figurează evident de patru ori în primul termen 66 690 000 (ca fiind divizibile și cu 2 și cu 3 și cu 5 și cu 7); de șase ori în al doilea termen 27 270 000 (ca fiind divizibile cu 2 și cu 3; cu 2 și cu 5; cu 2 și cu 7; cu 3 și cu 5; cu 3 și cu 7; cu 5 și cu 7; de patru ori în ultimul termen (ca fiind divizibile cu 2, cu 3 și cu 5; cu 2, cu 3 și cu 7; cu 2, cu 5 și cu 7; cu 3, cu 5 și cu 7). Înseamnă că în expresia noastră aceste numere sînt considerate în total de $4-6+4=2$ ori, deci trebuie scăzut și numărul lor, egal cu $\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\cdot 56\,700\,000=270\,000$:

$$66\,690\,000-27\,270\,000+4\,590\,000-270\,000=43\,740\,000.$$

Astfel, între 1 și 56 700 000 există 43 740 000 numere care sînt divizibile cu cel puțin unul dintre factorii 2, 3, 5 sau 7. Deci numerele care nu se divid cu nici unul dintre acești factori (prime cu numărul 56 700 000) vor fi în număr de

$$56\,700\,000-43\,740\,000=12\,960\,000.$$

Observație. La fel se demonstrează că, dacă descompunerea numărului N în factor primi este de forma

$$N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\dots p_k^{a_k},$$

atunci numărul $\varphi(N)$ al numerelor mai mici decît N și prime cu acestea este egal cu

$$\varphi(N)=N-\frac{N}{p_1}-\frac{N}{p_2}-\dots-\frac{N}{p_k}+\frac{N}{p_1p_2}+\frac{N}{p_2p_3}+\dots+\frac{N}{p_{k-1}p_k}-$$

$$-\frac{N}{p_1p_2p_3}-\dots-\frac{N}{p_{k-2}p_{k-1}p_k}+\dots+(-1)^k\frac{N}{p_1p_2\dots p_k}=N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

(compară cu observația de la problema 11, b)).

13. $2^0 = 1$ dă restul 1 prin împărțirea la 7, $2^1 = 2$ dă restul 2, $2^2 = 4$ dă restul 4, 2^3 dă din nou restul 1, 2^4 dă din nou restul 2, 2^5 dă din nou restul 4, 2^6 dă a treia oară restul 1 etc. Așadar, la împărțirea lui 2^x prin 7 se pot obține ca resturi numai numerele 1, 2 și 4, iar aceste resturi se repetă periodic în ordinea următoare: 1, 2, 4; 1, 2, 4; 1, 2, 4; ...

Vom reprezenta acum pe x sub forma $x = 7t + s$, unde $s < 7$. Atunci resturile împărțirii lui x^2 la 7 vor fi egale cu resturile împărțirii lui s^2 la 7. Dacă s ia valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6, atunci resturile împărțirii lui s^2 la 7 vor fi respectiv numerele 0, 1, 4, 2, 2, 4 și 1. Deci, resturile împărțirii lui x^2 prin 7 pot fi numai numerele 0, 1, 4 și 2, iar aceste resturi se repetă periodic în ordinea următoare: 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Deoarece resturile împărțirii lui 2^x la 7 se repetă periodic din 3 în 3 valori ale lui x iar resturile împărțirii lui x^2 la 7 se repetă periodic din 7 în 7 valori ale lui x, resturile împărțirii lui $2^x - x^2$ la 7 se vor repeta periodic din 21 în 21 valori ale lui x. Vom scrie unele sub altele primele 21 resturi ale împărțirii lui 2^x și x^2 prin 7:

$$1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4\ 1\ 2\ 4$$

$$0\ 1\ 4\ 2\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ 4\ 2\ 2\ 4\ 1\ 0\ 1\ 4\ 2\ 2\ 4\ 1.$$

Se vede de aici că resturile împărțirii lui 2^x și x^2 prin 7 coincid de 6 ori pentru primele 21 valori ale lui x (pentru $x = 2, 4, 5, 6, 10, 15$). Deci, printre numerele $2^x - x^2$, unde $x = 0, 1, 2, ..., 20$, există șase numere care se împart la 7 fără rest.

Deoarece $10\,000 = 21 \cdot 476 + 4$, printre numerele mai mici decît 10 000 există 476 intervale întregi de cîte 21 de numere. De aici rezultă că pentru x nu mai mare decît $9\,996 = 21 \cdot 476$, numărul $2^x - x^2$ se divide cu 7 exact de $476 \cdot 6 = 2\,856$ ori. Cele trei numere care au mai rămas, mai mici decît 10 000, dau resturile 1, 2 și 3 prin împărțirea la 21; deci unul dintre aceste numere (anume 9 998) dă a 2 857-a valoare a lui x pentru care $2^x - x^2$ se împarte la 7 fără rest. Deci, în total, există $2\,856 + 1 = 2\,857$ numere x mai mici decît 10 000 pentru care diferența $2^x - x^2$ este divizibilă cu 7. Pentru celelalte $9\,999 - 2\,857 = 7\,142$ numere x mai mici decît 10 000, expresia $2^x - x^2$ nu este divizibilă cu 7.

14. Dacă $x^2 + y^2$ se divide cu 49, atunci $x^2 + y^2$ se divide și cu 7. Însă x^2 poate da prin împărțirea cu 7 numai resturile 0, 1, 4 sau 2 (v. rezolvarea problemei 13). Restul împărțirii lui $x^2 + y^2$ prin 7 este egal cu suma resturilor împărțirii numerelor x^2 și y^2 prin 7. Însă este ușor de verificat că dintre toate sumele a două dintre numerele 0, 1, 4 și 2 (cele două numere putînd fi egale sau diferite) numai suma $0 + 0 = 0$ se divide la 7. Deci $x^2 + y^2$ este divizibilă cu 7 atunci și numai atunci cînd și x^2 și y^2 se divid la 7, adică atunci cînd și x și y se divid la 7. Pe de altă parte, dacă x și y sînt două numere divizibile cu 7, suma $x^2 + y^2$ este divizibilă cu 49. Astfel, numărul căutat este numărul perechilor diferite de numere întregi pozitive x și y, mai mici decît 1 000, care sînt divizibile cu 7. Dar $1\,000 = 7 \cdot 142 + 6$, deci există 142 multipli de 7 mai mici decît 1 000. Asociind fiecare dintre cele 142 numere x cu fiecare dintre cele 142 numere y, vom obține în total 142^2 perechi x, y. Dar printre aceste perechi 142 sînt formate din numere identice; fiecare dintre celelalte perechi

a fost considerată de două ori: o dată ca pereche x, y şi a doua oară ca pereche y, x. Deci, numărul perechilor diferite x, y este egal cu

$$\frac{142^2 - 142}{2} + 142 = \frac{142 \cdot 143}{2} = 10\,153.$$

15. Deoarece $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$, orice divizor al său este de forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ şi descompunerea unui milion în trei factori este de forma

$$1\,000\,000 = (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1})\,(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2})\,(2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3});$$

aici α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 sînt numere întregi nenegative care verifică egalităţile

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6, \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6.$$

Vom calcula cîte astfel de sisteme α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 există.

Dacă $\alpha_1 = 6$, α_2 şi α_3 trebuie să fie egale cu 0; astfel, în acest caz, avem un singur sistem de numere α_1, α_2, α_3.

Dacă $\alpha_1 = 5$, sînt posibile două sisteme:

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0 \quad \text{şi} \quad \alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1.$$

Dacă $\alpha_1 = 4$, sînt posibile trei sisteme:

$$\alpha_1 = 4, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = 0; \quad \alpha_1 = 4, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = 1; \quad \alpha_1 = 4, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 2.$$

La fel se demonstrează că dacă $\alpha_1 = 3$, sînt posibile patru sisteme; dacă $\alpha_1 = 2$, sînt posibile cinci sisteme; dacă $\alpha_1 = 1$, sînt posibile şase sisteme şi dacă $\alpha_1 = 0$, sînt posibile şapte sisteme. Deci numărul total de sisteme de numere α_1, α_2, α_3 care verifică egalitatea $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$ este egal cu

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

La fel, există 28 sisteme diferite de numere β_1, β_2, β_3 care verifică egalitatea $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6$. Deoarece în descompunerea numărului 1 000 000 în trei factori putem combina orice grup de trei numere α_1, α_2, α_3 cu orice grup de trei numere β_1, β_2, β_3, numărul total de descompuneri este egal cu

$$28 \cdot 28 = 784.$$

În acest calcul, descompunerile care diferă doar prin ordinea factorilor au fost considerate ca diferite, adică unele descompuneri au fost considerate de mai multe ori.

Să determinăm de cîte ori a fost considerată fiecare descompunere.

1) O singură descompunere şi anume

$$10^6 = (2^2 \cdot 5^2)\,(2^2 \cdot 5^2)\,(2^2 \cdot 5^2)$$

a fost considerată numai o dată.

2) Dacă în descompunerea lui 10^6 în trei factori, doi dintre ei sînt egali (iar al treilea diferit), o astfel de descompunere a fost considerată de trei ori:

factorul neegal cu ceilalți poate să ocupe în produs primul, al doilea sau al treilea loc.

Să calculăm numărul unor astfel de descompuneri. Presupunem că factorul care apare în descompunere de două ori este de forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ (adică descompunerea este de forma $10^6 = (2^\alpha \cdot 5^\beta) \cdot (2^\alpha \cdot 5^\beta)\ (2^{6-2\alpha} \cdot 5^{6-2\beta})$; atunci α poate fi egal cu 0, 1, 2 sau 3, iar β poate fi de asemenea egal cu 0, 1, 2 sau 3. Deoarece orice α poate fi asociat cu orice β, numărul total de grupări posibile este egal cu $4 \cdot 4 = 16$. Dintre acestea, trebuie înlăturată gruparea $\alpha = 2$, $\beta = 2$, deoarece în acest caz obținem descompunerea

$$10^6 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2^2 \cdot 5^2),$$

găsită mai înainte. Astfel, au fost considerate de trei ori 15 descompuneri.

3) Celelalte descompuneri au fost considerate de șase ori. Într-adevăr, dacă toți cei trei factori sînt diferiți între ei, următoarele șase descompuneri diferă doar prin ordinea factorilor:

$$(2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}); \quad (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_2});$$

$$(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}); \quad (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1});$$

$$(2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}); \quad (2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}) \cdot (2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}) \cdot (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}).$$

Deci numărul total de descompuneri diferite ale unui milion în trei factori este egal cu

$$1 + 15 + \frac{784 - 15 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{6} = 1 + 15 + \frac{738}{6} = 1 + 15 + 123 = 139.$$

16. Descompunerea numărului 86 400 000 în factori primi este de forma

$$86\,400\,000 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^5.$$

Deci toți divizorii săi sînt de forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, unde α este un număr întreg nenegativ, nu mai mare decît 10, β este un număr întreg nenegativ nu mai mare decît 3, iar γ este un număr întreg nenegativ nu mai mare decît 5. Deci pentru α există 11 valori posibile (anume 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), pentru β sînt patru valori posibile, iar pentru γ șase valori posibile. Deoarece atunci cînd formăm divizori putem asocia între ele toate valorile posibile ale exponenților α, β și γ (printre divizori considerăm numărul dat și numărul 1), atunci *numărul* tuturor divizorilor este egal cu

$$11 \cdot 4 \cdot 6 = 264.$$

Să determinăm acum *suma* tuturor divizorilor. Pentru aceasta vom calcula mai întîi suma s_1 a tuturor divizorilor de forma 2^α:

$$s_1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2\,047.$$

Se observă că suma divizorilor de forma $2^\alpha \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$, unde β_1 și γ_1 sînt numere fixe, iar α parcurge toate valorile posibile, este egală cu $s_1 \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ (deoarece

în sumă putem scoate în factor pe $3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$). Deci suma tuturor divizorilor numărului 86 400 000 este egală cu produsul dintre 2 047 și suma tuturor divizorilor numărului $3^3 \cdot 5^5$ (deoarece toți divizorii lui 86 400 000 de forma $3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ sînt divizori ai numărului $3^3 \cdot 5^5$).

În mod analog se poate demonstra că suma tuturor divizorilor numărului $3^3 \cdot 5^5$ este egală cu produsul dintre suma s_2 a tuturor divizorilor acestui număr care sînt de forma 3^β și suma s_3 a tuturor divizorilor numărului 5^5. Însă

$$s_2 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = \frac{81 - 1}{2} = 40,$$

$$s_3 = 5^0 + 5^1 + \ldots + 5^5 = \frac{5^6 - 1}{5 - 1} = \frac{15\,625 - 1}{4} = 3\,906.$$

În consecință, suma tuturor divizorilor numărului 86 400 000 este egală cu

$$s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 = 2\,047 \cdot 40 \cdot 3\,906 = 319\,823\,280.$$

Vom mai da o variantă a acestei rezolvări. Fie a și b două numere **prime între ele**. În acest caz, evident, orice divizor al numărului ab este egal cu produsul dintre un divizor al numărului a și un divizor al numărului b. De aici este ușor de dedus că numărul $n(N)$ al tuturor divizorilor numărului N și suma $s(N)$ a tuturor divizorilor au următoarele proprietăți: **dacă a și b sînt două numere prime între ele**, atunci

$$n(a \cdot b) = n(a) \cdot n(b) \quad \text{și} \quad s(a \cdot b) = s(a) \cdot s(b)$$

[datorită acestei proprietăți, în teoria numerelor $n(N)$ și $s(N)$ se numesc **funcții multiplicative** de numărul N[1]]. Deoarece numărul divizorilor numerelor $2^{10}, 3^3$ și 5^5 este respectiv egal cu 11, 4 și 6, iar suma tuturor divizorilor acelorași numere este 2 047, 40 și 3 906, obținem

$$n(86\,400\,000) = 11 \cdot 4 \cdot 6 = 264;$$

$$s(86\,400\,000) = 2\,047 \cdot 40 \cdot 3\,906 = 319\,823\,280.$$

Observație. La fel se demonstrează că, dacă descompunerea numărului n în factori primi este de forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

numărul divizorilor săi este egal cu

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1),$$

iar suma acestor divizori este egală cu

$$\left(\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}\right) \ldots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}\right).$$

17. Descompunerea numărului 59 400 000 în factori primi este de forma

$$59\,400\,000 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 11.$$

---

[1] Un alt exemplu de funcție multiplicativă de numărul N este **funcția lui Euler** $\varphi(N)$, adică numărul numerelor mai mici decît N și prime cu N (v. observația de la rezolvarea problemei 12).

Deci, dacă cel mai mic multiplu comun a două numere A și B este egal cu 59 400 000, trebuie să avem

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \cdot 11^{\delta_1}, \quad B = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \cdot 11^{\delta_2}.$$

Trebuie să avem

$$\alpha_1 \leqslant 6, \ \alpha_2 \leqslant 6, \ \max(\alpha_1, \alpha_2) = 6; \quad \beta_1 \leqslant 3, \ \beta_2 \leqslant 3, \ \max(\beta_1, \beta_2) = 3;$$

$$\gamma_1 \leqslant 5, \ \gamma_2 \leqslant 5, \ \max(\gamma_1, \gamma_2) = 5; \quad \delta_1 \leqslant 1, \ \delta_2 \leqslant 1, \ \max(\delta_1, \delta_2) = 1;$$

unde $\max(a, b)$ înseamnă cel mai mare dintre cele două numere a și b.

Aceste condiții sînt verificate de 13 perechi posibile de valori ale lui α_1, α_2 ($\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $\alpha_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\alpha_2 = 6$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$); sînt verificate de 7 perechi posibile de valori ale lui β_1, β_2 ($\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 0, 1, 2$; $\beta_1 = 0, 1, 2$, $\beta_2 = 3$; $\beta_1 = \beta_2 = 3$); de 11 perechi posibile de valori ale lui γ_1, γ_2 ($\gamma_1 = 5$, $\gamma_2 = 0, 1, 2, 3, 4$; $\gamma_1 = 0, 1, 2, 3, 4$, $\gamma_2 = 5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$) și de 3 perechi posibile de valori ale lui δ_1, δ_2 ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$; $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$; $\delta_1 = \delta_2 = 1$). Asociind toate aceste valori, vom obține în total

$$13 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3 = 3\,003$$

perechi de numere A, B. Dar în calculul nostru două perechi de numere care diferă numai prin ordinea lor au fost considerate ca diferite. Deci fiecare pereche de numere care au pe 59 400 000 ca cel mai mic multiplu comun a fost considerată de două ori *în afară de perechea* $A = B = 59\,400\,000$. Deci numărul perechilor de numere A, B esențial diferite va fi egal cu

$$\frac{3\,003 - 1}{2} + 1 = 1\,502.$$

Observație. La fel se demonstrează că, dacă descompunerea numărului N în factori primi este de forma

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

numărul m al tuturor perechilor posibile de numere întregi, al căror cel mai mic multiplu comun este egal cu N, poate fi calculat cu formula

$$m = \frac{(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \ldots (2\alpha_k + 1) - 1}{2} + 1.$$

18. Va fi luat trinomul $1 + x^5 + x^7$ de 20 ori ca factor și se va efectua produsul după regulile cunoscute. Fiecare termen al sumei astfel obținute va fi produsul a 20 factori egali sau cu 1, sau cu x^5, sau cu x^7. Esențial este faptul că, în aceste produse de cîte douăzeci de factori, pe fiecare dintre cele 20 de locuri poate figura oricare dintre cei trei factori: termenii sumei vor fi produse formate prin toate grupările posibile ale factorilor dați (adică produsul a 20 de unu, produsul dintre 19 de unu și un factor x^5, produsul dintre 19 de unu și un factor x^7, produsul dintre 18 de unu, un factor x^5 și un factor

x^7 etc.), luați în toate modurile posibile (astfel, vor fi 20 de termeni diferiți, care sînt produse dintre 19 de unu și x^5, deoarece poate ocupa într-un astfel de produs factorul x^5 primul, al doilea, al treilea, ..., al douăzecilea loc și toate aceste produse vor fi termeni diferiți ai sumei noastre).

Toate produsele de acest fel vor conține pe x la o putere anumită, care este o sumă dintre un multiplu de cinci și un multiplu de șapte. Însă este ușor de verificat că numărul 18 nu poate fi în nici un fel reprezentat ca o sumă de termeni ce iau valorile 5 și 7; rezultă deci că termenul x^{18} nu figurează deloc în suma noastră (coeficientul căutat al lui x^{18} este egal cu zero).

Numărul 17 poate fi reprezentat în mod unic sub forma unei sume de cinci și șapte: $17 = 5 + 5 + 7$. Deci, x^{17} va figura în acei termeni ai sumei noastre care sînt produse dintre doi factori x^5, un factor x^7 și 17 factori egali cu 1. Trebuie să determinăm numărul produselor de acest fel din suma noastră. Într-un astfel de produs factorul x^7 poate să ocupe oricare dintre cele 20 locuri. Să presupunem, pentru precizare, că el ocupă primul loc. După el mai rămîn 19 locuri libere, dintre care două trebuie să fie ocupate de factorii x^5, iar celelalte 17 de factorii 1. Dacă unul dintre factorii x^5 ocupă un loc anumit, celălalt poate sta pe oricare dintre celelalte 18 locuri. Obținem astfel 18 termeni în care pe primul loc neocupat de factorul x^7 (adică pe locul al doilea) stă x^5, 18 termeni în care pe al doilea dintre locurile neocupate stă x^5, 18 termeni în care pe al treilea loc de acest gen stă x^5, în sfîrșit 18 termeni în care pe ultimul loc liber (al nouăsprezecelea) stă x^5. La prima vedere se pare că avem în total $19 \cdot 18$ termeni de forma căutată și în care factorul x^7 ocupă primul loc. Ei sînt însă de două ori mai puțin. Într-adevăr, în fiecare dintre acești termeni factorul x^5 ocupă două locuri (de exemplu, al i-lea și al k-lea loc); deci în calculul nostru fiecare termen de acest fel a fost considerat de două ori (în exemplul dat, termenul fixat se consideră printre cele 18 produse în care factorul x^5 ocupă locul al i-lea și printre cele 18 produse în care factorul x^5 ocupă locul al k-lea). Deci, numărul termenilor de forma căutată și în care pe primul loc stă factorul x^7 este de fapt egal cu $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$. Tot atîția vor fi și termenii în care x^7 stă pe locul al doilea, al treilea, ..., al douăzecelea. Astfel numărul total al unor astfel de termeni, egal cu coeficientul lui x^{17} în $(1 + x^5 + x^7)^{20}$, este egal cu $20 \cdot 171 = 3\,420$.

19. Se vor număra toate modurile în care pot fi schimbate 20 copeici. Într-un astfel de schimb se pot utiliza sau patru monede în valoare de 5 copeici sau trei astfel de monede sau două sau una sau nici una.

Există un singur mod de schimb în care pot fi folosite patru monede în valoare de 5 copeici (deoarece patru monede de 5 copeici fac 20 copeici).

Dacă sînt folosite trei monede de 5 copeici, va trebui să completăm încă 5 copeici din monede de altă valoare. Aceasta se poate face în trei moduri: luînd două monede de 2 copeici și una de 1 copeică, sau o monedă de 2 copeici și trei de 1 copeică, sau, în sfîrșit, nici o monedă de 2 copeici și cinci monede de 1 copeică.

Am dat astfel încă trei moduri de a schimba 20 copeici.

Dacă vom utiliza două monede de 5 copeici, va trebui să mai formăm 10 copeici din monede de 2 copeici şi 1 copeică. Aceasta se poate face în şase moduri. Se pot lua:

1) 5 monede de 2 copeici, 0 monede de 1 copeică;
2) 4 monede de 2 copeici, 2 monede de 1 copeică;
3) 3 monede de 2 copeici, 4 monede de 1 copeică;
4) 2 monede de 2 copeici, 6 monede de 1 copeică;
5) 1 monedă de 2 copeici, 8 monede de 1 copeică;
6) 0 monedă de 2 copeici, 10 monede de 1 copeică.

Am dat astfel încă şase moduri de a schimba 20 copeici.

Dacă utilizăm o monedă de 5 copeici, trebuie să formăm încă 15 copeici cu monede de altă valoare. Aceasta se poate face în următoarele moduri:

1) 7 monede de 2 copeici, 1 monedă de 1 copeică;
2) 6 monede de 2 copeici, 3 monede de 1 copeică;
3) 5 monede de 2 copeici, 5 monede de 1 copeică;
4) 4 monede de 2 copeici, 7 monede de 1 copeică;
5) 3 monede de 2 copeici, 9 monede de 1 copeică;
6) 2 monede de 2 copeici, 11 monede de 1 copeică;
7) 1 monedă de 2 copeici, 13 monede de 1 copeică;
8) 0 monede de 2 copeici, 15 monede de 1 copeică.

Am mai dat, deci, încă opt moduri de schimb.

În sfîrşit, dacă nu se utilizează deloc monede de 5 copeici, sînt posibile următoarele moduri de schimb:

1) 10 monede de 2 copeici, 0 monede de 1 copeică;
2) 9 monede de 2 copeici, 2 monede de 1 copeică;
3) 8 monede de 2 copeici, 4 monede de 1 copeică;
4) 7 monede de 2 copeici, 6 monede de 1 copeică;
5) 6 monede de 2 copeici, 8 monede de 1 copeică;
6) 5 monede de 2 copeici, 10 monede de 1 copeică;
7) 4 monede de 2 copeici, 12 monede de 1 copeică;
8) 3 monede de 2 copeici, 14 monede de 1 copeică;
9) 2 monede de 2 copeici, 16 monede de 1 copeică;
10) 1 monedă de 2 copeici, 18 monede de 1 copeică;
11) 0 monede de 2 copeici; 20 monede de 1 copeică;

adică încă 11 moduri.

Toate modurile de schimb indicate sînt diferite şi alte moduri nu există. Deci numărul total de moduri de schimb este egal cu

$$1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29.$$

20. Pentru a obține n copeici din monede în valoare de 1 copeică și 2 copeici nu putem utiliza mai mult de $n/2$ monede în valoare de 2 copeici. Dacă se iau mai puțin de $n/2$ sau exact $n/2$ astfel de monede, modul de combinare este unic determinat (dacă luăm q monede de 2 copeici, unde $q \leqslant n/2$, atunci pentru a obține n copeici trebuie să mai adăugăm încă $n - 2q$ monede de o copeică). Astfel, există atîtea moduri de a obține n copeici din monede în valoare de 1 și 2 copeici, cîte numere întregi nenegative sînt nu mai mari decît $n/2$ (printre aceste numere trebuie considerat și zero, deoarece n copeici se pot obține, în particular, numai din monede de o copeică). Dacă n este un număr par, $n/2$ este întreg și numărul total de moduri este egal cu $1 + n/2$ (se pot lua 0, 1, 2, ..., $n/2$ monede de două copeici); dacă n este impar, atunci $n/2$ nu mai este un număr întreg și numărul total de moduri este egal cu $\frac{n-1}{2} + 1 \left(\text{se pot lua } 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2} \text{ monede de două copeici}\right)$. Utilizînd semnul $[x]$, se poate da o formulă unică pentru numărul de moduri în care se pot obține n copeici din monede în valoare de 1 și 2 copeici; acest număr este egal în toate cazurile cu

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

21. a) Pentru a obține n copeici din monede în valoare de 1 copeică, 2 copeici și 3 copeici putem să nu utilizăm deloc monede în valoare de 3 copeici, putem utiliza o singură monedă de acest fel, putem utiliza două, trei etc. pînă la $\left[\frac{n}{3}\right]$ monede. În primul caz, trebuie să obținem n copeici din monede în valoare de 1 copeică și de 2 copeici $\left(\text{aceasta este posibil în } \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \text{ moduri; v. problema } 20\right)$; în al doilea caz, trebuie să obținem din astfel de monede $n - 3$ copeici $\left(\text{aceasta este posibil în } \left[\frac{n-3}{2}\right] + 1 \text{ moduri}\right)$; în al treilea caz, trebuie să obținem $n-6$ copeici $\left(\text{aceasta este posibil în } \left[\frac{n-6}{2}\right] + 1 \text{ moduri}\right)$ etc. În ultimul caz, trebuie să obținem k copeici, din monede de 1 copeică și de 2 copeici, k fiind restul împărțirii lui n la 3, care poate fi egal cu 0, 1 sau 2 $\left(k \text{ copeici se pot obține în } \left[\frac{k}{2}\right] + 1 \text{ moduri}\right)$. Astfel, numărul total de moduri este egal cu

$$\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] + 1\right) + \left(\left[\frac{n-6}{2}\right] + 1\right) + \ldots + \left(\left[\frac{k}{2}\right] + 1\right).$$

Vom nota cu l cîtul împărţirii lui n la 3; atunci $n = 3l + k$ şi numărul de moduri căutat poate fi reprezentat sub forma

$$\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{k+3}{2}\right]+1\right)+\ldots+\left(\left[\frac{k+3l-3}{2}\right]+1\right)+\left(\left[\frac{k+3l}{2}\right]+1\right).$$

Vom demonstra că pentru orice număr întreg m avem

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}.$$

Într-adevăr, dacă m este par, avem în ambii membri ai egalităţii $m/2$, iar dacă m este impar avem în ambii membri $(m - 1)/2$.

Se va transforma acum expresia care dă numărul de moduri în care pot fi obţinute n copeici din monede în valoare de 1, 2 şi 3 copeici. Această expresie poate fi scrisă sub forma

$$\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^k}{4}\right)+\left(\frac{k+3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^{k+3}}{4}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{k+3l}{2}+\frac{3}{4}+\frac{(-1)^{k+3l}}{4}\right).$$

Pentru calculul acestei sume este comod să o scriem în altă ordine: mai întîi vom scrie termenii egali cu $\frac{3}{4}$, apoi $\frac{(-1)^k}{4}$; $\frac{(-1)^{k+3}}{4}$; ...; $\frac{(-1)^{k+3l}}{4}$ şi, în sfîrşit, toţi ceilalţi termeni. Vom obţine astfel

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+3}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+3l}}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{k}{2}+\frac{k+3}{2}+\ldots+\frac{k+3l}{2}\right).$$

Aici avem în prima paranteză termenul $3/4$ repetat de $l + 1$ ori; aceasta dă $3(l + 1)/4$. În ultima paranteză sînt $l + 1$ termeni ai unei progresii aritmetice cu raţia $\frac{3}{2}$, primul termen $\frac{k}{2}$ şi ultimul termen $\frac{k}{2}+\frac{3}{2}l$; suma acestei progresii este egală cu $\left(\frac{k}{2}+\frac{3l+k}{2}\right)(l+1)\Big/2$. În sfîrşit, în paranteza din mijloc este suma a $l + 1$ termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen $(-1)^k/4$ şi raţia $(-1)^3 = -1$, adică

$$\left[\frac{(-1)^{k+3l+3}}{4}-\frac{(-1)^k}{4}\right]:[(-1)-1]=\frac{(-1)^k}{8}[1-(-1)^{3l+3}];$$

această sumă, care poate fi egală cu $1/4$, 0 sau $-1/4$, o vom nota cu ε.

Astfel, pentru numărul de moduri căutat obţinem expresia

$$\frac{3(l+1)}{4}+\frac{(3l+2k)(l+1)}{4}+\varepsilon.$$

Însă

$$\frac{3(l+1)}{4}+\frac{(3l+2k)(l+1)}{4}+\varepsilon=\frac{(l+1)(3+3l+2k)}{4}+\varepsilon=$$

$$=\frac{(3l+3)(3l+3+2k)}{12}+\varepsilon=\frac{(n+3-k)(n+3+k)}{12}+\varepsilon=$$

$$=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{k^2}{12}+\varepsilon.$$

Să observăm, acum că dacă k este egal cu 0, atunci $k^2/12=0$, iar

$$\varepsilon=[1-(-1)^{3l+3}]/8$$

poate fi egal cu 0 sau cu $+\frac{1}{4}$; dacă $k=1$, atunci $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{12}$, iar ε poate fi egal cu 0 sau cu $-\frac{1}{4}$ şi dacă $k=2$, atunci $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}$, iar ε poate fi egal cu 0 sau $\frac{1}{4}$. Deci $-\frac{k^2}{12}+\varepsilon$ poate lua numai valori cuprinse între $-\frac{1}{3}$ şi $+\frac{1}{4}$, adică această expresie este totdeauna mai mică în valoare absolută decît 1/2. Deoarece numărul de moduri în care se pot obţine n copeici este un număr întreg, rezultă din calculul nostru că acest număr întreg este cel mai apropiat de $(n+3)^2/12$. Astfel numărul de moduri este dat de formula

$$\left(\frac{(n+3)^2}{12}\right).$$

b) La fel, se demonstrează că numărul de moduri în care se pot obţine n copeici din monede în valoare de 1, 2 şi 5 copeici este egal cu

$$\left(\frac{(n+4)^2}{20}\right).$$

22. Deoarece din monede în valoare de 10, 20 şi 50 copeici se poate obţine doar un număr întreg de zeci de copeici, rezultă că din monede de

1, 2 și 5 copeici trebuie să obținem de asemenea un număr întreg de zeci de copeici. De aceea, sînt posibile următoarele cazuri:

1) o rublă se obține din monede în valoare de 10, 20 și 50 copeici,

2) din monede în valoare de 10, 20 și 50 copeici se obțin 90 copeici

	din monede de	1,	2	și	5	copeici	se obțin	10	copeici
3)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	80	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	20	„
4)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	70	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	30	„
5)	„ „ „	10,	20	„	5	„	„ „	60	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	40	„
6)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	50	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	50	„
7)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	40	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	60	„
8)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	30	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	70	„
9)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	20	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	80	„
10)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	10	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	90	„
11)	„ „ „	10,	20	„	50	„	„ „	0	„
	„ „ „	1,	2	„	5	„	„ „	1	rublă

Să examinăm fiecare dintre aceste moduri posibile.

1) Se poate obține o rublă din monede de 10, 20 și 50 copeici în tot atîtea moduri în care se pot obține 10 copeici din monede în valoare de 1, 2 și 5 copeici. Conform problemei 21, b), acest număr este egal cu

$$\left(\frac{(10+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{196}{20}\right)=(9{,}8)=10.$$

2) 90 de copeici se pot obține din monede de 10, 20 și 50 copeici în tot atîtea moduri ca și 9 copeici din monede în valoare de 1, 2 și 5 copeici, adică în $\left(\frac{(9+4)^2}{20}\right)$ moduri. Acest număr este egal cu

$$\left(\frac{169}{20}\right)=(8{,}45)=8.$$

Ne mai rămîne să obținem 10 copeici din monede în valoare de 1, 2 și 5 copeici. Numărul de moduri diferite în care se poate face acest lucru este egal cu

$$\left(\frac{(10+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{196}{20}\right)=10.$$

Deci, numărul total de moduri diferite prin care se pot obține 90 copeici din monede de 10, 20 și 50 copeici, iar 10 copeici din monede de 1, 2 și 5 copeici este egal cu $8 \cdot 10 = 80$.

3) Printr-un raționament analog se poate arăta că numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(8+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(20+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{144}{20}\right)\cdot\left(\frac{576}{20}\right)=(7{,}2)\cdot(28{,}8)=7\cdot 29=203.$$

4) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(7+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(30+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{121}{20}\right)\cdot\left(\frac{1\,156}{20}\right)=(6{,}05)\cdot(57{,}8)=6\cdot 58=348.$$

5) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(6+4)^2}{20}\right)\cdot\left(\frac{(40+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{100}{20}\right)\left(\frac{1\,936}{20}\right)=(5)\cdot(96{,}8)=5\cdot 97=485.$$

6) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(5+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(50+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{81}{20}\right)\left(\frac{2\,916}{20}\right)=(4{,}05)\cdot(145{,}8)=4\cdot 146=584.$$

7) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(4+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(60+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{64}{20}\right)\left(\frac{4\,096}{20}\right)=(3{,}2)\cdot(204{,}8)=3\cdot 205=615.$$

8) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(3+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(70+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{49}{20}\right)\left(\frac{5\,476}{20}\right)=(2{,}45)\cdot(273{,}8)=2\cdot 274=548.$$

9) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(2+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(80+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{36}{20}\right)\cdot\left(\frac{7\,056}{20}\right)=(1{,}8)\cdot(352{,}8)=2\cdot 353=706.$$

10) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(1+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(90+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{25}{20}\right)\left(\frac{8\,836}{20}\right)=(1{,}25)\,(441{,}8)=1\cdot 442=442.$$

11) Numărul total de moduri diferite este egal cu

$$\left(\frac{(0+4)^2}{20}\right)\left(\frac{(100+4)^2}{20}\right)=\left(\frac{16}{20}\right)\left(\frac{10\,816}{20}\right)=(0{,}8)\,(540{,}8)=1\cdot 541=541.$$

În definitiv, numărul total de moduri în care se poate obține o rublă din monede în valoare de 1, 2, 5, 10, 20 și 50 copeici este egal cu

$$10+80+203+348+485+584+615+548+706+442+541=4\,562$$

23. Dacă numărul n este reprezentat sub forma unei sume de doi termeni

$$n=x+y,$$

atunci unul dintre acești termeni nu va fi mai mare decît $n/2$. Acest termen poate lua valorile 1, 2, 3, ..., $\left[\frac{n}{2}\right]$; toate aceste cazuri sînt diferite, deoarece al doilea termen nu va putea fi mai mic decît $n/2$. De aceea numărul de moduri diferite este egal cu $\left[\frac{n}{2}\right]$.

24. Trebuie găsit numărul perechilor de numere întregi x, y, pentru care $|x|+|y|$ este egal cu 0 sau cu 1 sau cu 2 sau cu 3 ... sau cu 99. Se va calcula numărul perechilor x, y pentru care $|x|+|y|=k$. Aici $|x|$ poate lua $k+1$ valori diferite, anume 0, 1, 2, ..., $k-1$, k; în acest caz, $|y|$ va fi egal respectiv cu k, $k-1$, $k-2$, ..., 1, 0. Dacă $|x|=l$, $|y|=k-l$, unde nici l, nici $k-l$ nu sînt egale cu 0, atunci x și y pot lua încă două valori care diferă prin semn; deci, obținem, în acest caz, patru soluții diferite pentru ecuația $|x|+|y|=k$ și anume: $(l, k-l)$, $(-l, k-l)$, $(l, -k+l)$ și $(-l, -k+l)$. Dacă $l=0$ sau $l=k$, obținem numai două soluții pentru ecuația $|x|+|y|=k$ și anume: $(0, k)$ și $(0, -k)$, sau respectiv $(k, 0)$ și $(-k, 0)$. Astfel, pentru $k\neq 0$ ecuația $|x|+|y|=k$ are $2+4(k-1)+2=4k$ soluții diferite. Dacă $k=0$, ecuația $|x|+|y|=k$ (adică ecuația $|x|+|y|=0$) are o singură soluție $x=0$, $y=0$. De aici rezultă că numărul soluțiilor diferite, în numere întregi, ale inegalității $|x|+|y|<100$ este egal cu

$$1+4\,(1+2+3+\ldots+99)=1+4\cdot\frac{99\cdot 100}{2}=1+19\,800=19\,801.$$

25. Problema se reduce la găsirea numărului de soluții întregi pozitive ale ecuației $x+y+z=n$. Să observăm, în primul rînd, că ecuația $x+y=l$ (l este un număr întreg pozitiv) are $l-1$ soluții întregi pozitive. Într-adevăr, în acest caz, x poate fi egal cu 1, 2, ..., $l-1$ (x nu poate fi egal cu l, deoarece atunci y n-ar fi pozitiv); y se determină cu ajutorul ecuației și în aceste cazuri va fi și el un număr întreg pozitiv.

Să trecem acum la ecuaţia

$$x + y + z = n.$$

Evident, x poate fi egal cu 1, 2, 3, ..., $n - 2$ (însă nu poate fi egal cu $n - 1$, deoarece y şi z nu sînt mai mici decît 1, iar $n - 1 + 1 + 1 > n$); y şi z verifică ecuaţia

$$y + z = n - x;$$

deci pentru o valoare fixă a lui x, avem $n - x - 1$ posibilităţi pentru valorile lui y şi z. De aici rezultă că numărul total al soluţiilor diferite este egal cu

$$(n - 2) + (n - 3) + ... + [n - (n - 2) - 1] = (n - 2) + (n - 3) + ...$$
$$... + 1 = (n - 1)(n - 2)/2.$$

26. Vom aşeza termenii acestei sume în ordine crescătoare. Este clar că primul (cel mai mic) termen poate varia de la 1 la $\left[\frac{n}{3}\right]$, adică pentru aceasta există $\left[\frac{n}{3}\right]$ valori posibile. Dacă primul termen este x, atunci al doilea nu poate fi mai mic decît x şi nici mai mare decît $\left[\frac{n-x}{2}\right]$ (deoarece acesta nu este mai mic decît primul şi nu este mai mare decît al treilea). Astfel, pentru al doilea termen avem $\left[\frac{n-x}{2}\right] - (x - 1)$ valori posibile. Al treilea termen determină în mod unic cu ajutorul primilor doi. Deoarece x poate lua valorile 1, 2, ..., $\left[\frac{n}{3}\right] - 1$, $\left[\frac{n}{3}\right]$, rezultă că numărul de reprezentări posibile este egal cu

$$\left[\frac{n-1}{2}\right] + \left(\left[\frac{n-2}{2}\right] - 1\right) + \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 2\right) + ... + \left\{\left[\frac{n - \left[\frac{n}{3}\right]}{2}\right] - \left(\left[\frac{n}{3}\right] - 1\right)\right\}.$$

Vom transforma acum această expresie. Să presupunem că restul împărţirii lui n la 3 este egal cu k (k poate să fie egal cu 0, 1 sau 2); atunci avem $n = 3l + k$ şi expresia noastră este egală cu

$$\left[\frac{3l + k - 1}{2}\right] + \left[\frac{3l + k - 2}{2}\right] + \left[\frac{3l + k - 3}{2}\right] + ...$$
$$... + \left[\frac{3l + k - l}{2}\right] - \{1 + 2 + ... + (l - 1)\}.$$

Expresia în acolade este egală cu $l\,(l-1)/2$. Să calculăm acum suma S a celorlalţi termeni. O vom scrie în ordinea inversă; atunci ea va lua forma

$$S=\left[\frac{2l+k}{2}\right]+\left[\frac{2l+k+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2l+k+(l-2)}{2}\right]+\left[\frac{2l+k+(l-1)}{2}\right].$$

Această sumă este formată din l termeni. Folosind formula

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^m}{4}$$

(v. soluţia problemei 21, a) suma poate fi scrisă astfel:

$$S=\left(\frac{2l+k}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-l)^k}{4}\right)+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+2}}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{2l+k}{2}+\frac{l-1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}\right).$$

Aşezînd termenii în altă ordine, se obţine

$$S=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{l-1}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}\right).$$

Vom nota suma $\frac{(-1)^k}{4}+\frac{(-1)^{k+1}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{k+l-1}}{4}$ cu ε. Este clar că ε poate fi egal cu 1/4, 0 sau $-1/4$ (compară cu soluţia problemei 21, *a*)). Mai departe se obţine

$$\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{l-1}{2}=\frac{l\,(l-1)}{4}$$

(aceasta este suma termenilor progresiei aritmetice). Astfel, în definitiv

$$S=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\frac{l(l-1)}{4}+\varepsilon$$

şi, deci, numărul de moduri în care poate fi reprezentat numărul n ca o sumă de trei termeni întregi pozitivi este egal cu

$$S-\frac{l(l-1)}{2}=\frac{l(2l+k)}{2}-\frac{l}{4}+\frac{l(l-1)}{4}+\varepsilon-\frac{l(l-1)}{2}=$$

$$=\frac{l(4l+2k-1-l+1)}{4}+\varepsilon=\frac{l(3l+2k)}{4}+\varepsilon.$$

Însă

$$\frac{l(3l+2k)}{4}+\varepsilon=\frac{3l(3l+2k)}{12}+\varepsilon=\frac{(3l+k-k)(3l+k+k)}{12}+\varepsilon=$$

$$=\frac{(n-k)(n+k)}{12}+\varepsilon=\frac{n^2-k^2}{12}+\varepsilon=\frac{n^2}{12}-\frac{k^2}{12}+\varepsilon.$$

Să observăm că, dacă $k=0$, atunci $\frac{k^2}{12}=0$, iar ε poate fi egal cu 0 sau cu 1/4: dacă $k=1$, atunci $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{12}$, iar ε poate fi egal cu 0 sau cu $-1/4$; în sfîrşit, dacă $k=2$, atunci $\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}$, iar ε poate fi egal cu 0 sau cu $-1/4$. Deci $-\frac{k^2}{12}+\varepsilon$ se află între $-1/3$ şi $1/4$; aşadar, numărul de moduri în care poate fi reprezentat numărul n ca sumă a trei termeni întregi pozitivi este egal cu cel mai apropiat număr întreg de $\frac{n^2}{12}$, adică este egal cu $\left(\frac{n^2}{12}\right)$.

27. Deoarece $z=n-x-y$, soluţia va fi complet determinată, dacă vom cunoaşte pe x şi y. Să înlocuim în inegalităţile noastre pe z cu $n-x-y$:

1) Inegalitatea $z\leqslant x+y$ dă

$$n-x-y\leqslant x+y;$$

de aici

$$n\leqslant 2(x+y);\quad x+y\geqslant n/2\quad \text{adică,}\quad y\geqslant\frac{n}{2}-x.$$

2) Inegalitatea $y\leqslant x+z$ dă

$$y\leqslant x+n-x-y;$$

de aici

$$2y\leqslant n,\quad y\leqslant n/2.$$

Din 1) şi 2) rezultă că pentru fiecare valoare dată a lui x există atîtea soluţii diferite, cîte numere întregi pozitive sînt cuprinse între $\frac{n}{2}-x$ şi $\frac{n}{2}$.

3) Inegalitatea $x\leqslant y+z$ dă

$$x\leqslant y+n-x-y;$$

de aici

$$2x\leqslant n,\quad x\leqslant n/2.$$

Deci x poate varia de la 1 la $\left[\frac{n}{2}\right]$.

În afara acestor inegalități, x și y trebuie să mai verifice și inegalitatea $x + y < n$, deoarece $z > 0$.

Să cercetăm acum două cazuri posibile: n impar și n par.

1) n impar. Atunci x poate lua valorile

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2}-1, \quad \frac{n-1}{2}-2, ..., 1$$

și, pentru fiecare dintre aceste valori ale lui x, numărul numerelor întregi pozitive cuprinse între $\frac{n}{2} - x$ și $\frac{n}{2}$ este egal cu x $\left(\text{aceste condiții sînt verificate de numerele } \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} - 1, ..., \frac{n-1}{2} - (x-1)\right)$. Deci pentru $x = (n-1)/2$ există $(n-1)/2$ soluții diferite $\left(y \text{ poate fi egal cu } \frac{n-1}{2}; \frac{n-3}{2}; ...; 1\right)$; pentru $x = \frac{n-1}{2} - 1$ există $\frac{n-1}{2} - 1$ soluții diferite $\left(y \text{ poate fi egal cu } \frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2} - 1, ..., 2\right)$ etc.; pentru $x = 1$ există o singură soluție [y trebuie să fie egal cu $(n-1)/2$]. Este clar că condiția $x + y < n$ este verificată pentru toate aceste soluții. În definitiv, numărul total de soluții diferite în numere întregi pozitive ale ecuației $x + y + z = n$, care verifică inegalitățile indicate, este egal, în acest caz, cu

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{2}+ ... + 1 = \frac{(n-1)}{2}\cdot\left[\frac{n-1}{2}+1\right]\Big/2 = \frac{n^2-1}{8}.$$

2) n par. Aici x poate lua valorile $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}-2, ..., 1$. Pentru $x = n/2$ numărul numerelor întregi pozitive cuprinse între $\frac{n}{2} - x = 0$ și $\frac{n}{2}$ este egal cu $n/2 = x$ $\left(\text{aceste condiții sînt verificate de numerele } \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, ..., 1\right)$, iar pentru $x < n/2$ numărul numerelor întregi pozitive cuprinse între $\frac{n}{2} - x$ și n este egal cu $x + 1$ (aceste condiții sînt verificate de numerele $\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, ...$ ..., $\frac{n}{2} - x$; pentru $x = n/2$ numărul soluțiilor este egal cu x, deoarece numărul $\frac{n}{2} - x = 0$ nu este pozitiv și trebuie să fie înlăturat). Astfel, pentru $x = n/2$

există $n/2$ soluţii diferite $\left(y \text{ poate fi egal cu } \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, 1\right)$; pentru $x = \frac{n}{2} - 1$ există, de asemenea, $n/2$ soluţii diferite $\left(y \text{ poate fi egal cu } \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \ldots, 1\right)$ etc.; în sfîrşit, pentru $x = 1$ există două soluţii diferite $\left(y \text{ poate fi egal cu } \frac{n}{2} \text{ sau cu } \frac{n}{2} - 1\right)$. Dintre aceste soluţii una (anume $x = n/2$, $y = n/2$) trebuie să fie lăsată deoparte, deoarece aceasta nu verifică condiţia $x + y < n$. Astfel, în acest caz, numărul total de soluţii diferite în numere întregi pozitive ale ecuaţiei $x + y + z = n$, care verifică inegalităţile indicate în problemă, este egal cu

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2} - 2\right) + \ldots + 2 - 1 = \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \frac{n}{2} +$$

$$+ \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2} - 2\right) + \ldots + 2 + 1 - 3 = \left[\left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)\Big/ 2\right] - 3 =$$

$$= \frac{(n+2)(n+4)}{8} - 3 = \frac{n^2 + 6n - 16}{8} = \frac{(n+8)(n-2)}{8}.$$

Se mai observă că se poate da problemei şi o interpretare geometrică. Orice soluţie în numere întregi a ecuaţiei $x + y + z = n$ este complet determinată de două numere x şi y (deoarece $z = n - x - y$ este determinat în mod unic de x şi y). Vom lua în plan un sistem de coordonate carteziene şi vom înscrie toate punctele cu coordonatele numere întregi x şi y care sînt soluţiile problemei noastre (fig. 36). Am văzut că pentru astfel de soluţii trebuie să avem $y \leqslant n\ 2$; deci toate punctele care verifică aceste condiţii trebuie să fie situate sub dreapta NP ($ON = MP = n/2$) sau chiar pe aceasta. Conform inegalităţii $x \leqslant n/2$, toate aceste puncte trebuie să se afle la stînga dreptei PM ($OM = NP = n/2$) sau chiar pe aceasta. În sfîrşit, inegalitatea $x + y \geqslant n/2$ arată că toate aceste puncte se află deasupra dreptei sau pe aceasta. Astfel, toate punctele căutate trebuie să fie dispuse în interiorul sau pe laturile triunghiului NPM, haşurat în fig. 36; vîrfurile N, P şi M ale triunghiului nu convin (chiar dacă coordonatele lor sînt numere întregi), deoarece în aceste cazuri unul dintre numerele x, y, z devine egal cu zero.

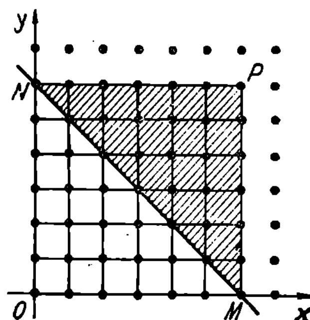


Fig. 36

Este uşor de văzut că, şi reciproc, tuturor punctelor din triunghiul NPM care au coordonate numere întregi (în afară de vîrfuri) le corespund soluţii în numere întregi pozitive ale ecuaţiei $x + y + z = n$ şi care verifică inegalităţile $x + y \geqslant z$, $x + z \geqslant y$, $y + z \geqslant x$. Astfel, problema noastră admite şi următoarea formulare:

Într-un plan în care este dat un sistem de coordonate carteziene se duc dreptele $x = n/2$, $y = n/2$ şi $x + y = n/2$. Cîte puncte cu coordonate numere întregi se află în interiorul şi pe laturile triunghiului mărginit de aceste drepte (vîrfurile nu se iau în consideraţie)?

28. Se vor nota lungimile laturilor triunghiului cu x, y şi z. Aceste lungimi trebuie să satisfacă ecuaţia

$$x + y + z = n.$$

În afară de aceasta, mărimile x, y și z trebuie să verifice inegalitățile

$$x < y + z, \quad y < x + z, \quad z < x + y$$

(lungimea unei laturi a triunghiului este mai mică decît suma celorlalte două). Reciproc, orice mărimi x, y și z, care verifică expresiile de mai sus, sînt laturile unui triunghi care are perimetrul n. Astfel, problema este asemănătoare cu precedenta, deosebirea constînd în faptul că, în timp ce în problema precedentă, de exemplu, prin schimbarea între ele a valorilor x și y am obținut o altă soluție (cu condiția că $x \neq y$), aici prin permutarea lui x și y vom obține același triunghi. În afară de aceasta, în condițiile pe care trebuie să le verifice soluțiile, în locul semnelor $\leqslant$ acum stau semnele $<$. Aceasta înseamnă că trebuie înlăturate soluțiile cărora le corespund puncte pe laturile triunghiului MPN (v . fig. 36). Se observă că pentru n impar pe laturile triunghiului MPN nu există puncte cu ambele coordonate numere întregi, iar pentru n par, pe fiecare dintre laturile acestui triunghi MPN, în afară de vîrfuri, mai există cîte $\frac{n}{2} - 1$ puncte cu ambele coordonate numere întregi. Deci, dacă în problema 27 am fi înlocuit inegalitățile $x \leqslant y + z$, $y \leqslant x + z$, $z \leqslant x + y$ prin inegalitățile $x < y + z$, $y < x + z$, $z < x + y$, atunci pentru n impar numărul de soluții ar fi rămas egal cu $(n^2 - 1)/8$, iar pentru n par numărul de soluții ar fi devenit egal cu

$$\frac{(n+8)(n-2)}{8} - 3\left(\frac{n}{2} - 1\right) = (n-2)\,\frac{n+8-12}{8} = \frac{(n-2)(n-4)}{8}.$$

Vom cerceta acum cîte soluții diferite ale ecuației $x + y + z = n$ corespund unui aceluiași triunghi de perimetru n?

Unui triunghi cu laturile inegale îi corespund șase soluții diferite ale ecuației date. Vom nota lungimile laturilor cu literele p, q și r. Atunci există următoarele șase soluții corespunzătoare acestui triunghi:

1) $x = p,\ y = q,\ z = r$; 2) $x = p,\ y = r,\ z = q$; 3) $x = q,\ y = p,\ z = r$;

4) $x = q,\ y = r,\ z = p$; 5) $x = r,\ y = p,\ z = q$; 6) $x = r,\ y = q,\ z = p$.

Deoarece p, q și r sînt diferite, rezultă că toate aceste soluții sînt diferite.

Unui triunghi isoscel (ale cărui laturi sînt egale cu p, p și q, unde $p \neq q$) îi corespund trei soluții diferite:

1) $x=p,\ y=p,\ z=q$; 2) $x=p,\ y=q,\ z=p$; 3) $x=q,\ y=p,\ z=p$.

În sfîrșit, unui triunghi echilateral îi corespunde o singură soluție. Astfel, numărul N, pe care l-am determinat, al soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației $x + y + z = n$, care verifică inegalitățile $x < y + z$, $y < x + z$, $z < x + y$, este egal cu

$$N = 6P + 3R + S,$$

unde P este numărul triunghiurilor de perimetru n cu laturile inegale, de lungimi ce pot fi exprimate prin numere întregi, R este numărul triunghiurilor isoscele care nu sînt şi echilaterale, iar S este numărul triunghiurilor echilaterale. De aici rezultă că

$$N = 6T - 3Q - 2S,$$

unde $T = P + R + S$ este numărul tuturor triunghiurilor de perimetru n, ale căror laturi au lungimea exprimată la numere întregi, $Q = R + S$ este numărul tuturor triunghiurilor isoscele de perimetru n, ale căror laturi sînt de lungimi exprimate în numere întregi, iar S are aceeaşi semnificaţie ca şi mai înainte.

Deoarece N a fost calculat, rezultă că pentru determinarea lui T trebuie să mai calculăm pe Q şi S. Este clar că $S = 1$, dacă n este divizibil cu 3 (în acest caz, triunghiul echilateral cu laturile egale cu $n/3$ are lungimile laturilor exprimate în numere întregi) şi S este egal cu 0, dacă n nu se divide cu 3. Vom calcula acum pe Q. Numărul triunghiurilor isoscele de perimetru n, cu laturi de lungimi ce se exprimă în numere întregi, este evident egal cu numărul soluţiilor în numere întregi pozitive ale ecuaţiei $2x + y = n$, care verifică condiţia $2x > y$. Dar această ultimă condiţie este echivalentă cu condiţia $x > n/4$. Într-adevăr, deoarece $y = n - 2x$, inegalitatea $2x > y$ se poate scrie sub forma $2x > n - 2x$, de unde $4x > n$ sau, altfel, $x > n/4$. În soluţia problemei 20 am găsit, efectiv, numărul soluţiilor în numere întregi nenegative ale ecuaţiei $2x + y = n$. Deoarece aici trebuie să determinăm numărul soluţiilor în numere întregi pozitive ale acestei ecuaţii şi să arătăm cîte dintre ele verifică inegalitatea $x > n/4$, vom efectua din nou acest calcul. Este clar, că orice valoare pozitivă întreagă a lui x, mai mică decît $n/2$, generează o soluţie în numere întregi pozitive ale ecuaţiei noastre, deoarece pentru un număr întreg $x < n/2$ rezultă că şi $y = n - 2x > 0$ este un număr întreg. Dacă n este impar, există exact $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$ soluţii ale acestei ecuaţii $\left(x = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$; dacă n este par, soluţiile vor fi în număr de $\left[\frac{n}{2}\right] - 1 = \frac{n-2}{2}$ (valoarea $x = n/2$ nu convine, deoarece în acest caz $y = 0$). Evident că în ambele cazuri inegalitatea $x > \frac{n}{4}$ nu va fi verificată de $\left[\frac{n}{4}\right]$ soluţii $\left(\text{anume de } x = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{4}\right]\right)\cdot$ Astfel, dacă n este impar, atunci

$$Q = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right],$$

iar dacă n este par, atunci

$$Q = \left[\frac{n}{2}\right] - 1 - \left[\frac{n}{4}\right].$$

Acum este uşor de calculat T care este numărul tuturor triunghiurilor de perimetru n cu laturile de lungimi exprimate în numere întregi. Din formula $N = 6T - 3Q - 2S$ rezultă

$$T = \frac{N}{6} + \frac{Q}{2} + \frac{S}{3}.$$

Deoarece formulele prin care se exprimă N, Q şi S depind de resturile împărţirii lui n prin 2, 3 şi 4, rezultă că în locul unei singure formule pentru T vom avea formule diferite, după valoarea restului r, obţinut prin împărţirea lui n prin 12.

1) Dacă $r = 0$, atunci

$$N = \frac{n^2 - 6n + 8}{8}, \quad Q = \left[\frac{n}{2}\right] - 1 - \left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n}{2} - 1 - \frac{n}{4} = \frac{n-4}{4}, \quad S = 1;$$

$$T = \frac{N}{6} + \frac{Q}{2} + \frac{S}{3} = \frac{n^2 - 6n + 8}{48} + \frac{n-4}{8} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{n^2 - 6n + 8 + 6n - 24 + 16}{48} = \frac{n^2}{48}.$$

2) Dacă $r = 1$, atunci

$$N = \frac{n^2 - 1}{8}, \quad Q = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{4} = \frac{n-1}{4}, \quad S = 0;$$

$$T = \frac{N}{6} + \frac{Q}{2} + \frac{S}{3} = \frac{n^2 - 1}{48} + \frac{n-1}{8} = \frac{n^2 - 1 + 6n - 6}{48} = \frac{n^2 + 6n - 7}{48}.$$

3) Dacă $r = 2$, atunci

$$N = \frac{n^2 - 6n + 8}{8}, \quad Q = \left[\frac{n}{2}\right] - 1 - \left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n}{2} - 1 - \frac{n-2}{4} =$$

$$= \frac{n-2}{4}, \quad S = 0;$$

$$T = \frac{N}{6} + \frac{Q}{2} + \frac{S}{3} = \frac{n^2 - 6n + 8}{48} + \frac{n-2}{8} =$$

$$= \frac{n^2 - 6n + 8 + 6n - 12}{48} = \frac{n^2 - 4}{48}.$$

4) Dacă $r = 3$, atunci

$$N = \frac{n^2 - 1}{8}, \quad Q = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n-1}{2} - \frac{n-3}{4} = \frac{n+1}{4}, \quad S = 1;$$

$$T = \frac{N}{6} + \frac{Q}{2} + \frac{S}{3} = \frac{n^2 - 1}{48} + \frac{n+1}{8} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{n^2 - 1 + 6n + 6 + 16}{48} = \frac{n^2 + 6n + 21}{48}.$$

În acelaşi mod obţinem:

5) Dacă $r = 4$, atunci $T = (n^2 - 16)/48$.

6) Dacă $r = 5$, atunci $T = (n^2 + 6n - 7)/48$.

7) Dacă $r = 6$, atunci $T = (n^2 + 12)/48$.

8) Dacă $r = 7$, atunci $T = (n^2 + 6n + 5)/48$.

9) Dacă $r = 8$, atunci $T = (n^2 - 16)/48$.

10) Dacă $r = 9$, atunci $T = (n^2 + 6n + 9)/48$.

11) Dacă $r = 10$, atunci $T = (n^2 - 4)/48$.

12) Dacă $r = 11$, atunci $T = (n^2 + 6n + 5)/48$.

Se observă că în toate cazurile termenii liberi ai polinoamelor de la numărător sînt mai mici decît o doime din numitor. De aceea se poate formula răspunsul şi astfel:

Dacă n este impar, numărul triunghiurilor de perimetru n, cu laturile de lungimi ce se exprimă în numere întregi, este egal cu

$$\left(\frac{n^2 + 6n}{48}\right);$$

dacă însă n este par, numărul triunghiurilor de perimetru n, cu laturile de lungimi ce se exprimă în numere întregi, este egal cu

$$\left(\frac{n^2}{48}\right).$$

29. P r i m a r e z o l v a r e a p r o b l e m e l o r a) şi b). Să observăm în primul rînd, că *numărul soluţiilor în numere întregi pozitive (respectiv în numere întregi nenegative) ale ecuaţiei*

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n \qquad (*)$$

este egal cu diferența dintre numărul soluțiilor în numere întregi pozitive (nenegative) ale inegalității

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n \qquad (**)$$

și numărul soluțiilor în numere întregi pozitive (nenegative) ale inegalității

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n - 1.$$

Mai departe, este evident că; dacă

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n,$$

atunci

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_m - 1) \leqslant n - m,$$

de unde rezultă că *numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale inegalității*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n$$

este egal cu numărul soluțiilor în numere întregi nenegative ale inegalității

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \leqslant n - m$$

(dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt numere întregi pozitive, atunci $x_1-1, x_2-1, \ldots, x_m-1$ sînt numere întregi nenegative)[1]. Astfel, rezolvarea problemelor a) și b) se reduce la determinarea numărului $N(n, m)$ de soluții în numere întregi nenegative ale inegalității (**). Să observăm acum că dacă

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n,$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt numere întregi nenegative, numărul cel mai mare t_m din următorul șir crescător de numere pozitive

$$t_1 = x_1 + 1, \quad t_2 = x_1 + x_2 + 2, \quad t_3 = x_1 + x_3 + x_2 + 3, \ldots$$
$$\ldots, t_m = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m + m$$

nu este mai mare decît $n + m$. Pe de altă parte, dacă există m numere întregi pozitive diferite $t_1, t_2, \ldots, t_m$, care nu sînt mai mari decît $n + m$, se poate construi cu ajutorul acestor numere soluția $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în numere întregi nenegative a inegalității (**): pentru aceasta, este suficient să considerăm că numerele $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sînt scrise în ordine crescătoare și să punem

$$x_1 = t_1 - 1, \; x_2 = t_2 - t_1 - 1, \; x_3 = t_3 - t_2 - 1, \ldots, \; x_m = t_m - t_{m-1} - 1.$$

---

[1] Să observăm că în problema în care se cere să se determine numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației (*) trebuie, bineînțeles, să considerăm $n > m$.

Acest raționament arată că *numărul* $N(n, m)$ *de soluții nenegative ale inegalității* (**) *este egal cu numărul de moduri în care pot fi alese m numere oarecare din* $n + m$ *numere* $1, 2, ..., n + m$, *adică este egal cu* C_{n+m}^{m}.

Acum este ușor să scriem rezultatele problemelor a) și b). Anume, conform celor spuse mai sus:

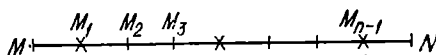


Fig. 37.

a) numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$$

este egal cu

$$N(n - m, m) - N(n - 1 - m, m) = C_n^m - C_{n-1}^m = C_{n-1}^{m-1}$$

(deoarece conform proprietăților cunoscute ale combinărilor $C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = C_n^m$);

b) numărul soluțiilor în numere întregi nenegative ale acestei ecuații este egal cu

$$N(n, m) - N(n - 1, m) = C_{n+m}^{m} - C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{m-1}$$

(deoarece $C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m1}^{m} = C_{n+m}^{m}$).

A doua rezolvare a problemelor a) și b). Vom considera segmentul MN de lungime n. Orice soluție în numere întregi pozitive (respectiv în numere întregi nenegative) a ecuației

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$$

corespunde unei descompuneri a acestui segment în m segmente mai mici ale căror lungimi se exprimă prin numere întregi pozitive (nenegative). Aceasta permite să dăm problemelor o nouă rezolvare.

a) Numărul soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației noastre este egal cu numărul de moduri în care segmentul MN poate fi descompuns în m segmente mai mici. Dacă $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ sînt puncte din segmentul MN, astfel încît $MM_1 = M_1M_2 = ... = M_{n-1}N = 1$ (fig. 37), numărul modurilor în care segmentul MN poate fi descompus în m segmente este, evident, egal cu numărul de moduri în care pot fi alese $n - 1$ puncte $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ dintre cele $m - 1$ puncte de diviziune, adică este egal cu numărul combinărilor C_{n-1}^{m-1} de $n - 1$ elemente luate cîte $m - 1$.

b) În mod analog, numărul de soluții în numere întregi nenegative ale ecuației noastre este egal cu numărul de moduri în care se aleg $m - 1$ puncte (unele dintre ele pot să coincidă) din $n + 1$ puncte $M, M_1, M_2, ..., M_{n-1}, N$ (extremitățile segmentului pot fi aici, de asemenea, puncte de diviziune). Cu alte cuvinte, acest număr este egal cu numărul combinărilor cu repetiție C_{n+m-1}^{m-1} de $n + 1$ elemente luate cîte $m - 1$ (v. rezolvarea problemei 6 și observația la soluția acestei probleme).

Observație. Comparînd cele două rezolvări ale problemei, se poate observa că a doua rezolvare a problemei a) este mult mai simplă decît prima. În ceea ce privește problema b), se poate ca prima rezolvare să fie mai simplă decît a doua.

30. a) Fie $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ şi să presupunem că cei mai mari dintre termenii $x_1, x_2, \dots, x_m$ sînt egali cu l (am folosit pluralul, deoarece printre termenii $x_1, x_2, \dots, x_m$ pot exista mai mulţi care să fie egali între ei şi mai mari decît toţi ceilalţi). În acest caz, termenii $x_1, x_2, \dots, x_m$ pot fi egali cu 1, sau cu 2, sau cu 3, ..., sau cu l. Să notăm cu k_1 numărul termenilor egali cu 1, cu k_2 numărul termenilor egali cu 2, cu k_3 numărul termenilor egali cu 3, ..., cu k_l numărul termenilor egali cu l (aici se poate întîmpla ca unele dintre numerele $k_1, k_2, \dots, k_l$ să fie egale cu zero). Atunci este adevărată egalitatea

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_m = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 + \dots + k_l l =$$
$$= (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_l) + (k_2 + k_3 + \dots + k_l) +$$
$$+ (k_3 + \dots + k_l) + \dots + k_l.$$

Suma $k_1 + k_2 + \dots + k_l$ este egală cu numărul tuturor termenilor din suma noastră, adică este egală cu m, deci se poate scrie

$$(k_2 + k_3 + \dots + k_l) + (k_3 + \dots + k_l) + \dots + k_l = n - m.$$

Vom nota acum

$$k_2 + k_3 + \dots + k_l = y_1,\ k_3 + \dots + k_l = y_2, \dots, k_l = y_{l-1}$$

şi din egalitatea de mai sus rezultă

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{l-1} = n - m.$$

Aici toţi termenii $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$ sînt numere întregi pozitive, care nu sînt mai mari decît m, deoarece

$$m = k_1 + k_2 + \dots + k_l \geqslant k_2 + k_3 + \dots + k_l \geqslant k_3 + \dots + k_l \geqslant \dots \geqslant k_l,$$

adică

$$m \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_{l-1}.$$

Astfel, *fiecărei reprezentări a numărului n sub forma unei sume de m termeni întregi pozitivi* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *i se poate asocia o anumită reprezentare a numărului* $n - m$ *sub forma unei sume de termeni întregi pozitivi* $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$, *dintre care nici unul nu este mai mare decît m.*

Vom arăta acum că, reciproc, *orice reprezentare a numărului* $n - m$ *sub forma unei sume de termeni întregi pozitivi* $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$, *care nu sînt mai mari decît m, se asociază, în modul arătat aici, unei anumite reprezentări a numărului n sub forma unei sume de m termeni* $x_1, x_2, \dots, x_m$. În acest scop, vom arăta că, cunoscînd pe $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$, putem reconstitui numerele $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Într-adevăr, vom presupune că termenii $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$ sînt aşezaţi în ordine necrescătoare (la aceasta se poate ajunge totdeauna, schimbînd dacă este nevoie, ordinea de numerotare a numerelor $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$). Cunoscînd $y_1, y_2, \dots, y_{l-1}$, vom determina pe $k_1, k_2, \dots, k_{l-1}, k_l$ cu ajutorul formulelor

$$k_l = y_{l-1} > 0,\ k_{l-1} = y_{l-2} - y_{l-1} \geqslant 0, \dots, k_{l-2} = y_{l-3} - y_{l-2} \geqslant 0, \dots$$
$$\dots, k_2 = y_1 - y_2 \geqslant 0,\ k_1 = m - y_1 \geqslant 0$$

şi vom lua k_1 termeni egali cu 1, k_2 termeni egali cu 2, ..., k_l termeni egali cu l. În acest caz, numărul total al termenilor va fi egal cu

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = m;$$

suma lor, după cum se verifică uşor, utilizînd expresiile numerelor $k_1, k_2, \ldots, k_l$ în funcţie de $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$, va fi egală cu

$$m + y_1 + y_2 + \ldots + y_{l-1} = m + n - m = n.$$

Este uşor de văzut că tocmai acestei sume de m termeni îi va fi asociată reprezentarea numărului $n - m$ sub forma unei sume de termeni care nu sînt mai mari decît m: $y_1 + y_2 + \ldots + y_{l-1} = n - m$.

De aici rezultă că numărul reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de m termeni întregi pozitivi este egal cu numărul reprezentărilor numărului $n - m$ sub forma unei sume de termeni întregi pozitivi care nu sînt mai mari decît m (v., de asemenea, observaţia la rezolvarea problemei b)).

Pentru $m = 3$ teorema demonstrată arată că: numărul reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de trei termeni este egal cu numărul reprezentărilor numărului $n-3$ sub forma unei sume de termeni egali cu 1, 2 şi 3. Comparînd răspunsurile problemelor 26 şi 21, a), este uşor de văzut că aceasta este într-adevăr aşa. Dacă am fi cunoscut această teoremă mai înainte, ne-am fi putut mărgini numai la rezolvarea uneia din problemele 21, a) şi 26 (deoarece rezultatele lor trebuie să coincidă).

b) Să presupunem că $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ este o descompunere a numărului n în m termeni întregi pozitivi neegali, aşezaţi în ordine crescătoare; în acest caz

$$x_1 \geqslant 1,\ x_2 > x_1 \geqslant 2,\ x_3 > x_2 \geqslant 3,\ \ldots,\ x_m > x_{m-1} \geqslant m.$$

Deci, pentru numărul

$$n - (1 + 2 + 3 + \ldots + m) = n - m(m + 1)/2$$

putem să efectuăm următoarea descompunere în m termeni întregi nenegativi care nu sînt obligatoriu diferiţi între ei:

$$n - m(m + 1)/2 = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) + \ldots + (x_m - m)$$

(o parte din ei pot fi egali cu zero!).

Să presupunem, acum, că cele mai mari dintre numerele $x_1 - 1, x_2 - 2, \ldots, x_m - m$ sînt egale cu l şi că printre aceste numere există k_0 numere egale cu 0, k_1 egale cu 1, k_2 egale cu 2, k_3 egale cu 3, ..., k_l egale cu l. În acest caz, vom avea

$$n - m(m + 1)/2 = k_0 \cdot 0 + k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + k_3 \cdot 3 + \ldots + k_l \cdot l =$$

$$= (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l) +$$

$$+ (k_2 + k_3 + \ldots + k_l) + (k_3 + \ldots + k_l) + \ldots + k_l.$$

Notînd

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l = y_1, \quad k_2 + k_3 + \ldots + k_l = y_2,$$

$$k_3 + \ldots + k_l = y_3, \ldots, k_l = y_l,$$

obţinem

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_l = n - m(m + 1)/2,$$

unde toţi termenii $y_1, y_2, \ldots, y_l$ sînt numere întregi pozitive, care nu sînt mai mari decît m, deoarece

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l \geqslant k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l \geqslant$$

$$\geqslant k_2 + k_3 + \ldots + k_l \geqslant k_3 + \ldots + k_l \geqslant \ldots \geqslant k_l$$

şi

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l = m,$$

adică este egal cu numărul termenilor $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Am arătat deci, că *fiecărei reprezentări a numărului n sub forma unei sume de m termeni întregi pozitivi diferiţi* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *i se poate asocia o reprezentare a numărului* $n - m(m + 1)/2$ *sub forma unei sume de termeni* $y_1, y_2, \ldots, y_l$, *care nu sînt mai mari decît m.*

Vom arăta acum că, reciproc, *din numerele* $y_1, y_2, \ldots, y_l$ *putem reconstitui în mod unic termenii* $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Pentru aceasta aşezînd numerele $y_1, y_2, \ldots, y_l$ în ordine necrescătoare, vom determina pe $k_1, k_2, \ldots, k_l$ şi k_0 cu ajutorul formulelor

$$k_l = y_l > 0, \quad k_{l-1} = y_{l-1} - y_l \geqslant 0,$$

$$k_{l-2} = y_{l-2} - y_{l-1} \geqslant 0, \ldots, k_1 = y_1 - y_2 \geqslant 0, \; k_0 = m - y_1$$

şi vom lua $m = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_l$ termeni $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$, din care k_0 sînt egali cu 0, k_1 sînt egali cu 1, k_2 sînt egali cu 2, ..., k_l sînt egali cu l. Punînd acum

$$x_1 = \bar{x}_1 + 1, \quad x_2 = \bar{x}_2 + 2, \quad x_3 = \bar{x}_3 + 3, \ldots, x_m = \bar{x}_m + m$$

(unde se consideră că numerele $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$ sînt aşezate în ordine crescătoare), vom obţine descompunerea numărului $[n - m(m + 1)/2] + (1 + 2 + 3 + \ldots + m) = n$ într-o sumă de m termeni neegali

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n,$$

căreia i se asociază reprezentarea

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_l = n - m(m + 1)/2$$

a numărului $n - m(m + 1)/2$ sub forma unei sume de termeni care nu sînt mai mari decît m.

O b s e r v a ţ i e. Se poate da o reprezentare sugestivă a soluţiei problemei 30, a) cu următoarea figură geometrică (fig. 38, *a*). Vom reprezenta descompunerea numărului n în sumă de m termeni întregi pozitivi în modul următor: vom figura în plan n puncte pe m coloane astfel încît în prima coloană să avem atîtea puncte cîte unităţi compun termenul cel mai mare, în a doua coloană atîtea puncte cîte unităţi compun termenul următor în ordinea mărimii (dacă există doi sau mai mulţi termeni egali între ei, care sînt cei mai mari, atunci în a doua coloană vor fi atîtea puncte ca şi în prima), în a treia vom pune atîtea puncte cîte unităţi compun termenul al treilea,..., în ultima vom pune atîtea puncte cîte unităţi are cel mai mic termen (în fig. 38, *a* este reprezentată descompunerea numărului 17 într-o sumă de şase termeni $5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 1$).

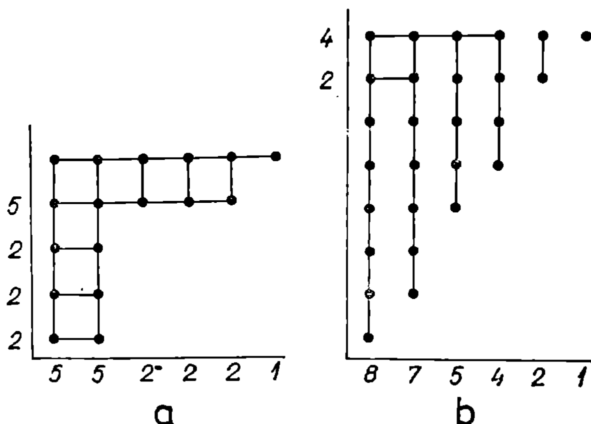


Fig. 38

Vom aşeza coloanele astfel, încît punctele de sus ale fiecărei coloane să fie situate pe o aceeaşi dreaptă orizontală: în acest caz, numărul punctelor din rîndul de sus va fi egal tocmai cu numărul termenilor, adică cu m. Vom lăsa de o parte primul rînd şi celelalte $n-m$ puncte le vom număra pe rînduri; atunci numerele $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ de puncte din diferite rînduri vor determina descompunerea numărului $n-m$ într-o sumă de termeni care nu sînt mai mari decît m (în cazul reprezentat în fig. 38, *a*, am obţinut $11 = 5 + 2 + 2 + 2$).

Reciproc, dacă ne este dată reprezentarea numărului $n-m$ sub forma unei sume de termeni $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ care nu sînt mai mari decît m, atunci aşezînd în $l-1$ rînduri orizontale cîte $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ puncte şi adăugînd deasupra încă un rînd de m puncte, vom obţine m coloane care determină descompunerea numărului n în m termeni.

În mod analog poate fi ilustrată şi soluţia problemei 30, b). Dacă reprezentarea numărului n sub forma unei sume de m termeni d i f e r i ţ i este figurată printr-o diagramă cu puncte, analoagă celei din fig. 38, *a*, atunci fiecare coloană va fi formată dintr-un număr diferit de puncte; însă, în acest caz, ultima coloană nu va conţine mai puţin decît un punct, penultima — nu mai puţin decît două,..., prima nu mai puţin decît m puncte. Vom tăia acum punctul de jos al ultimei coloane, două puncte, cele de mai jos, din penultima coloană,..., m puncte, cele de mai jos, ale primei coloane (în raţionamentul din problema 30, a), de asemenea, putem să nu înlăturăm rîndul de puncte cele mai de sus, ci să tăiem punctul de jos din fiecare coloană). Dacă vom număra acum punctele pe rînduri, vom obţine descompunerea numărului

$$n-(1 + 2 + 3 + \ldots + m) = n - m(m + 1)/2$$

într-o sumă de termeni care nu sînt mai mari decît m.

Astfel, în fig. 38, *b* sînt date reprezentarea numărului 27 sub formă de sumă de şase termeni diferiţi $8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1$ şi reprezentarea, corespunzătoare acesteia, a numărului $27-(7\cdot 6)/2 = 6$ sub forma unei sume de termeni, care nu sînt mai mari decît 6, adică $4 + 2$.

31. P r i m a r e z o l v a r e a p r o b l e m e l o r a) şi b). a) Orice număr întreg pozitiv poate fi reprezentat sub forma unui produs dintre o putere a lui 2 şi un număr impar. Să presupunem că avem reprezentarea numărului n sub forma unei sume de numere întregi pozitive diferite. Vom aşeza aceste numere în ordinea următoare: mai întîi, vom aşeza în ordine crescătoare termenii care sînt puteri ale lui 2 (printre puterile lui 2 se consideră

şi $2^0 = 1$), apoi , în aceeaşi ordine, vom aşeza termenii care sînt produse între puterile lui 2 şi 3, după aceea produsele între puterile lui 2 şi 5 etc.

Obţinem astfel

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p} + 2^{l_1} \cdot 3 + 2^{l_2} \cdot 3 + \dots + 2^{l_q} \cdot 3 +$$
$$+ 2^{m_1} \cdot 5 + 2^{m_2} \cdot 5 + \dots + 2^{m_r} \cdot 5 + \dots$$

Acestei reprezentări a numărului n i se poate asocia reprezentarea numărului n sub forma unei sume de numere întregi pozitive impare, compusă din $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p}$ de unu, din $2^{l_1} + 2^{l_2} + \dots + 2^{l_q}$ de trei, din $2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r}$ de cinci etc.

Reciproc, cu ajutorul reprezentării lui n sub forma unei sume de termeni impari se poate determina reprezentarea lui n sub forma unei sume de termeni diferiţi cu care aceasta este asociată. Să presupunem că, în reprezentarea lui n sub forma unei sume de termeni impari, s_1 termeni sînt egali cu 1, s_3 termeni sînt egali cu 3, s_5 termeni sînt egali cu 5 etc. Vom scrie numerele $s_1, s_3, s_5, \dots$ în baza 2, adică le vom reprezenta sub forma unei sume de diferite puteri ale lui 2:

$$s_1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p}, \quad s_3 = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \dots + 2^{l_q},$$
$$s_5 = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \dots + 2^{m_r} \text{ etc.}$$

Atunci este uşor de văzut că descompunerea aceasta a numărului n într-o sumă de termeni impari este asociată cu următoarea reprezentare a numărului n sub forma unei sume de termeni diferiţi:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_p} + 2^{l_1} \cdot 3 + 2^{l_2} \cdot 3 + \dots + 2^{l_q} \cdot 3 +$$
$$+ 2^{m_1} \cdot 5 + 2^{m_2} \cdot 5 + \dots + 2^{m_r} \cdot 5 + \dots$$

Deci, numărul reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de numere întregi pozitive diferite este egal cu numărul reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de termeni întregi pozitivi impari (unii dintre ei putînd fi egali).

b) Această problemă este o generalizare a problemei a) şi poate fi rezolvată în mod analog. Să presupunem că avem reprezentarea numărului n sub forma unei sume de termeni care nu sînt multipli de k; în această reprezentare termenul 1 apare de s_1 ori , ..., termenul $k - 1$ apare de s_{k-1} ori, termenul $k + 1$ apare de s_{k+1} ori etc.: $n = s_1 \cdot 1 + \dots + s_{k-1}(k - 1) + s_{k+1}(k + 1) + \dots$ Vom scrie acum fiecare dintre numerele $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots$ în baza k:

$$s_1 = q_0^{(1)} + q_1^{(1)} \cdot k + q_2^{(1)} \cdot k^2 + q_3^{(1)} k^3 + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s_{k-1} = q_0^{(k-1)} + q_1^{(k-1)} k + q_2^{(k-1)} k^2 + q_3^{(k-1)} k^3 + \dots$$
$$s_{k+1} = q_0^{(k+1)} + q_1^{(k+1)} k + q_2^{(k+1)} k^2 + q_3^{(k+1)} k^3 + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

unde „cifrele“ $q_0^{(1)}$, $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}$, $q_3^{(1)}$, ..., pot lua valorile 0, 1, 2, ..., $k-1$. În acest caz, putem asocia reprezentării numărului n sub forma unei sume de termeni o altă reprezentare în care nici unul din termeni nu se repetă mai mult de $k-1$ ori:

$$n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{de } q_0^{(1)} \text{ ori}} + \underbrace{k + \dots + k}_{\text{de } q_1^{(1)} \text{ ori}} + \underbrace{k^2 + \dots + k^2}_{\text{de } q_2^{(1)} \text{ ori}} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{2 + \dots + 2}_{\text{de } q_0^{(2)} \text{ ori}} + \underbrace{2k + \dots + 2k}_{\text{de } q_1^{(2)} \text{ ori}} + \underbrace{2k^2 + \dots + 2k^2}_{\text{de } q_2^{(2)} \text{ ori}} \dots$$

....

$$\dots + \underbrace{(k+1) + \dots + (k+1)}_{\text{de } q_0^{(k+1)} \text{ ori}} + \underbrace{(k+1)k + \dots + k+1)k}_{\text{de } q_1^{(k+1)} \text{ ori}} +$$

$$+ \underbrace{(k+1)k^2 + \dots + (k+1)k^2}_{\text{de } q_2^{(k+1)} \text{ ori}} + \dots$$

....

Reciproc, cu ajutorul ultimei reprezentări a numărului n sub forma unei sume de termeni, din care nici unul nu se repetă de k sau de mai multe ori, se poate reconstitui reprezentarea inițială a aceluiași număr sub forma unei sume de termeni, din care nici unul nu se divide cu k. De aici rezultă că numărul reprezentărilor de un tip sau altul este același.

A doua rezolvare a problemelor a) și b). Vom da aici încă o demonstrație esențial diferită a teoremelor din problemele a) și b); pentru aceasta ne vom mărgini la teorema din problema b), deoarece teorema din problema a) este un caz particular al acesteia.

Vom nota cu $p(n)$ numărul reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de termeni întregi pozitivi, iar numărul reprezentărilor în care m_1 termeni sînt egali cu a_1, m_2 termeni sînt egali cu a_2, ..., m_k termeni sînt egali cu a_k, ceilalți termeni fiind oarecare, îl vom nota cu $p(n;\ a_1, a_2, \dots, a_k;\ m_1, m_2, \dots, m_k)$. Evident că reprezentările de ultimul gen există numai în acel caz în care $m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_ka_k < n$ și în plus

$$p(n;\ a_1,\ a_2, \dots, a_k;\ m_1,\ m_2, \dots, m_k) = p[n - (m_1a_1 + m_1a_2 + \dots + m_ka_k)].$$

Fie A numărul reprezentărilor lui n sub forma unei sume de termeni, din care nici unul nu se divide cu k. Pentru a obține numărul A, trebuie ca din $p(n)$ să scădem numărul acelor reprezentări ale lui n sub forma unei sume de termeni, în care cel puțin unul din termeni se divide cu k:

$$p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \dots].$$

Dar, în această expresie, fiecare reprezentare a numărului n sub forma unei sume de termeni, dintre care doi se divid cu k, se scade de două ori

din numărul $p(n)$; deci, această expresie trebuie completată cu suma totală a tuturor acestor reprezentări:

$$p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \ldots] +$$

$$+ [p(n;\ k,\ 2k;\ 1,\ 1) + p(n;\ k,\ 3k;\ 1,\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1,\ 1) + \ldots].$$

Însă nici această expresie a lui A nu este definitivă. Aici fiecare reprezentare a numărului n sub forma unei sume de termeni dintre care t r e i (ak, bk, ck) se divid cu k se scade inițial de trei ori din $p(n)$ este considerată în expresiile $p(n;\ ak;\ 1)$, $p(n;\ bk;\ 1)$, $p(n;\ ck;\ 1)$], iar apoi se adaugă de trei ori la $p(n)$ [deoarece este cuprinsă în următoarele expresii, $p(n;\ ak;\ bk;\ 1,\ 1)$, $p(n;\ ak;\ ck;\ 1,\ 1)$, $p(n;\ bk;\ ck;\ 1,\ 1)$]. Deoarece această reprezentare trebuie scăzută din numărul $p(n)$, rezultă expresia

$$p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \ldots] +$$

$$+ [p(n;\ k,\ 2k;\ 1,\ 1) + p(n;\ k,\ 3k;\ 1,\ 1) + p(n;\ 2k;\ 3k;\ 1,\ 1) + \ldots] -$$

$$- [p(n;\ k,\ 2k,\ 3k;\ 1,\ 1,\ 1) + p(n;\ k,\ 2k,\ 4k;\ 1,\ 1,\ 1) + \ldots].$$

Continuînd raționamentul în același mod, obținem în definitiv formula (compară cu prima soluție a problemei 78, *a*):

$$A = p(n) - [p(n;\ k;\ 1) + p(n;\ 2k;\ 1) + p(n;\ 3k;\ 1) + \ldots] +$$

$$+ [p(n;\ k,\ 2k;\ 1,\ 1) + p(n;\ k,\ 3k,;\ 1,\ 1) + p(n;\ 2k,\ 3k;\ 1,\ 1) + \ldots] -$$

$$- [p(n;\ k,\ 2k,\ 3k;\ 1,\ 1,\ 1) + p(n;\ k,\ 2k,\ 4k;\ 1,\ 1,\ 1) + \ldots] +$$

$$+ [p(n;\ k,\ 2k,\ 3k,\ 4k;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) + \ldots] - \ldots =$$

$$= p(n) - [p(n-k) + p(n-2k) + p(n-3k) + \ldots] +$$

$$+ \{p[n-(1+2)k] + p([n-(1+3)k] + p[n-(2+3)k] + \ldots\} -$$

$$- \{p([n-(1+2+3)k] + p[n-(1+2+4)k] + \ldots\} +$$

$$+ \{p[n-(1+2+3+4)k] + \ldots\} - \ldots$$

La fel, numărul B al reprezentărilor numărului n sub forma unei sume de termeni, dintre care k termeni oarecare nu sînt egali între ei, se obține scăzînd din $p(n)$ toate acele reprezentări în care un termen oarecare apare de k ori:

$$p(n) - [p(n;\ 1;\ k) + p(n;\ 2;\ k) + p(n;\ 3;\ k) + \ldots].$$

În ultima expresie, toate reprezentările numărului n sub forma unei sume de termeni în care doi termeni diferiți se repetă de k ori se scad din $p(n)$ de

două ori. Raţionînd ca mai sus, ajungem, în definitiv, la următoarea expresie pentru numărul B:

$$B = p(n) - [p(n;\ 1;\ k) + p(n;\ 2;\ k) + p(n;\ 3;\ k) + \dots] +$$
$$+ [p(n;\ 1,\ 2;\ k,\ k) + p(n;\ 1,\ 3;\ k,\ k) + p(n;\ 2,\ 3;\ k,\ k) + \dots] -$$
$$- [p(n;\ 1,\ 2,\ 3;\ k,\ k,\ k) + p(n;\ 1,\ 2,\ 4;\ k,\ k,\ k) + \dots] +$$
$$+ [p(n;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ k,\ k,\ k,\ k) + \dots] - \dots =$$
$$= p(n) - [p(n-k) + p(n-2k) + p(n-3k) + \dots] +$$
$$+ \{p[n-(1+2)k] + p[n-(1+3)k] + p[n-(2+3)k] + \dots\} -$$
$$- \{p[n-(1+2+3)k] + p[n-(1+2+4)k] + \dots\} +$$
$$+ \{p(n-(1+2+3+4)k] + \dots\} - \dots$$

Comparînd expresiile lui A şi B, ne convingem că $A = B$, ceea ce trebuia demonstrat.

32. a) O tablă de şah cu n^2 pătrate (v. fig. 39, unde este reprezentat cazul $n = 8$) conţine n orizontale şi n verticale. Pentru ca nici o pereche de turnuri aşezate pe această tablă să nu se ameninţe, este necesar ca nici o pereche de turnuri să nu stea pe o aceeaşi orizontală sau pe o aceeaşi verticală. De aici este clar că numărul total de turnuri nu poate fi mai mare decît n, iar n turnuri pot fi aşezate astfel încît să nu avem două turnuri care să se ameninţe: pentru aceasta este suficient, de exemplu, să aşezăm aceste turnuri de-a lungul oricăreia dintre diagonalele principale ale tablei de şah.

Se va stabili acum cîte configuraţii diferite ale celor n turnuri verifică condiţiile noastre. Se va numi primul turn acel turn care stă pe prima verticală, al doilea turn acela care stă pe a doua verticală etc. pînă la al n-lea turn care stă pe a n-a verticală. Primul turn poate fi aşezat pe oricare dintre cele n orizontale, după aceea al doilea poate fi aşezat pe oricare dintre celelalte $n-1$ orizontale (orizontala ocupată de primul turn fiind eliminată, deoarece nici o pereche de turnuri nu trebuie să se ameninţe), al treilea turn poate fi aşezat pe oricare dintre cele $n-2$ orizontale rămase neocupate etc., pînă la al $(n-1)$-lea turn pentru care poate fi aleasă una dintre cele două orizontale neocupate de cele $n-2$ turnuri precedente, pînă la ultimul turn pentru care rămîne o singură orizontală neocupată. Asociind n aşezări diferite ale primului turn cu $n-1$ aşezări diferite ale celui de-al doilea turn, vom obţine $n(n-1)$ moduri posibile de aşezare a primelor două turnuri; la fel se obţin $n(n-1)(n-2)$ moduri posibile pentru primele trei turnuri, $n(n-1)(n-2)(n-3)$ pentru primele patru turnuri, ..., $n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1$ moduri diferite de aşezare pentru toate cele n turnuri. Astfel, numărul căutat al configuraţiilor diferite este egal cu

$$1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)\cdot n = n!$$

În particular, pentru tabla de şah obişnuită, pentru care $n = 8$, obţinem

$$8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40\,320$$

configuraţii diferite.

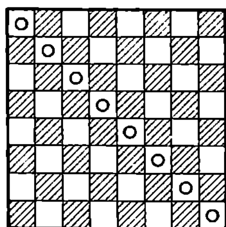


Fig. 39

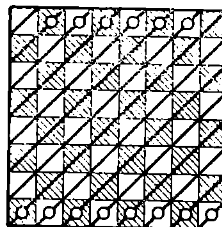


Fig. 40

b) Pătratele unei table de şah cu n^2 pătrate nu pot fi toate ameninţate, dacă avem pe tablă mai puţin de n turnuri. Într-adevăr, în acest caz există cel puţin o verticală pe care nu stă nici un turn; cele n pătrate ale acestei verticale nu pot fi ameninţate de turnurile aşezate, deoarece numărul turnurilor este mai mic decît n şi nici unul dintre ele nu poate ţine sub ameninţare, în acelaşi timp, două pătrate ale verticalei considerate; n turnuri care să satisfacă condiţiile problemei pot fi, evident, aşezate convenabil (v., de exemplu, fig. 39).

Dacă n turnuri aşezate pe o tablă de şah cu n^2 pătrate ţin sub ameninţare toate pătratele tablei, atunci sau pe fiecare verticală a tablei stă cîte un turn sau pe fiecare orizontală stă cîte un turn. Într-adevăr, dacă ar exista în acelaşi timp o verticală şi o orizontală pe care nu se află turnuri, atunci pătratul de la intersecţia lor nu ar fi ameninţat. Însă numărul modurilor de aşezare a cîte unui turn pe fiecare dintre cele n verticale este egal cu n^n (primul turn poate fi aşezat în n moduri pe cîte unul dintre pătratele primei verticale; al doilea, independent de primul, poate fi aşezat în n moduri pe cîte unul dintre pătratele celei de-a doua verticale etc.). Numărul modurilor de aşezare a n turnuri cîte unul pe fiecare dintre cele n orizontale este evident, de asemenea, egal cu n^n. La prima vedere s-ar părea că numărul total de configuraţii a n turnuri, astfel ca ele să ţină sub ameninţare toate pătratele tablei, este egal cu $n^n + n^n = 2n^n$. Dar, într-un astfel de calcul, luăm de două ori fiecare configuraţie în care pe fiecare verticală stă cîte un turn, şi în acelaşi timp pe fiecare orizontală stă cîte un turn. Deoarece numărul total al acestor ultime configuraţii este egal cu $n!$ (v. rezolvarea problemei a)), răspunsul corect la întrebarea pusă este $2n^n - n!$.

În particular, pentru tabla de şah obişnuită ($n = 8$), obţinem

$$2\cdot 8 - 8! = 33\,514\,312$$

configuraţii diferite.

33. a) Să considerăm, pe o tablă de şah obişnuită cu 64 pătrate, diagonalele care merg de la stînga în sus spre dreapta. Vom avea 15 astfel de diagonale: 8 diagonale care pornesc din pătratele primei verticale şi 7 diagonale care pornesc din pătratele primei orizontale ce nu aparţin primei verticale (fig. 40). Dacă nici o pereche de nebuni nu se ameninţă, atunci pe oricare

dintre diagonale nu poate sta mai mult decît un nebun; deci numărul total de nebuni nu poate fi mai mare decît 15. În același timp, însă 15 nebuni nu pot fi așezați convenabil; printre cele 15 diagonale considerate, diagonalele marginale sînt fiecare formate din cîte un singur pătrat, iar aceste două pătrate sînt așezate pe o aceeași diagonală, care merge de la dreapta în sus spre stînga (pe diagonala, principală, v. fig. 40); deci pe aceste două pătrate nu putem așeza nebuni. Astfel, numărul maxim căutat de nebuni nu este mai mare decît 14.

14 nebuni pot fi așezați în modul dorit, ceea ce arată, de exemplu, fig. 40. Acesta este, deci, numărul maxim de nebuni care pot fi așezați pe tabla de șah cu 64 pătrate, astfel încît nici o pereche de nebuni să nu se amenințe.

În cazul mai general al tablei cu n^2 pătrate, același raționament arată că numărul maxim de nebuni este egal cu $2n - 2$.

b) Se va arăta că nu pot fi ținute sub amenințare toate pătratele tablei cu 64 de pătrate cu un număr mai mic de opt nebuni. Într-adevăr, această tablă de șah are opt diagonale „albe" (diagonale formate din pătrate albe) care merg de la stînga în sus spre dreapta (fig. 41, *a*). Dacă avem pe tablă mai puțin de patru nebuni „albi" (adică așezați pe pătrate albe), atunci pe cel puțin cinci dintre aceste diagonale nu stă nici un nebun și, cum este ușor de văzut, cel puțin una dintre diagonalele libere va fi formată din mai mult de trei pătrate. Deoarece nici unul din nebuni nu poate să amenințe mai mult de un pătrat al unei astfel de diagonale libere și deoarece numărul total al nebunilor „albi" de pe tablă, după cum am presupus, nu este mai mare decît trei, rezultă că pătratele celei mai mari dintre diagonalele „albe" libere vor fi ținute toate sub amenințare. Astfel, pentru ca toate pătratele să fie amenințate, trebuie ca numărul total de nebuni „albi" să nu fie mai mic decît patru. La fel se demonstrează că, pentru ca toate pătratele tablei de șah să fie ținute sub amenințare, trebuie să avem pe tablă nu mai puțin de patru nebuni

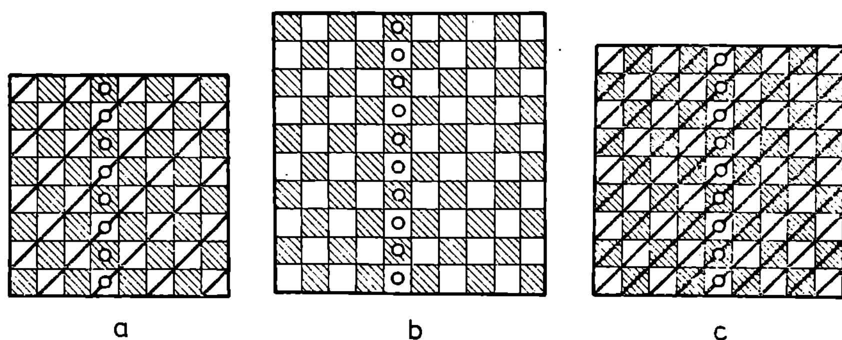


Fig. 41

„negri"; în acest caz, va trebui să considerăm cele opt diagonale negre care merg de la dreapta în sus spre stînga.

Opt nebuni pot fi așezați pe o tablă de șah cu 64 pătrate în așa fel, încît toate pătratele tablei să se afle sub amenințare (v., de exemplu, fig. 41, *a*).

În mod analog se demonstrează că cel mai mic număr de nebuni care pot fi așezați pe o tablă de şah cu n^2 pătrate, unde n este un număr par oarecare, astfel ca toate pătratele tablei să fie ţinute sub amenințare, este egal cu n. Ca exemplu, în fig. 41,*b* este arătată așezarea a 10 nebuni pe o tablă de şah cu 100 pătrate, în care toate pătratele tablei se află sub amenințare.

În cazul lui n impar situația este puțin diferită deoarece, de data aceasta, numărul de pătrate albe și negre este diferit. Însă și în acest caz problema poate fi rezolvată printr-un raționament asemănător aceluia din cazul tablei cu 64 pătrate. Ca exemplu se va considera tabla cu 81 pătrate reprezentată în fig. 41, *c*. Această tablă are nouă diagonale „albe" care merg de la stînga în sus spre dreapta. Dacă pe tablă avem mai puțin de cinci nebuni „albi", atunci cel puțin cinci dintre diagonalele „albe" nu vor fi ocupate de nebuni, și cel puțin una dintre aceste diagonale „libere" va avea mai mult de patru pătrate. De aici rezultă că, pentru ca toate pătratele tablei să fie amenințate, pe tabla cu 81 de pătrate trebuie să avem nu mai puțin de cinci nebuni „albi". Mai departe, tabla noastră are opt diagonale „negre" care merg de la stînga în sus spre dreapta şi pentru ca toate pătratele să fie ținute sub amenințare, pe aceste diagonale trebuie să stea nu mai puțin de patru nebuni „negri". În definitiv, numărul total de nebuni care țin sub amenințare toate pătratele tablei cu 81 de pătrate nu poate fi mai mic decît nouă; evident că nouă nebuni pot fi așezați astfel, încît să țină sub amenințare toate pătratele tablei (v., de exemplu, fig. 41, *c*).

Acest raționament se aplică și în cazul oricărui n impar; în acest caz, de asemenea, cel mai mic număr de nebuni care pot fi așezați astfel încît toate pătratele să fie ținute sub amenințare este egal cu n.

34. a) Deoarece un nebun care stă pe un pătrat alb (nebun „alb") ține sub amenințare numai pătratele albe, iar un nebun care stă pe un pătrat negru (nebun „negru") amenință numai pătratele negre, rezultă că problema așezării celui mai mare număr de nebuni care nu se amenință doi cîte doi poate fi considerată ca o reunire a următoarelor două probleme independente: să se determine cel mai mare număr de nebuni „albi" care pot fi așezați astfel, încît să nu se amenințe doi cîte doi și, la fel, cel mai mare număr de nebuni „negri". Însă, în cazul lui n par, ansamblul tuturor pătratelor albe ale tablei și ansamblul tuturor pătratelor negre sînt aceleași: ele coincid printr-o rotație a tablei cu 90° în jurul centrului său. Astfel, numărul cel mai mare căutat de nebuni „albi" va fi egal, în acest caz, cu numărul cel mai mare corespunzător de nebuni „negri" (conform rezultatului problemei 33, a) amîndouă aceste numere sînt egale cu $n — 1$). Cei $n — 1$ de nebuni „albi" pot fi așezați astfel, încît să nu se amenințe, doi cîte doi, în tot atîtea moduri diferite în cîte moduri pot fi așezați și cei $n — 1$ nebuni „negri". Numărul total de moduri de așezare a $2n — 2$ de nebuni îl vom obține asociind fiecare din modurile de așezare a celor $n — 1$ de nebuni „albi" cu fiecare dintre modurile de așezare a celor $n — 1$ nebuni „negri"; deci acest număr total este egal cu pătratul numărului modurilor de așezare a $n — 1$ de nebuni de aceeași culoare.

b) Rezolvarea problemei este în totul analoagă cu rezolvarea problemei a).

35. a) Un nebun aşezat pe unul dintre pătratele marginale ale tablei amenință totdeauna exact n pătrate (considerînd și pătratul ocupat de el): astfel, dacă nebunul stă pe orizontala superioară sau pe cea inferioară, atunci pe fiecare verticală se află cîte un pătrat ținut sub amenințare. Este uşor de verificat, mai departe, că un nebun care nu stă pe un pătrat marginal ține totdeauna sub amenințare un număr de pătrate mai mare decît n.

Se presupune acum că pe tabla de şah cu n^2 pătrate sînt aşezați $2n - 2$ nebuni astfel ca să nu existe doi nebuni care să se amenințe (v. problema 33, a)). În acest caz, fiecare pătrat neocupat de nebunii considerați poate fi ținut sub amenințare de cel mult doi dintre ei (deoarece prin acest pătrat trec două diagonale); fac excepție pătratele din colțuri care pot fi amenințate de cel mult unul dintre nebuni (prin pătratele din colțuri trece o singură diagonală). Dar din cele patru pătrate din colțurile tablei numai două pot fi ocupate de nebuni; altfel, doi din aceştia s-ar amenința reciproc. Astfel, cei $2n - 2$ nebuni pot să țină sub o dublă amenințare cel mult

$$n^2 - (2n - 2) - 2 = n^2 - 2n$$

pătrate și pot amenința o singură dată celelalte $2n$ pătrate ($2n - 2$ pătrate ocupate de nebuni și două pătrate din colțuri), adică numărul pătratelor amenințate de primul nebun, numărul pătratelor amenințate de-al doilea nebun, ..., numărul pătratelor amenințate de al $(2n - 2)$-lea nebun nu poate fi mai mare decît

$$(n^2 - 2n) \cdot 2 + 2n \cdot 1 = 2n^2 - 2n = (2n - 2)n.$$

În cazul în care toți cei $2n - 2$ nebuni sînt aşezați pe pătrate marginale ale tablei, fiecare dintre ei ține sub amenințare n pătrate; deci suma formată din numărul de pătrate amenințate de primul nebun, numărul de pătrate amenințate de al doilea nebun etc. este egală cu $(2n - 2)n$. În cazul în care cel puțin unul dintre nebuni nu stă pe un pătrat marginal, această sumă va fi mai mare decît $(2n - 2)\, n$, ceea ce, după cum am mai arătat, nu este posibil. Deci, toți nebunii trebuie, în mod obligatoriu, să fie așezați pe pătrate marginale ale tablei.

b) Se consideră un pătrat oarecare marginal (dar nu din colțuri) ale tablei (de exemplu, pătratul de pe orizontala de jos, notat cu un cerc în fig. 42). Se duc cele două diagonale care trec prin acest pătrat; aceste diagonale se termină în alte două pătrate marginale notate în fig. 42 prin cruciulițe. Prin pătratele notate cu cruciulițe se duc acum celelalte două diagonale: aceste diagonale vor avea extremitatea în același pătrat marginal, simetric față de centru cu pătratul de la care am pornit (în fig. 42 acest ultim pătrat este notat de asemenea cu un cerc).

Se consideră, acum, o aşezare oarecare a $2n - 2$ nebuni pe tablă, astfel încît nici o pereche de nebuni să nu se amenințe. Conform rezultatului problemei a), toți nebunii considerați trebuie să fie aşezați pe pătratele marginale ale tablei. Dacă unul din nebuni este așezat pe pătratul de jos, notat în fig. 42 printr-un cerc, pătratele notate cu cruciulițe trebuie să rămînă libere (ele se află sub amenințarea nebunului de jos); în acest caz, pătratul de sus, notat printr-un cerc, trebuie de asemenea să fie ocupat de un nebun, deoarece altfel ar rămîne libere cele două diagonale trasate în partea superioară a figurii.

Reciproc, dacă cel puțin unul dintre pătratele notate prin cruciulițe este ocupat de un nebun, trebuie ca și pe al doilea pătrat de acest fel să stea un nebun, iar pătratele notate prin cercuri să rămînă libere. Astfel, există două moduri de așezare a nebunilor pe cele patru pătrate marginale notate pe figură:

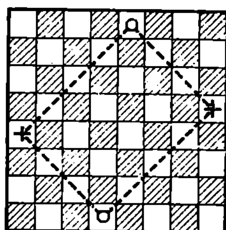


Fig. 42

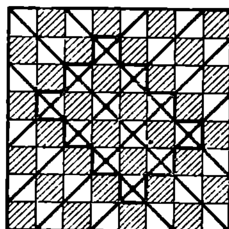


Fig. 43

nebunii pot sta sau pe pătratele notate prin cercuri sau pe pătratele notate prin cruciulițe. Este clar că unul dintre aceste moduri posibile trebuie să fie neapărat realizat: dacă toate cele patru pătrate ar rămîne libere, am mai putea adăuga încă doi nebuni la cei așezați mai înainte.

Ca prim pătrat notat prin cerc poate fi ales oricare dintre cele $n-2$ pătrate din rîndul de jos, dar nu din colțuri: vom obține astfel $n-2$ dreptunghiuri diferite formate din diagonale, de felul celui reprezentat în figură. Pe toate aceste dreptunghiuri, trebuie să așezăm cîte doi nebuni în cîte una din cele două perechi de vîrfuri opuse, indiferent de perechea în care îi vom așeza, cele două vîrfuri putînd fi alese cu totul arbitrar. Este clar că alegerea unei perechi de vîrfuri într-un dreptunghi oarecare poate rămîne independentă de alegerea perechilor în celelalte dreptunghiuri. Asociind două moduri de alegere posibile în primul dreptunghi cu două moduri de alegere posibile pentru al doilea, cu două moduri de alegere posibile pentru al treilea etc. pînă la cele două moduri de alegere posibile pentru al $(n-2)$-lea, vom obține în total 2^{n-2} moduri de alegere diferite. După aceasta nu mai rămîne să cercetăm decît pătratele din colțuri — pe pătratele marginale, dar care nu se află în colțuri, am așezat cel mai mare număr posibil de nebuni [anume $2(n-2)$]. Pe cele patru pătrate din colțuri pot fi așezați, evident, doi nebuni astfel încît ei să nu se amenințe, iar acest lucru se poate realiza în patru moduri diferite (pe fiecare dintre cele două diagonale principale putem așeza cîte un nebun în fiecare dintre cele două extremități ale diagonalei). Asociind cele patru moduri de așezare a nebunilor din colțuri cu 2^{n-2} moduri de așezare a celorlalți, vom obține în total $4 \cdot 2^{n-2} = 2^n$ așezări diferite ale celor $2n-2$ nebuni. Deci, numărul căutat de moduri de așezare este egal cu 2^n.

În particular, pentru $n = 8$ se obțin în total $2^8 = 256$ moduri de așezare diferite.

O b s e r v a ț i e. De aici rezultă, desigur, și afirmația din enunțul problemei 34, a): pentru n par: $2^n = (2^{n/2})^2$.

36. a) Tabla de șah cu 64 pătrate are opt diagonale „albe“ care merg de la stînga în sus la dreapta (v. fig. 41, *a*). Pe aceste opt diagonale trebuie să așezăm patru nebuni, astfel încît toate pătratele albe să fie ținute sub amenințare (v. rezolvarea problemei 33, b)). Acești patru nebuni trebuie să ocupe

cele patru diagonale „albe“ din centru: altfel ar rămîne liberă diagonala „albă“ formată din mai mult de patru pătrate și nu toate pătratele ar putea fi amenințate. Să mai observăm că, pentru ca toate pătratele de pe cele patru diagonale „albe“ neocupate de nebuni și care merg de la stînga în sus spre dreapta să fie ținute sub amenințare, nebunii trebuie să ocupe trei dintre diagonalele centrale „albe“ care merg de la dreapta în sus spre stînga (fig. 43).

De aici, nu este greu să determinăm numărul unor astfel de moduri de așezare pe tablă a patru nebuni „albi“, astfel încît toate pătratele albe să fie ținute sub amenințare. Cele trei diagonale centrale „albe“, care merg de la dreapta în sus spre stînga, pot fi ocupate de trei nebuni așezați, în același timp, pe cele patru diagonale din mijloc, care merg de la stînga în sus spre dreapta, în $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ moduri: prima din diagonalele centrale, care merg de la dreapta în sus spre stînga, poate fi ocupată de un nebun care stă pe oricare din cele patru diagonale centrale care merg de la stînga în sus spre dreapta; a doua poate fi ocupată de un nebun care stă pe oricare din celelalte trei diagonale care merg de la stînga în sus spre dreapta și a treia poate fi ocupată de un nebun care stă pe oricare din celelalte diagonale care merg de la stînga în sus spre dreapta. Mai departe, dintre aceste 24 de moduri de așezare jumătate, adică 12, lasă neocupată una dintre cele două diagonale centrale, care merg de la stînga în sus spre dreapta; pe această diagonală ultimul nebun poate fi așezat pe oricare dintre cele șapte pătrate, 12 moduri de așezare lasă neocupată una dintre cele două diagonale formate din cinci pătrate, pe fiecare dintre ele putînd fi așezat nebunul rămas. Astfel, numărul total de moduri de așezare a nebunilor „albi“ este egal cu

$$12 \cdot 7 + 12 \cdot 5 = 84 + 60 = 144.$$

La fel, numărul de moduri de așezare a nebunilor „negri“ pentru care toate pătratele negre ale tablei sînt ținute sub amenințare este egal cu 144. Asociind fiecare dintre modurile de așezare a nebunilor „albi“ cu fiecare dintre modurile de așezare a nebunilor „negri“, vom obține în total

$$144 \cdot 144 = 20\,736$$

moduri în care pot fi așezați opt nebuni astfel ca toate pătratele tablei să fie ținute sub amenințare (v. problema 34, b)).

b) Se consideră o tablă de șah cu 100 pătrate (v. fig. 41, *b*). Această tablă are 10 diagonale „albe“ care merg în direcția de la stînga în sus spre dreapta. Cinci nebuni „albi“ trebuie să ocupe cinci astfel de diagonale, iar cele patru diagonale centrale, care conțin fiecare mai mult de cinci pătrate, trebuie neapărat să fie ocupate. Mai departe, trebuie să fie ocupate cele cinci diagonale centrale, care merg de la dreapta în sus spre stînga; aceste diagonale se termină cu pătrate care aparțin celor șase diagonale „albe“ marginale, care merg de la stînga în sus spre dreapta.

Cele patru diagonale „albe“ centrale, care merg de la stînga în sus spre dreapta, pot fi ocupate în $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ moduri: prima dintre aceste diagonale poate fi ocupată de un nebun, care stă pe oricare dintre cele cinci diagonale „albe“ centrale care merg de la dreapta în sus spre stînga; a doua poate fi ocupată de un nebun care stă pe oricare dintre celelalte patru diagonale etc.

În acest caz $120/5 = 24$ dintre aceste moduri de așezare lasă liberă diagonala centrală care merge de la dreapta în sus spre stînga, pe care ultimul nebun poate fi așezat în zece moduri; $2 \cdot \frac{120}{5} = 48$ dintre aceste moduri de așezare lasă liberă una dintre cele două diagonale „albe" care merg de la dreapta în sus spre stînga și sînt formate din opt pătrate, iar $2 \cdot \frac{120}{5} = 48$ moduri de așezare lasă libere una dintre diagonalele „albe" care merg de la dreapta în sus spre stînga, fiind formate din șase pătrate. Deci, numărul total al modurilor posibile de așezare a cinci nebuni „albi" astfel încît toate pătratele albe să fie ținute sub amenințare este egal cu

$$24 \cdot 10 + 48 \cdot 8 + 48 \cdot 6 = 912.$$

La fel, numărul modurilor posibile de așezare a nebunilor „negri", astfel încît toate pătratele negre ale tablei să fie ținute sub amenințare este egal cu 912. Asociind fiecare dintre modurile de așezare a nebunilor „albi" cu fiecare dintre modurile de așezare a nebunilor „negri", vom obține în total

$$912 \cdot 912 = 831\ 744$$

moduri de așezare a 10 nebuni, astfel încît toate pătratele tablei să fie ținute sub amenințare.

c) Se consideră tabla de șah cu 81 pătrate (v. fig. 41, *c*). Această tablă conține opt diagonale „negre" care merg de la stînga în sus spre dreapta. Trebuie să așezăm pe aceste diagonale patru nebuni, astfel încît toate pătratele negre ale tablei să fie ținute sub amenințare (v. rezolvarea problemei 33, b)). Nu este greu de observat că, printre aceste opt diagonale, trebuie să fie ocupate diagonalele centrale, deoarece fiecare dintre ele conține mai mult de patru pătrate care nu pot fi toate amenințate de patru nebuni așezați pe alte diagonale. În acest caz, așezarea nebunilor trebuie să fie astfel încît să amenințe și toate celelalte pătrate negre ale tablei. Însă aceste pătrate se află pe patru diagonale centrale „negre" îndreptate de la dreapta în sus spre stînga.

De aici rezultă că numărul modurilor de așezare a nebunilor „negri" este egal cu

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

(prima dintre diagonalele centrale „negre" pornind de la dreapta în sus spre stînga poate fi ocupată de un nebun, care poate sta pe oricare dintre cele patru diagonale centrale „negre" îndreptate de la stînga în sus spre dreapta; a doua de un nebun care poate sta pe oricare dintre celelalte trei diagonale orientate de la stînga în sus spre dreapta etc.).

Întrucîtva diferit se determină numărul modurilor posibile de așezare a nebunilor „albi". Tabla de șah considerată are nouă diagonale „albe" îndreptate de la stînga în sus spre dreapta. Pe pătratele acestor diagonale trebuie să așezăm cinci nebuni. În acest caz, evident, trebuie să ocupăm trei astfel de diagonale centrale, deoarece ele conțin mai mult de cinci pătrate. La fel, trebuie să ocupăm trei diagonale centrale „albe" îndreptate de la dreapta în

sus spre stînga. Însă, excluzînd pătratele albe care aparțin acestor nouă diagonale, ne mai rămîn numai patru pătrate libere, notate cu cruciulițe în fig. 44. Pentru a ține sub amenințare aceste patru pătrate trebuie, evident, să avem nu mai puțin de doi nebuni, iar acești doi nebuni pot fi așezați pe oricare două dintre pătratele albe notate cu cruciulițe. Evident, doi nebuni pot fi așezați pe două dintre cele patru pătrate considerate în

$$4 \cdot 3 = 12$$

moduri diferite. După aceasta ne mai rămîne să folosim trei nebuni liberi pentru a ocupa trei dintre diagonalele centrale „albe“ care merg de la stînga în sus spre dreapta și trei dintre diagonalele „albe“ care merg de la dreapta în sus spre stînga. Deci fiecare nebun trebuie să ocupe, în același timp, una dintre diagonalele care merg de la stînga în sus spre dreapta și una dintre diagonalele care merg de la dreapta în sus spre stînga. Numărul de moduri în care pot fi așezați acești trei nebuni este, evident, egal cu

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

În definitiv, numărul total de moduri în care pot fi așezați nouă nebuni pe o tablă cu 81 pătrate astfel încît să țină sub amenințare toate pătratele tablei este egal cu

$$24 \cdot 12 \cdot 6 = 1\,728.$$

d) În mod cu totul analog cu rezolvarea problemelor a)—c) se poate arăta că numărul căutat este egal cu:

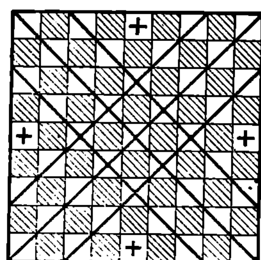
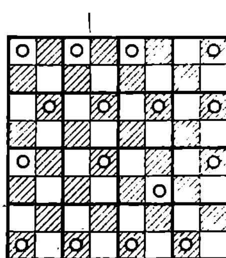
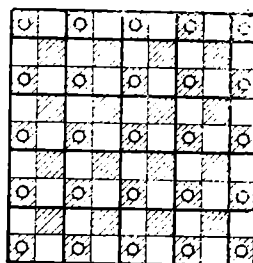


Fig. 44



a



b

Fig. 45

pentru $n = 4k$

$$\left\{\frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots 2}{k}[(4k-1)+(4k-3)+\ldots+(2k+1)]\right\}^2 =$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{k}\cdot\frac{(4k-1)+(2k+1)}{2}(k-1)\right]^2=\left[\frac{3n-12}{4}\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2;$$

pentru $n = 4k + 2$

$$\left\{\frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\dots 2}{2k+1}[(4k+2)+2(4k)+2(4k-2)+\dots+2(2k+2)]\right\}^2 =$$

$$= \left\{\left(\frac{n-2}{2}\right)! \left[(4k+2) + 2\,\frac{4k+(2k+2)}{2}\cdot k\right]\right\}^2 = \left[\frac{3n^2+4}{8}\left(\frac{n-2}{2}\right)!\right]^2;$$

pentru $n = 2k + 1$

$$[k(k-1)(k-2)\dots 1][12(k-1)(k-2)(k-3)\dots 1] = (6n-6)\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2.$$

Observație. Rezultatul acestei probleme confirmă, în particular, exactitatea propoziției din problema 34, b): pentru $n = 4k$ și $n = 4k + 2$ numărul căutat este un pătrat perfect.

37. a) Se va împărți tabla de șah în 16 pătrate, fiecare dintre ele fiind compus din patru pătrate, cum se arată în fig. 45,*a*. Așezînd regii astfel ca nici o pereche să nu se amenințe, în fiecare dintre aceste 16 pătrate nu poate sta mai mult decît un rege. De aici rezultă că nu pot fi așezați mai mult de 16 regi ca ei să nu se amenințe doi cîte doi. Însă 16 regi, care să nu se amenințe doi cîte doi, pot fi așezați pe o tablă de șah cu 64 pătrate: aceasta se vede, de exemplu, în fig. 45, *a*. Deci, cel mai mare număr de regi în condițiile date este egal cu 16.

b) Dacă numărul n este par, $n = 2k$, problema se rezolvă la fel ca problema a). Anume, în acest caz, se împarte tabla în $(n/2)^2 = k^2$ pătrate mai mici, formate din cîte patru pătrate. Deoarece în fiecare dintre aceste pătrate nu putem așeza doi regi care să nu se amenințe, se deduce că numărul căutat de regi nu poate fi mai mare decît k^2. Pe o tablă cu $(2k)^2$ pătrate pot fi așezați desigur k^2 regi, care să nu se amenințe; pentru aceasta este suficient, de exemplu, să-i așezăm așa cum se arată în fig. 45, *a* în cazul $n = 8$. De aici rezultă că, pentru n par, numărul cel mai mare de regi căutat este egal cu $n^2/4$.

Se presupune acum că numărul n este impar: $n = 2k + 1$. Vom împărți tabla în

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = (k+1)^2$$

părți mai mici, așa cum se arată în fig. 45, *b* (într-o astfel de împărțire obținem k^2 pătrate formate din cîte patru pătrate, $2k$ dreptunghiuri formate din cîte două pătrate și un pătrat mic, format dintr-un singur pătrat, adică în total $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ părți. Este clar că în fiecare dintre aceste părți poate fi așezat nu mai mult decît un rege (dacă se cere ca regii să nu se amenințe). Deci, numărul total de regi nu poate fi mai mare decît $(k + 1)^2$. Însă $(k + 1)^2$

regi pot fi așezați pe o tablă cu $2k + 1$ pătrate, așa cum se vede în fig. 45, *b*, unde $k = 4$. Deci, cel mai mare număr de regi în condițiile considerate este egal cu

$$(k + 1)^2 = (n + 1)^2/4.$$

Utilizînd semnul părții întregi introdus la p. 10, rezultatele obținute pentru cazurile cu n par și n impar pot fi reunite: cel mai mare număr de regi care pot fi așezați pe o tablă de șah cu n^2 pătrate, astfel ca ei să nu se amenințe doi cîte doi, este egal cu $\left[\frac{n+1}{2}\right]^2$.

Observație. Examinînd fig. 45, *b* nu este greu de observat că pentru n impar există o singură configurație cu $(n + 1)^2/4$ regi pe o tablă cu n^2 pătrate, astfel încît să nu se amenințe doi cîte doi. Pentru n par (în particular pentru $n = 8$) există mai multe moduri diferite de așezare a celui mai mare număr posibil de regi, care să nu se amenințe doi cîte doi. Determinarea acestui număr o propunem cititorului.

38. a) Se va împărți tabla în nouă părți, așa cum se arată în fig. 46, *a*. În fiecare dintre aceste părți există un pătrat (notat în fig. 46, *a* cu un cerc), care poate fi ținut sub amenințare numai de regii situați în pătratele aceleiași părți. Deci, pentru ca toate pătratele tablei să se afle sub amenințare, trebuie ca în fiecare dintre cele nouă părți să figureze cel puțin un rege. De aici se vede că numărul căutat de regi nu poate fi mai mic decît 9. Dar nouă regi pot fi așezați astfel, încît să se țină sub amenințare toate pătratele tablei: un astfel de mod de așezare este indicat, de exemplu, prin cercuri în fig. 46, *a*. Astfel, cel mai mic număr căutat de regi este egal cu 9.

b) Problema se rezolvă în mod analog cu problema a); numai că aici trebuie să considerăm separat trei cazuri: cazul în care n se divide cu 3, cazul în care n dă restul 2 prin împărțire cu 3 și cazul în care n dă restul 1 prin împărțire cu 3.

Dacă n este divizibil cu 3, adică $n = 3k$, tabla poate fi împărțită în $k^2 = (n/3)^2$ pătrate din cîte nouă pătrate (v. fig. 46, *b*, unde $n = 9$); în fiecare dintre aceste pătrate trebuie să stea cel puțin un rege, doarece altfel nu vor fi amenințate toate centrele unor astfel de pătrate. Deoarece $k^2 = n^2/9$ regi pot fi totdeauna așezați pe o tablă cu $n^2 = (3k)^2$ pătrate, astfel, încît ei să țină sub amenințare toate pătratele tablei (pentru aceasta este suficient să fie așezați în centrele pătratelor formate din cîte nouă pătrate, în care a fost împărțită tabla; v. fig. 46, *b*), atunci cel mai mic număr căutat de regi pentru $n = 3k$ este egal cu $k^2 = n^2/9$.

Dacă n dă restul 2 prin împărțirea cu 3, adică $n = 3k + 2$, tabla va fi împărțită în $(k + 1)^2 = \left(\frac{n+1}{3}\right)^2$ părți mai mici, astfel cum s-a procedat în cazul $n = 8$, $k = 2$ (v. fig. 46, *a*). Din examinarea acestei împărțiri rezultă că pentru $n = 3k + 2$ cel mai mic număr căutat de regi este egal cu

$$(k + 1)^2 = (n + 1)^2/9.$$

În sfîrşit, dacă n dă restul 1 prin împărţirea cu 3, adică $n = 3k + 4$ [1], tabla va fi împărţită în

$$(k+2)^2 = \left(\frac{n+2}{3}\right)^2$$

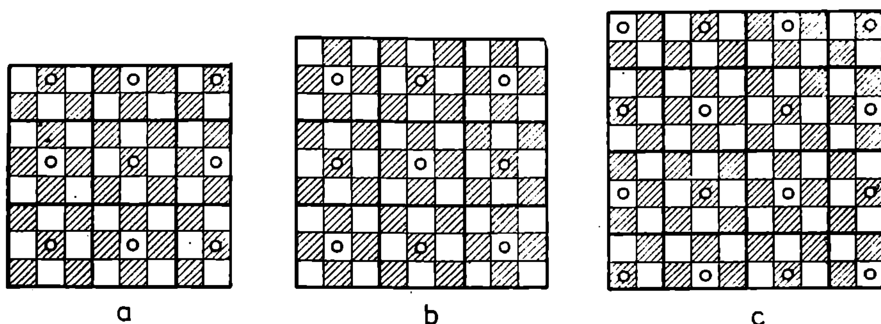


Fig. 46

părţi mai mici, după cum se arată în fig. 46, c (unde $n = 10$, $k = 2$). Din examinarea acestei figuri se deduce uşor că pentru $n = 3k + 4$ cel mai mic număr căutat de regi este egal cu

$$(k+2)^2 = (n+2)^2/9.$$

Singurul caz în care n nu poate fi reprezentat sub forma $3k$, $3k + 2$ sau $3k + 4$ este cazul $n = 1$; însă în acest caz, este evident că numărul căutat de regi este egal cu 1, adică, de asemenea, este egal cu $(n + 2)^2/9$.

Utilizînd semnul părţii întregi, rezultatele obţinute pot fi reunite în modul următor: cel mai mic număr de regi care pot fi aşezaţi pe tabla de şah cu n^2 pătrate astfel încît ei să ţină sub ameninţare toate pătratele tablei este egal cu $\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$.

O b s e r v a ţ i e. Examinînd fig. 46, b, nu este greu de văzut că pentru n divizibil cu 3, există un singur mod de aşezare a $(n/3)^2$ regi pe o tablă cu n^2 pătrate, astfel încît toate pătratele tablei să fie ţinute sub ameninţare. Pentru n, care dă prin împărţire la 3 restul 1 sau 2, există mai multe moduri de aşezare posibile a celui mai mic număr posibil de regi care să ţină sub ameninţare toate pătratele tablei; calculul acestui număr de moduri îl propunem cititorului.

39. a) Pe fiecare verticală a tablei de şah poate să stea nu mai mult decît o regină, deci pe o tablă de şah cu 64 pătrate nu pot sta mai mult de opt regine, care să nu se ameninţe două cîte două. Opt regine pot fi împărţite pe tablă astfel încît să nu se ameninţe două cîte două (un astfel de mod de aşezare este reprezentat, de exemplu, în fig. 47).

---

[1] Orice număr întreg pozitiv n, în afară de $n = 1$, care dă restul 1 prin împărţirea cu 3, poate fi reprezentat sub forma $n=3k + 4$, unde k este un număr nenegativ. Cazul $n=1$ va fi examinat separat.

Se poate arăta că există în total 92 de moduri esențial diferite de așezare a opt regine pe o tablă de șah obișnuită, astfel încît să satisfacă condiția impusă.

b) Pe fiecare verticală a tablei de șah poate sta nu mai mult decît o regină (altfel două regine s-ar amenința), deci pe o tablă cu n^2 pătrate nu pot fi așezate mai mult decît n regine care să verifice condițiile problemei.

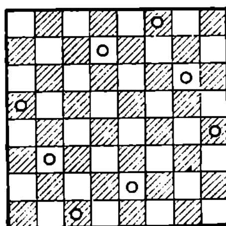


Fig. 47

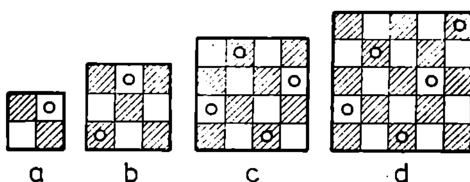


Fig. 48

Nu este greu de verificat că, dacă se așază o regină pe o tablă de șah cu patru pătrate, toate pătratele tablei vor fi ținute sub amenințare și nu va mai putea fi pusă o altă regină (fig. 48, *a*). Pe o tablă de șah cu nouă pătrate pot fi așezate două regine care să verifice condițiile problemei (fig. 48, *b*), dar nu mai pot fi așezate alte trei regine. Pe tabla de șah cu 16 și 25 de pătrate pot fi așezate patru, respectiv cinci regine astfel încît să nu se amenințe una pe alta (fig. 48, *c* și *d*).

Se va arăta, că pentru $n = 1$ și pentru orice $n \geqslant 4$, pe o tablă de șah cu n^2 pătrate pot fi așezate n regine care nu se amenință una pe alta (pentru $n = 1$, acest rezultat este evident).

Se consideră mai întîi cazul lui n p a r. Pe verticalele vecine nu pot fi așezate regine pe una și aceeași orizontală sau pe orizontale vecine (altfel ele se vor amenința), deci pe verticalele vecine vom încerca să așezăm reginele sărind cîte o orizontală. În acest caz pe prima verticală vom așeza regina pe a doua orizontală, pe a doua verticală — pe a patra orizontală etc., pînă ce se ajunge pe orizontala de sus; apoi vom trece din nou la prima orizontală etc. (fig. 49). Deoarece în felul acesta două regine nu vor sta pe aceeași verticală sau orizontală, mai rămîne să verificăm că nu se vor afla două regine pe aceeași diagonală.

Dacă două pătrate ale tablei aparțin aceleiași diagonale, aceasta înseamnă că diferența dintre numerele orizontalelor pe care se află aceste pătrate este egală cu diferența numerelor corespunzătoare ale verticalelor. În acest caz, pătratul corespunzător verticalei cu numărul cel mai mare poate aparține atît orizontalei cu numărul cel mai mare, cît și celei cu numărul cel mai mic (fig. 50, *a* și *b*). Dacă primul pătrat se află la intersecția verticalei a i-a cu orizontala a j-a, iar al doilea — la intersecția verticalei a k-a cu orizontala a l-a, atunci vom avea după caz

$$i - k = j - l \qquad (*)$$

sau

$$i - k = l - j. \qquad (**)$$

În primul caz, cele două pătrate considerate se află pe aceeași diagonală care merge de la stînga în sus spre dreapta și în al doilea caz, pe o aceeași diagonală, care merge de la dreapta în sus spre stînga.

Evident că, dacă două regine din schema noastră se află amîndouă în jumătatea din stînga sau amîndouă în jumătatea din dreapta a tablei, diferența

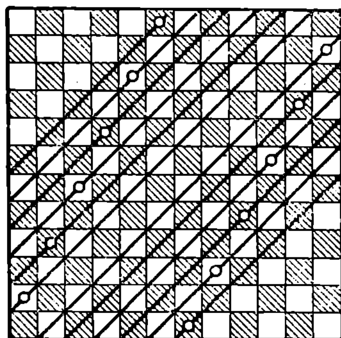
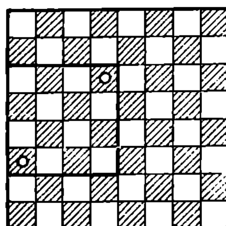
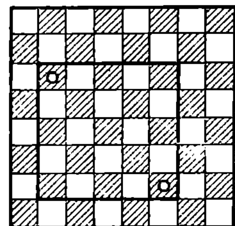


Fig. 49



a



b

Fig. 50

dintre numerele orizontalelor lor va fi de două ori mai mare decît diferența dintre numerele verticalelor (deoarece în fiecare jumătate a tablei, cînd se trece de la o regină la următoarea, numărul verticalei crește cu 1, iar numărul orizontalei cu 2). Astfel mai rămîne să verificăm dacă două regine așezate una în jumătatea din stînga a tablei, iar a doua, în cea din dreapta pot să stea pe o aceeași diagonală.

În primul rînd se observă că nici o pereche de regine, dintre care una stă în jumătatea din stînga a tablei, iar cealaltă în cea din dreapta nu se pot afla pe o aceeași diagonală care merge de la stînga în sus spre dreapta: într-adevăr, reginele care stau în jumătatea din stînga a tablei sînt așezate pe diagonale care merg de la stînga în sus spre dreapta și sînt situate în triunghiul de sus din stînga al tablei, iar reginele așezate în dreapta stau pe astfel de diagonale situate în triunghiul de jos din dreapta (v. fig. 49, unde sînt trasate diagonalele corespunzătoare). De aceea ne mai rămîne numai să cercetăm dacă două astfel de regine, așezate în jumătăți diferite ale tablei, pot să se afle pe o aceeași diagonală care merge de la dreapta în sus spre stînga.

Se presupune că regina se află pe verticala a i-a; în acest caz, ea se află pe orizontala a $2i$-a. Să presupunem, mai departe, că regina din dreapta se află pe verticala a $(j + n/2)$-a și deci se află pe orizontala a $(2j - 1)$-a. Dacă ele s-ar afla pe o aceeași diagonală, care merge de la dreapta în sus spre stînga, atunci ar fi adevărată egalitatea

$$(j + n/2) - i = 2i - (2j - 1); \quad 6(i - j) + 2 = n,$$

ceea ce, evident, este posibil numai dacă n prin împărțirea cu 6 dă restul 2. Astfel, pentru n par, de forma $6k$ sau $6k + 4$, figura 49 dă modul de așezare a n regine pe tabla de șah, astfel încît nici una să nu amenințe pe alta.

Pentru $n = 6k + 2$, figura 49 conduce la o așezare în care două regine se amenință. Se poate arăta însă și în acest caz un mod de așezare a n regine care satisface condițiile problemei, însă acesta va fi mult mai complicat decît cel precedent. O astfel de așezare este arătată în fig. 51, unde s-a luat $n = 14$ (compară, de asemenea, cu fig. 47). Aici pe $\frac{n}{2} - 3$ verticale din jumătatea din stînga a tablei de la a 2-a pînă la a $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$-a, reginele sînt așezate sărind cîte o orizontală și începînd cu a 3-a (adică, pe orizontalele cu numerele 3, 5, 7, ..., $n - 5$). Pe $\frac{n}{2} - 3$ verticale începînd cu a $\left(\frac{n}{2} + 3\right)$-a și terminînd cu a $(n - 1)$-a, regine sînt așezate sărind cîte o orizontală și începînd cu a 6-a (adică pe orizontalele cu numerele 6, 8, 10, ..., $n - 2$). Astfel rămîn neocupate verticalele cu numerele 1, $\frac{n}{2} -$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$, $\frac{n}{2} + 2$, n și orizontalele cu numerele 1, 2, 4, $n - 3$, $n - 1$, n. Pe 1-a, $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-a, $\frac{n}{2}$-a, $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$-a, $\left(\frac{n}{2} + 2\right)$-a și a n-a verticală, reginele vor fi așezate respectiv pe orizontalele cu numerele $n - 3$, 1, $n - 1$, 2, n și 4. Este clar că în felul acesta nu se vor afla două regine pe o aceeași verticală sau pe o aceeași orizontală; mai rămîne să verificăm că pe fiecare diagonală a tablei nu va sta, de asemenea, mai mult decît o regină.

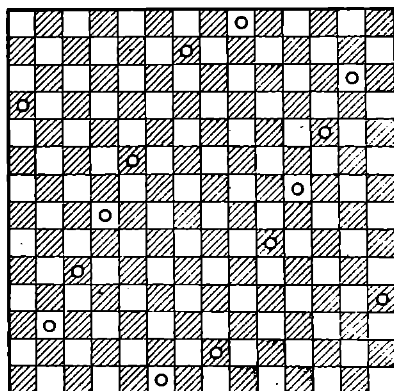


Fig. 51

Vom renumerota toate diagonalele tablei care merg de la stînga în sus spre dreapta, dînd pătratelor marginale ale tablei, situate pe orizontala de jos și pe verticala din stînga, numerele de la 1 la $2n - 1$, după cum se arată în fig. 52, *a*, și vom considera că fiecare diagonală are numărul pătratului care-i aparține. În mod analog vom numerota diagonalele care merg de la dreapta în sus spre stînga, dînd numere pătratelor orizontalei de jos și verticalei din dreapta, așa cum se arată în fig. 52, *b*. Dacă vom considera că prima regină este cea așezată în prima verticală, a doua, cea așezată pe a doua verticală etc., atunci reginele vor ocupa pe rînd diagonalele care merg de la stînga în sus spre dreapta, cu numerele

$$2n - 4,\quad n + 1,\ n + 2,\quad n + 3, \ldots,\ \frac{3n}{2} - 3,\ \frac{n}{2} + 2,\ \frac{3n}{2} - 1,\ \frac{n}{2} + 1,$$

$$\frac{3n}{2} - 2,\ \frac{n}{2} + 3,\ \frac{n}{2} + 4,\ \frac{n}{2} + 5, \ldots, n - 1,\ 4;$$

printre aceste numere nici unul nu apare de două ori, numai dacă

$$4 < \frac{n}{2} + 1; \quad 2n - 4 > \frac{3n}{2} - 1,$$

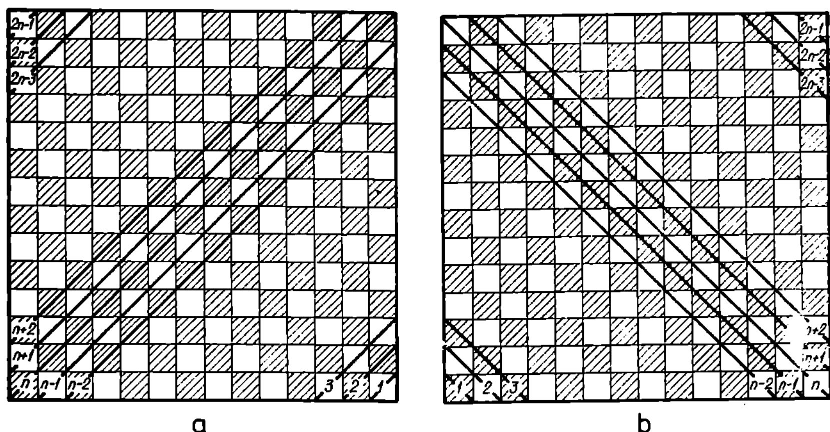


Fig. 52

adică dacă $n > 6$. În mod analog, reginele vor ocupa pe rînd diagonalele care merg de la dreapta în sus spre stînga cu numerele

$$n - 3,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots, \frac{3n}{2} - 8,\ \frac{n}{2} - 1,\ \frac{3n}{2} - 2,\ \frac{n}{2} + 2,$$

$$\frac{3n}{2} + 1,\ \frac{n}{2} + 8,\ \frac{n}{2} + 11,\ \frac{n}{2} + 14,\ \frac{n}{2} + 17, \ldots, 2n - 4,\ n + 3,$$

unde punctele înseamnă termenii nescriși ai progresiei aritmetice cu rația 3. Dintre aceste numere $4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots, \frac{3n}{2} - 8,\ \frac{3n}{2} - 2,\ \frac{3n}{2} + 1$ dau restul 1 prin împărțirea cu 3; $\frac{n}{2} - 1,\ \frac{n}{2} + 2,\ \frac{n}{2} + 8,\ \frac{n}{2} + 11,\ \frac{n}{2} + 14,\ \frac{n}{2} + 17 \ldots$ $\ldots, 2n - 4$ se divid cu 3 (aici n este de forma $6k + 2$); $n - 3$ și $n + 3$ dau restul 2 prin împărțirea cu 3. De aici se vede dintr-o dată că nici un număr nu apare de două ori printre cele scrise.

A mai rămas să arătăm că și pe tabla cu n^2 pătrate, unde n este i m p a r, putem așeza, de asemenea, n regine, astfel încît să nu se amenințe două cîte două. Aceasta devine cu totul evident dacă observăm că în toate configurațiile de mai sus, valabile pentru n par, diagonala principală, care merge de la stînga în sus spre dreapta, a rămas neocupată de regine. De aceea, dacă pe o tablă cu n^2 pătrate (n impar) se așază n regine în modul următor: pe primele $n - 1$ orizontale și pe primele $n - 1$ verticale se pun $n - 1$ regine,

astfel cum s-a procedat pe tabla cu $(n-1)^2$ pătrate ($n-1$ par) şi apoi se mai pune cîte o regină pe pătratul din colţul drept de sus al tablei, atunci aceste n regine vor satisface condiţiile problemei (v., de exemplu, fig. 53, unde este reprezentată aşezarea a 15 regine pe o tablă cu 225 pătrate).

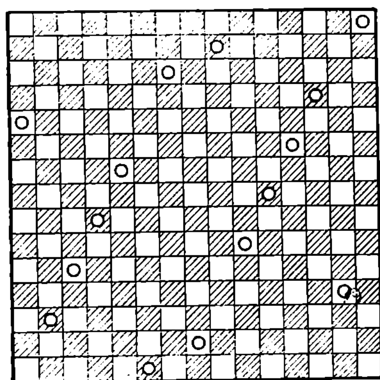


Fig. 53

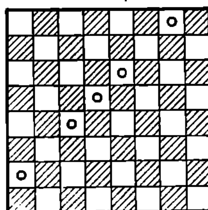


Fig. 54

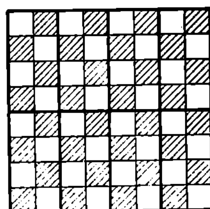


Fig. 55

În ceea ce priveşte numărul configuraţiilor diferite a n regine pe o tablă cu n^2 pătrate, care satisfac condiţiile problemei, acesta este foarte greu de determinat şi nimeni nu a reuşit să-l calculeze pînă acum.

Nu este rezolvată pînă acum nici problema celui mai mic număr de regine care pot fi aşezate pe tabla cu n^2 pătrate, astfel încît toate pătratele tablei să fie ţinute sub ameninţare. Pentru tabla de şah obişnuită cu 64 pătrate, acest număr este egal cu 5 (v. de exemplu, fig. 54); numărul configuraţiilor diferite a cinci regine pe o tablă cu 64 pătrate, astfel ca toate pătratele tablei să fie ţinute sub ameninţare, este egal cu 4 860.

40. a) Deoarece un cal care stă pe un pătrat alb ţine sub ameninţare numai pătrate negre, este evident că pot fi aşezaţi 32 cai, astfel încît să nu se ameninţe doi cîte doi. Pentru aceasta, este suficient să-i aşezăm pe pătratele albe ale tablei (aceste pătrate sînt în număr de $64/2 = 32$). Vom arăta acum că nu putem aşeza în modul arătat mai mult de 32 cai. În acest scop, vom împărţi tabla de şah în opt părţi egale, în formă de dreptunghiuri cu baza din două pătrate şi înălţimea din patru pătrate (fig. 55). Este uşor de văzut că un cal, aşezat într-un astfel de dreptunghi ţine sub ameninţare un singur pătrat din acest dreptunghi, iar pentru doi cai, pătratele ameninţate sînt diferite. De aici rezultă că în fiecare dintre aceste dreptunghiuri (compuse din opt pătrate) nu pot fi aşezaţi mai mult decît patru cai, care să nu se ameninţe unul pe altul. Astfel, numărul total de cai pe care putem să-i aşezăm pe tabla de şah nu este mai mare decît $4 \cdot 8 = 32$.

b) Trebuie să determinăm cîte configuraţii diferite cu cei 32 cai pot fi obţinute pe o tablă de şah, astfel încît nici o pereche de cai să nu se ameninţe. Două astfel de configuraţii sînt evidente: putem aşeza cei 32 cai pe toate

pătratele albe ale tablei (prima configurație) sau pe toate pătratele negre ale tablei (a doua configurație). Se va demonstra că nu mai există nici o altă configurație.

Se va împărți din nou tabla în opt părți egale, după cum se arată în fig. 55. În acest caz, în fiecare dintre aceste părți va trebui să așezăm cîte patru cai (v. rezolvarea problemei a)). Să cercetăm, acum, cum pot fi așezați patru cai în dreptunghiul de jos din stînga (vom numi acest dreptunghi primul dreptunghi).

Vom încerca, mai întîi, să ocupăm cele două pătrate de jos ale acestui dreptunghi (aceste pătrate sînt notate în fig. 56, *a* prin cercuri). În acest caz trebuie să lăsăm libere pătratele din primul dreptunghi, notate în figură prin cruciulițe: pătratele de pe orizontala a treia sînt amenințate de caii așezați, iar pătratul de pe orizontala a doua, notat cu o cruciuliță, nu poate fi ocupat, deoarece, în acest caz, cei trei cai așezați ar ține sub amenințare cinci pătrate din al doilea dreptunghi de jos din stînga, deci în acest dreptunghi nu vor mai putea fi așezați patru cai. Dacă vom mai așeza doi cai pe pătratele notate în fig. 56, *a* cu steluțe, atunci din nou nu vom mai putea așeza patru cai în dreptunghiul al doilea din stînga de jos (deoarece în acest caz nu rămîn neamenințate decît trei pătrate ale acestui dreptunghi, notate prin cruciulițe în fig. 56,*a*); deci o astfel de configurație cade de asemenea. Dacă vom așeza caii pe pătratele primului dreptunghi, notate în fig. 56, *b* prin cercuri, atunci în al doilea dreptunghi din stînga jos vom fi obligați să ocupăm pătratele notate prin cercuri (celelalte pătrate ale dreptunghiului considerat fiind ținute sub amenințare de caii din primul dreptunghi); în acest caz, în al treilea dreptunghi din stînga de jos vor putea fi așezați numai doi cai (pe pătratele notate cu cercuri). Deci, și această posibilitate cade. În sfîrșit, dacă în primul dreptunghi vom ocupa pătratele de pe prima și a patra orizontală (fig. 56, *c*), atunci în al doilea dreptunghi din stînga jos, de asemenea, va trebui să ocupăm pătratele de pe aceleași orizontale; în acest ca în dreptunghiul din stînga sus, caii pot fi așezați numai pe pătratele orizontalelor a șaptea și a opta, iar în dreptunghiul al doilea din stînga de sus nu va putea fi așezat nici un cal. Deci, se vede că nu pot fi ocupate în același timp ambele pătrate de jos ale primului dreptunghi.

Dacă în rîndul de jos al primului dreptunghi nu stă nici un cal, atunci caii vor trebui să stea pe ambele pătrate ale orizontalei a treia. Însă acești doi cai țin sub amenințare cinci pătrate din dreptunghiul vecin din stînga; deci nici această situație nu este posibilă.

Astfel, rămîne să considerăm că pe orizontala de jos a primului dreptunghi stă neapărat un singur cal. Pe orizontala de sus (a patra) a primului dreptunghi, de asemenea, stă un cal. Într-adevăr, dacă pe această orizontală nu ar sta nici un cal, atunci pe orizontala a doua ar trebui să stea doi cai, iar aceștia ar ține sub amenințare cinci pătrate din al doilea dreptunghi jos. Dacă pe orizontala a patra ar sta doi cai, atunci, sau nu am mai putea să așezăm patru cai în dreptunghiul al doilea din stînga jos (fig. 56, *d*), sau în al doilea dreptunghi am putea așeza patru cai, dar în al treilea nu (fig. 56,*e*).

Este ușor de văzut că pe orizontala de jos și cea de sus din primul dreptunghi caii trebuie să stea pe verticale diferite — altfel nu vom izbuti să așezăm cîte patru cai în dreptunghiul al doilea din stînga și în al treilea din stînga

(v. fig. 56, *f* și *g*). Dacă acești doi cai stau pe verticale diferite (adică pe pătrate de aceeași culoare, v. fig. 56, *h*), atunci cei doi cai de pe orizontalele a doua și a treia trebuie să fie așezați pe două pătrate de aceeași culoare — numai aceste pătrate nu sînt ținute sub amenințare. Mai departe, în al doilea dreptunghi, de asemenea, doar pătratele de aceeași culoare nu vor fi ținute sub amenințare, în al treilea la fel etc., adică în toată jumătatea de jos a tablei. Aceste raționamente se aplică și jumătății de sus a tablei, unde toți caii trebuie să fie așezați pe pătrate de aceeași culoare. În acest caz, este clar că, dacă în

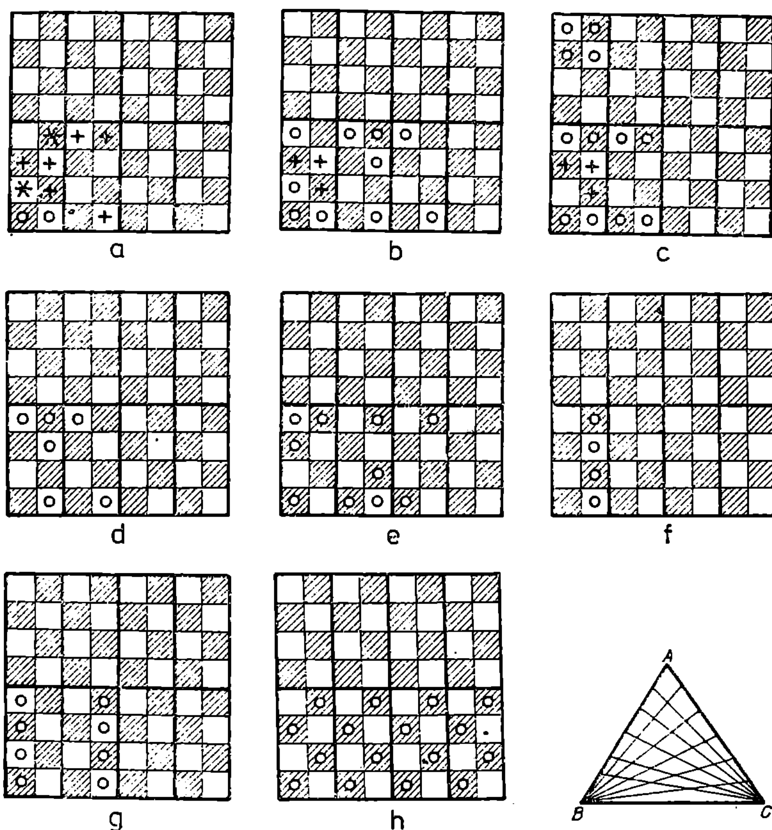


Fig. 56

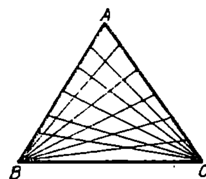


Fig. 57

jumătatea de jos vom alege o culoare, iar în cea de sus alta, atunci unii cai se vor amenința. Astfel rămîn numai două posibilități: de a așeza toți caii sau pe toate pătratele albe sau pe toate cele negre.

41. a) Se duc, mai întîi, n drepte care unesc vîrful B cu n puncte situate pe latura AC — aceste drepte împart triunghiul în $n + 1$ părți. Vom duce acum dreptele care unesc vîrful C cu cele n puncte de pe latura AB (fig. 57). Fiecare dintre aceste drepte (al căror număr este egal cu n) se va intersecta

cu cele n drepte duse mai înainte şi deci va fi împărţită prin punctele de intersecţie în $n + 1$ părţi. Însă fiecare dintre aceste porţiuni ale dreptei considerate împarte în două una dintre părţile triunghiului, obţinute mai înainte, adică măreşte cu unu numărul părţilor în care a fost divizat triunghiul. De aici rezultă că toate dreptele împart triunghiul în $(n + 1) + (n + 1)n = (n + 1)^2$ părţi [1].

b) Dreptele care trec prin vîrfurile B şi C împart triunghiul în $(n + 1)^2$ părţi (problema a)). Fiecare dintre dreptele care trec prin vîrful A se intersectează cu toate cele $2n$ drepte care trec prin vîrfurile B şi C în $2n$ puncte (toate punctele de intersecţie sînt diferite, deoarece nu se întîmplă ca trei dintre aceste drepte să se intersecteze într-un punct). Astfel fiecare dintre dreptele care trec prin vîrful A este împărţită de celelalte drepte în $2n + 1$ părţi şi deci măreşte numărul total de părţi cu $2n + 1$. De aici rezultă că numărul total de părţi este egal cu

$$(n + 1)^2 + n(2n + 1) = 3n^2 + 3n + 1.$$

42. a) Este clar că n drepte vor împărţi planul în cel mai mare număr de părţi, dacă toate aceste drepte se intersectează (adică nici o pereche nu este paralelă) şi dacă nici un grup de trei dintre ele nu sînt concurente. Deci rămîne să determinăm în cîte părţi este împărţit planul prin n drepte neparalele două cîte două şi astfel încît nici un grup de trei dintre ele să nu fie concurente. [2]

Presupunem că au fost duse în plan k drepte; ducem dreapta a $(k + 1)$-a şi vom arăta cu cît a crescut numărul de părţi în care dreptele împart planul. Dreapta a $(k + 1)$-a se intersectează cu cele k drepte în k puncte, care o împart în $k + 1$ părţi. Deci dreapta a $(k + 1)$-a va tăia exact $k + 1$ părţi din toate părţile existente ale planului. Deoarece fiecare dintre aceste părţi este împărţită în două, după ce am dus cea de-a $(k + 1)$-a dreaptă, numărul total de părţi a crescut cu $k + 1$. Însă dacă a fost dusă numai o singură dreaptă, planul a fost împărţit de aceasta în două părţi. De aici rezultă că, după ce au fost duse n drepte, planul a fost împărţit în

$$2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

părţi (după ce a fost dusă cea de-a doua dreaptă se adaugă încă două părţi, după a treia — încă trei, după a patra — încă patru etc.). Deci, cel mai mare număr de părţi în care n drepte pot împărţi planul este egal cu

$$2 + 2 + 3 + \dots + n = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

---

[1] Acest rezultat se poate deduce, de asemenea, şi din faptul că n drepte care trec prin vîrful B împart fiecare dintre cele $n + 1$ părţi ale triunghiului, obţinute mai înainte, în $n + 1$ părţi mult mai mici. Dar raţionamentul folosit este mult mai comod deoarece se poate aplica şi în unele din problemele care urmează.

[2] S-ar putea crede că deşi se respectă toate aceste condiţii, numărul părţilor încă mai depinde de configuraţia dreptelor. Însă, din soluţia noastră va rezulta că acest număr este determinat în mod unic de valoarea lui n şi deci nu depinde de configuraţia dreptelor.

b) n cercuri vor împărţi planul în cel mai mare număr de părţi, dacă toate cercurile se intersectează (adică nici o pereche nu sînt tangente şi nici unul nu este situat în întregime în interiorul sau în exteriorul altuia) şi nici un grup de trei astfel de cercuri nu se intersectează în acelaşi punct.

Raţionînd ca în problema a), vom arăta că cercul al $(k+1)$-lea măreşte numărul de părţi ale planului cu $2k$ [al $(k+1)$-lea cerc se intersectează cu cele k cercuri duse mai înainte în $2k$ puncte; aceste $2k$ puncte îl împart în $2k$ părţi]. Deoarece un cerc împarte planul în două părţi, numărul total de părţi după ce au fost duse n cercuri va fi egal cu

$$2+2+4+6+8+\ldots+2(n-1)=2+2[1+2+3+\ldots+(n-1)]=$$

$$=2+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+2.$$

43. a) n plane împart spaţiul în cel mai mare număr de părţi dacă nici o pereche nu sînt paralele şi nici un grup de trei dintre ele nu trec printr-o aceeaşi dreaptă şi nu sînt paralele cu o aceeaşi dreaptă şi nici un grup de patru nu trec printr-un acelaşi punct.

Se va presupune că spaţiul a fost împărţit de k plane în părţi şi vom cerceta cu cît se măreşte numărul părţilor după ce ducem planul al $(k+1)$-lea. Acest plan se va intersecta după k drepte cu cele k plane existente (deoarece nici o pereche de plane nu sînt paralele şi nici un grup de trei nu trec printr-o aceeaşi dreaptă), iar nici o pereche dintre aceste k drepte nu sînt paralele (deoarece nici un grup de trei plane nu sînt paralele cu o aceeaşi dreaptă) şi nici un grup de trei nu se intersectează într-un punct (deoarece nici un grup de patru dintre planele considerate nu trec printr-un acelaşi punct). Astfel de k drepte împart planul în $(k^2+k+2)/2$ părţi (v. rezolvarea problemei 42, a)) şi fiecare dintre ele se obţine ca rezultat al intersecţiei dintre planul al $(k+1)$-lea cu una dintre părţile în care a fost divizat spaţiul mai înainte. Astfel, planul al $(k+1)$-lea se intersectează cu $(k^2+k+2)/2$ părţi ale spaţiului, împărţindu-le pe fiecare în două; deci, după ce a fost dus al $(k+1)$-lea plan, numărul total de părţi se va mări cu $(k^2+k+2)/2$ părţi. Deoarece un plan împarte spaţiul în două părţi, rezultă că n plane vor împărţi spaţiul în

$$2+\frac{1^2+1+2}{2}+\frac{2^2+2+2}{2}+\frac{3^2+3+2}{2}+\ldots+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}=$$

$$=2+\frac{[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+[1+2+\ldots(n-1)]+2+\ldots+2}{2}$$

părţi. Deoarece

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=n(n-1)/2,$$

iar [1])

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = n(n-1)(2n-1)/6,$$

deci numărul total de părți va fi egal cu

$$2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} + (n-1) =$$

$$= 2 + \frac{(n-1)(2n^2 - n + 3n + 12)}{12} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

b) Problema se rezolvă în mod analog ca precedenta. Se va presupune că au fost duse k sfere și vom stabili cu cît se mărește numărul de părți după ce ducem sfera a $(k+1)$-a. Sfera a $(k+1)$-a se poate intersecta cu sferele duse mai înainte după k cercuri; aceste k cercuri împart suprafața sferei cel mult în $k^2 - k + 2$ părți (v. problema 42, *b*); faptul că aici considerăm împărțirea prin cercuri nu a planului ci a sferei nu schimbă nimic din raționamentul

[1]) Vom scrie o serie de formule:

$1^3 = 1^3,$

$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$

$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$

$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1,$

. . . .

$n^3 = [(n-1)+1]^3 = (n-1)^2 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1.$

Adunînd toate aceste formule, vom obține

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = 1^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 +$$

$$+ 3[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] + 3[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + (n-1)$$

și deci

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3 - 1^3 - 3[1 + 2 + \ldots + (n-1)] - (n-1)}{3} =$$

$$= \frac{2n^3 - 3n(n-1) - 2n}{6} = \frac{n(2n^2 - 3n + 3 - 2)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

făcut în rezolvarea problemei 42,b)). Astfel sfera a $(k+1)$-a mărește numărul părților cu $k^2 - k + 2$ și deci numărul total de părți este egal cu

$$2 + (1^2 - 1 + 2) + (2^2 - 2 + 2) + (3^2 - 3 + 2) + \dots + [(n-1)^2 -$$

$$- (n-1) + 2] = 2 + [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] - [1 + 2 + 3 + \dots$$

$$\dots + (n-1)] + (2 + 2 + 2 + \dots + 2) = 2 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} -$$

$$- \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) = 2 + \frac{(n-1)(2n^2 - n - 3n + 12)}{6} =$$

$$= \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}.$$

Astfel, cinci sfere pot împărți spațiul în cel mult $5(25 - 15 + 8)/3 = 30$ părți.

44. Prima rezolvare. Să considerăm diagonala A_1A_k a poligonului $A_1A_2A_3 \dots A_n$. De o parte și de alta a acestei diagonale se găsesc respectiv $k - 2$ vîrfuri ale poligonului (vîrfurile $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{k-1}$) și $n - k$ vîrfuri (vîrfurile $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$). Diagonala A_1A_k se va intersecta cu toate diagonalele care unesc unul oarecare dintre cele $k - 2$ vîrfuri din primul grup și oricare dintre cele $n - k$ vîrfuri din al doilea grup, adică se interesectează în total cu $(k-2)(n-k)$ diagonale. Deci, toate diagonalele care trec prin vîrful A_1 (diagonalele $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$) se vor intersecta cu celelalte diagonale în

$$1 \cdot (n-3) + 2(n-4) + 3(n-5) + \dots + (n-3) \cdot 1$$

puncte. Dar

$$1(n-3) + 2(n-4) + 3(n-5) + \dots + (n-3) \cdot 1 = 1[(n-1) - 2] +$$

$$+ 2[(n-1) - 3] + 3[(n-1) - 4] + \dots + (n-3)[(n-1) - (n-2)] =$$

$$= (n-1)[1 + 2 + 3 + \dots + (n-3)] - [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots$$

$$\dots + (n-3)(n-2)] = (n-1)\frac{(n-2)(n-3)}{2} -$$

$$- [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-3)(n-2)].$$

Şi, deoarece [1])

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-3)(n-2)=(n-3)(n-2)(n-1)/3$$

avem

$$1\cdot(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\ldots+(n-3)\cdot 1=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}.$$

Deci diagonalele care trec prin vîrful A_1 se vor intersecta cu celelalte diagonale în $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ puncte. Într-un acelaşi număr de puncte se vor intersecta cu celelalte diagonale şi diagonalele care trec prin oricare alt vîrf al poligonului. Dar înmulţind $(n-1)(n-2)(n-3)/6$ cu numărul de vîrfuri ale poligonului (egal cu n), fiecare punct de intersecţie va fi considerat de patru ori (în fiecare din aceste puncte se intersectează cîte două diagonale, fiecare din ele avînd două extremităţi în două vîrfuri). În definitiv, numărul căutat de puncte de intersecţie este egal cu

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot\frac{n}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

R e z o l v a r e a a d o u a. Această problemă poate fi rezolvată mult mai simplu aplicînd formula pentru numărul combinărilor. Într-adevăr, vom considera un punct de intersecţie al diagonalelor. Friecare punct de intersecţie aparţine la două diagonale. Punctului B de intersecţie a diagonalelor A_1A_3 şi A_2A_4 îi corespunde un grup de patru vîrfuri A_1, A_2, A_3 şi A_4 ale poligonului considerat (punctul B este punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului

---

[1]) **Prin metoda inducţiei complete este uşor de arătat că**

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots k+2\cdot 3\cdot 4\ldots(k+1)+3\cdot 4\cdot 5\ldots(k+2)+\ldots+n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{k+1}$$

(v. de exemplu, problema 133 în [56]. Acelaşi rezultat se obţine din formula din problema 55, g) a cărţii de faţă.

Putem, de asemenea, folosi faptul că

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+n(n+1)=$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n);$$

mai departe, v. nota de la p. 132

În mod analog

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$

$$=1(1+1)(2+2)+2(2+1)(2+2)+\ldots+n(n+1)(n+2)=$$

$$=(1^3+2^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+2(1+2+\ldots+n);$$

mai departe v. nota de la p. 132.

$A_1A_2A_3A_4$, fig. 58). Reciproc, fiecărui grup de patru vîrfuri A_1, A_2, A_3 și A_4 ale poligonului îi corespunde un singur punct de interescție a diagonalelor patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$. De aici rezultă că numărul punctelor de intersecție a diagonalelor poligonului convex este egal cu numărul combinărilor de n elemente luate cîte 4, adică este egal cu

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

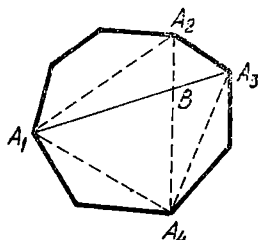


Fig. 58

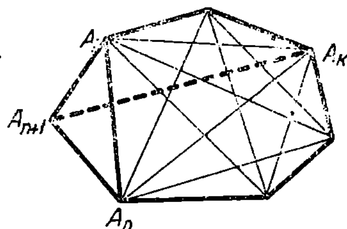


Fig. 59

45. Prima rezolvare. Vom nota cu f_n numărul căutat pentru poligonul convex cu n laturi. Vom deduce relația dintre f_n și f_{n+1}. Se va considera un poligon convex oarecare cu $n+1$ laturi; vom nota toate vîrfurile sale luate într-o ordine anumită cu $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ (fig. 59). Se va duce diagonala A_1A_n. Poligonul cu vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este un poligon convex. Se vor duce toate diagonalele sale; acestea vor fi, în același timp, și diagonalele poligonului cu $n+1$ laturi. Pentru a obține toate diagonalele poligonului cu $n+1$ laturi trebuie să mai unim vîrful al $(n+1)$-lea cu celelalte vîrfuri prin $n-2$ diagonale. Se va considera diagonala care unește vîrful al $(n+1)$-lea cu al k-lea ($k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$). De o parte a ei se vor afla $k-1$ vîrfuri (vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$), iar de cealaltă parte $n-k$ vîrfuri (vîrfurile $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$). Deci, diagonala $A_{n+1}A_k$ va intersecta $(k-1)(n-k)$ diagonale ale poligonului cu $n+1$ laturi. Punctele de intersecție vor împărți această diagonală în $(k-1)(n-k)+1$ părți. Deci ea va mai adăuga în poligonul cu $n+1$ laturi încă $(k-1)(n-k)+1$ părți. Diagonalele care nu trec prin A_{n+1} împart poligonul cu $n+1$ laturi în f_n+1 părți [f_n părți ale poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ și partea a (f_n+1)-a, care este triunghiul $A_{n+1}A_1A_n$]. După ce au fost duse diagonalele din A_{n+1} la aceste f_n+1 părți ale poligonului cu $n+1$ laturi, se vor mai adăuga

$$[(2-1)(n-2)+1]+[(3-1)(n-3)+1]+\ldots+\{[(n-1)-$$
$$-1][n-(n-1)]+1\}$$

părți. Astfel, avem

$$f_{n+1} = f_n + (2-1)(n-2) + (3-1)(n-3) + \ldots$$
$$\ldots + [(n-1)-1][n-(n-1)] + n - 1.$$

Însă [1)]

$$(2-1)(n-2)+(3-1)(n-3)+\dots+[(n-1)-1][n-(n-1)]=$$
$$=1\cdot(n-2)+2\cdot(n-3)+\dots+(n-2)[n-(n-1)]=n+2n+\dots$$
$$\dots+(n-2)n-[1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-2)(n-1)]=$$
$$=n\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{(n-2)(n-1)n}{3}=\frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

Deci

$$f_{n+1}=f_n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n-1$$
$$f_n=f_{n-1}+\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}+n-2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_4=f_3+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+2,$$
$$f_3=1.$$

Adunînd toate aceste egalități, se obține

$$f_{n+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{6}+\dots+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+$$
$$+[1+2+3+\dots+(n-1)].$$

Deoarece [1)]

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots+(n-2)(n-1)n=$$
$$=(n-2)(n-1)n(n+1)/4,$$

atunci, în definitiv

$$f_{n+1}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Deci

$$f_n=\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{24}(n^2-3n+12).$$

---

1) Vezi p. 134.

astfel,

$$f_n = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

Punînd în această formulă $n = 3, 4, 5, \ldots$, se obțin

$$f_3 = 1, \quad f_4 = 4, \quad f_5 = 11, \quad f_6 = 25, \quad f_7 = 50, \quad f_8 = 82, \ldots$$

Din rezultatul obținut rezultă, în particular, că dacă nici un grup de trei diagonale ale poligonului convex nu se intersectează într-un singur punct, atunci numărul de părți în care poligonul este împărțit de diagonalele sale nu depinde de forma poligonului, ci depinde numai de numărul vîrfurilor sale.

R e z o l v a r e a a d o u a. Diagonalele poligonului cu n laturi îl împart în părți care sînt evident toate poligoane. Se va nota cu r_3 numărul triunghiurilor care se află printre aceste poligoane, cu r_4 numărul patrulaterelor, cu r_5 numărul pentagoanelor etc., în sfîrșit cu r_m numărul poligoanelor cu m laturi (aici m este cel mai mare număr de laturi ale poligoanelor formate de diagonalele poligonului cu n laturi). Trebuie să calculăm suma

$$f_n = r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_m.$$

Se va determina numărul de vîrfuri ale tututor poligoanelor în care este împărțit poligonul cu n laturi prin diagonalele sale. Pe de o parte, această sumă este evident egală cu

$$3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \ldots + mr_m.$$

Pe de altă parte, fiecare dintre punctele de intersecție ale diagonalelor poli gonului este vîrful a patru poligoane alăturate în acest punct, iar fiecare dintre vîrfurile poligonului cu n laturi este vîrful a $n-2$ poligoane care se alipesc în acest vîrf (fig. 60). Însă, deoarece numărul punctelor de intersecție ale diagonalelor poligonului este egal cu $n(n-1)(n-2)(n-3)/24$ (v. problema 44) iar numărul vîrfurilor poligonului este egal cu n, suma numărului de vîrfuri ale tuturor poligoanelor, în care este împărțit poligonul cu n laturi de diagonalele sale, este egală cu

$$4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + (n-2)n =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n(n-2).$$

În acest mod, se obține

$$3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \ldots + mr_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n(n-2).$$

Se determină acum suma unghiurilor tututor poligoanelor în care este împărțit poligonul cu n laturi. Deoarece suma unghiurilor poligonului cu k laturi este egală cu $(k-2)\cdot 180°$, suma căutată este egală cu

$$[r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \ldots + (m-2)r_m]\cdot 180°.$$

Pe de altă parte, suma unghiurilor alăturate în fiecare dintre cele $n(n-1)(n-2)(n-3)/24$ puncte de intersecție ale diagonalelor poligonului cu n laturi este egală cu 360° (aceste unghiuri acoperă un unghi complet în jurul punctului de intersecție), iar suma tuturor unghiurilor alăturate în toate vîrfurile poligonului este egală cu suma unghiurilor poligonului, adică este egală cu $(n-2)\times \times 180°$. Rezultă deci că

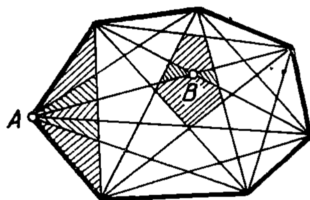


Fig. 60

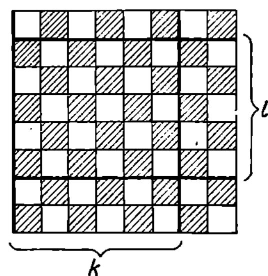


Fig. 61

$$[r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \ldots + (m-2)\,r_m]\cdot 180° =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\cdot 360° + (n-2)\cdot 180°,$$

adică

$$r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \ldots + (m-2)\,r_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + (n-2),$$

Scăzînd expresia pentru $r_3 + 2r_4 + 3r_5 + \ldots + (m-2)\,r_m$ din expresia pentru $3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \ldots + mr_m$, obținem

$$2(r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_m) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12} + (n-1)(n-2)$$

de unde

$$f_n = r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_m =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

46. a) Se va arăta, mai întîi, cîte dreptunghiuri de lățime dată k și înălțime dată l alcătuite dintr-un număr întreg de pătrate pot fi formate pe o tablă de șah. Fiecare dreptunghi de acest fel se obține separînd pe tablă k verticale consecutive și l orizontale consecutive (fig. 61). Un grup de k verticale consecutive poate fi ales în $8 - k + 1 = 9 - k$ moduri diferite (ca primă verticală a grupului poate fi luată prima, a doua, a treia ..., a $(8 - k + 1)$-a verticală a tablei); în mod analog, l orizontale consectutive pot fi alese în $8 - l + 1 = 9 - l$ moduri. De aici rezultă că un dreptunghi de lățime k și

înălţime l poate fi ales în $(9-k)(9-l)$ moduri diferite, adică pe tablă există în total $(9-k)(9-l)$ astfel de dreptunghiuri.

Se vor determina acum cîte dreptunghiuri diferite de lăţime dată k se pot forma pe o tablă de şah. Înălţimea l a dreptunghiului poate să varieze între 1 şi 8; deci numărul unor astfel de dreptunghiuri este egal cu

$$(9-k)(9-1)+(9-k)(9-2)+\ldots+(9-k)(9-8)=$$
$$=(9-k)(8+7+6+5+4+3+2+1)=36(9-k).$$

Ţinînd seama că lăţimea k a dreptunghiului poate, de asemenea, să varieze între 1 şi 8, vom găsi că numărul total de dreptunghiuri diferite este egal cu

$$36(9-1)+36(9-2)+\ldots+36(9-8)=$$
$$=36(8+7+6+5+4+3+2+1)=36\cdot 36=1\,296.$$

b) Într-un mod cu totul analog ca în rezolvarea problemei a), tragem concluzia că numărul tuturor dreptunghiurilor posibile de lăţime k şi înălţime l pe o tablă cu n^2 pătrate este egal cu $(n+1-k)(n+1-l)$. Numărul tuturor dreptunghiurilor posibile de lungime dată k este egal cu

$$(n+1-k)(1+2+\ldots+n)=(n+1-k)\,n(n+1)/2,$$

iar numărul tuturor dreptunghiurilor diferite posibile este egal cu

$$\frac{n(n+1)}{2}(1+2+\ldots+n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

47. a) Această problemă este asemănătoare cu precedenta. Numărul tururor pătratelor fomate din k^2 pătrate, care pot fi alese pe o tablă de şah cu 64 pătrate, este egal cu $(9-k)^2$ (v. rezolvarea problemei 46, a)). De aici rezultă că numărul tuturor pătratelor este egal cu

$$8^2+7^2+6^2+\ldots+1^2=64+49+36+25+16+9+4+1=204.$$

b) În mod analog ca în rezolvarea problemei a) se trage concluzia că numărul căutat este egal cu

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Observaţie. Deoarece după formula cunoscută (această formulă nu este greu de stabilit prin metoda inducţiei complete sau de demonstrat în mod analog ca în nota de la p. 132 avem

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

se poate da rgzultatelor problemelor a) şi b) următoarea formulă simetrică.

Numărul pătratelor diferite, formate dintr-un număr întreg de pătrate, care pot fi trasate pe o tablă cu n^2 pătrate, este egal cu

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2;$$

numărul dreptunghiurilor diferite, formate dintr-un număr întreg de pătrate, care pot fi trasate pe o tablă cu n^2 pătrate, este egal cu

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

48. Evident că vîrfurile triunghiurilor căutate sînt sau vîrfurile poligonului inițial sau punctele de intersecție ale diagonalelor sale. Să cercetăm separat patru cazuri posibile:

1° Toate cele trei vîrfuri ale triunghiului sînt vîrfuri ale poligonului.

2° Două vîrfuri ale triunghiului sînt vîrfuri ale poligonului, iar al treilea este punct de intersecție a diagonalelor.

3° Unul dintre vîrfurile triunghiului este vîrf al poligonului, iar două sînt puncte de intersecție a diagonalelor.

4° Toate cele trei vîrfuri ale triunghiului sînt puncte de intersecție a diagonalelor.

1° Numărul triunghiurilor, ale căror vîrfuri coincid toate cu vîrfurile poligonului (fig. 62, *a*), este evident, egal cu C_n^3.

2° Se va considera un triunghi oarecare A_1A_2B, unde A_1 și A_2 sînt vîrfuri ale poligonului, iar B este punct de intersecție a diagonalelor (fig. 62, *b*). Laturile A_1B și A_2B ale acestui triunghi aparțin diagonalelor A_1A_3 și A_2A_4 ale poligonului; triunghiul nostru este unul dintre cele patru triunghiuri în care este împărțit patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ prin diagonalele sale. În acest caz, fiecărui grup de patru vîrfuri A_1, A_2, A_3 și A_4 ale poligonului inițial îi corespund patru triunghiuri, care au două vîrfuri în vîrfurile poligonului și unul într-un punct de intersecție a diagonalelor sale (astfel vor fi cele patru triunghiuri în care este împărțit patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ prin diagonalele sale). Deci numărul total de triunghiuri de tipul 2° este egal cu $4C_n^4$.

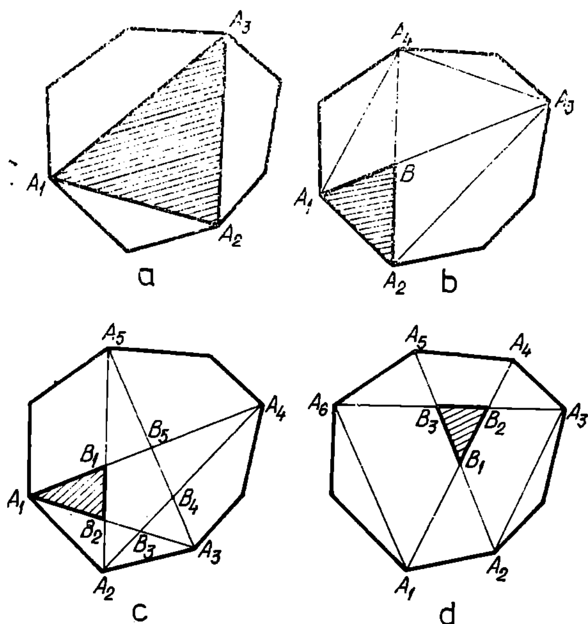


Fig. 62

3° Se consideră un triunghi oarecare $A_1B_1B_2$, unde A_1 este un vîrf al poligonului, iar B_1 și B_2 sînt puncte de intersecție a diagonalelor (fig. 62, *c*). Laturile A_1B_1, A_1B_2 și B_1B_2 ale acestui triunghi aparțin diagonalelor A_1A_4, A_1A_3, A_2A_5 ale poligonului; triunghiul nostru $A_1B_1B_2$ este unul dintre cele cinci triunghiuri care se obțin cu vîrfurile stelei în cinci colțuri

$A_1B_2A_2B_3A_3B_4A_4B_5A_5B_1$. În acest caz, fiecărui grup de cinci vîrfuri A_1, A_2, A_3, A_4 și A_5 îi corespunde o anumită „stea în cinci colțuri", care conține cinci triunghiuri de tipul 3°. Deci, numărul total de triunghiuri de tipul 3° este egal cu $5C_n^5$.

4° Se consideră un triunghi oarecare $B_1B_2B_3$, unde B_1, B_2, B_3 sînt puncte de intersecție a diagonalelor poligonului (fig. 62, *d*). Laturile B_1B_2, B_2B_3 și B_3B_1 ale acestui triunghi aparțin diagonalelor A_1A_4, A_3A_6 și A_2A_5 ale poligonului. În acest caz, evident, fiecărui grup de șase vîrfuri A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ale poligonului nostru îi corespunde un singur triunghi de tipul 4°, format de diagonalele care unesc vîrfurile opuse ale hexagonului convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Deci numărul total de triunghiuri de tipul 4° este egal cu C_n^6.

În acest mod, numărul total T_n al tuturor triunghiurilor căutate, care se obține prin însumarea numărului de triunghiuri de tipul 1°, 2°, 3° și 4°, este egal cu

$$T_n = C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6 =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left[1 + (n-3) + \frac{(n-3)(n-4)}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{120}\right] = \frac{n(n-1)(n-2)(n^3+18n^2-43n+60)}{720}.$$

Punînd în această formulă $n = 3, 4, 5$ etc., se obțin

$$T_3 = 1, \quad T_4 = 8, \quad T_5 = 35, \quad T_6 = 111 \text{ etc.}$$

49. Pentru ca să existe cel puțin un astfel de poligon cu k laturi, trebuie ca n să nu fie mai mic decît $2k$ (deoarece oricare două vîrfuri ale poligonului cu k laturi trebuie să fie separate de cel puțin un vîrf al poligonului cu n laturi).

Se vor nota vîrfurile poligonului cu $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ și vom calcula cîte poligoane cu k laturi verifică condițiile problemei și au un vîrf în A_{n-1}. Să presupunem că celelalte $k-1$ vîrfuri ale unui astfel de poligon cu k laturi sînt punctele $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{k-1}}$. Numerele $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ sînt toate cuprinse între 1 și $n-3$ trebuie să verifice condiția

$$i_2 - i_1 \geqslant 2, \quad i_3 - i_2 \geqslant 2, \ldots, i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2.$$

Se consideră acum $k-1$ numere

$$j_1 = i_1, \quad j_2 = i_2 - 1, \quad j_3 = i_3 - 2, \ldots, j_{k-1} = i_{k-1} - (k-2).$$

Din inegalitățile pe care trebuie să le verifice numerele $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ rezultă că numerele $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ vor verifica inegalitățile

$$1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_{k-1} \leqslant (n-3) - (k-2) = n - k - 1.$$

Reciproc, dacă $j_1, j_2, \ldots, j_{k-1}$ sînt numere oarecare neegale între ele, cuprinse între 1 și $n-k-1$ și așezate în ordine crescătoare, atunci numerele $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2 + 1, \ldots, i_{k-1} = j_{k-1} + (k-2)$ vor verifica inegalitățile

$$i_1 \geqslant 1, \quad i_2 - i_1 \geqslant 2, \ldots, i_{k-1} - i_{k-2} \geqslant 2, \quad i_{k-1} \leqslant n-3$$

şi deci poligonul cu k laturi $A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_{k-1}}A_{n-1}$ va fi unul dintre poligoanele căutate, care au un vîrf în punctul A_{n-1}. Rezultă deci că numărul poligoanelor căutate, care au un vîrf în punctul A_{n-1}, este egal cu numărul grupurilor de $k - 1$ numere întregi pozitive care nu sînt mai mari decît $n - k - 1$, adică este egal cu C_{n-k-1}^{k-1}.

Este uşor de calculat care este numărul total de poligoane, care satisfac condiţiile problemei noastre. Întrucît numărul poligoanelor cu k laturi, care au unul dintre vîrfuri într-un anumit vîrf al poligonului cu n laturi, este acelaşi pentru toate vîrfurile, înmulţind C_{n-k-1}^{k-1} cu n (adică însumînd numărul poligoanelor cu k laturi, care au drept unul dintre vîrfuri un vîrf determinat al poligonului cu n laturi, după toate cele n vîrfuri), vom socoti fiecare poligon cu k laturi, care verifică condiţiile problemei, de k ori (poligonul cu k laturi are k vîrfuri). Deci, numărul căutat al poligoanelor diferite cu k laturi este egal cu

$$\frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1} = \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}.$$

50. a) Se presupune că un poligon cu n laturi este împărţit de diagonalele care nu se intersectează în interiorul său în k triunghiuri. Atunci suma tuturor unghiurilor interioare ale tuturor acestor triunghiuri este egală cu $180°k$.

Se va calcula această sumă pe altă cale. Deoarece diagonalele considerate nu se intersectează în interiorul poligonului, toate vîrfurile triunghiurilor se află în vîrfurile poligonului. Suma unghiurilor pentru toate vîrfurile triunghiurilor de diviziune, alăturate într-un vîrf dat al poligonului, este egală cu unghiul interior al poligonului din acest vîrf (fig. 63). Deci, suma tuturor unghiurilor interioare ale tuturor triunghiurilor este egală cu suma tuturor unghiurilor interioare ale poligonului, adică este egală cu $(n - 2) \cdot 180°$. De aici rezultă $k \cdot 180° = (n - 2) \cdot 180°$, adică

$$k = n - 2.$$

Astfel, numărul triunghiurilor în care este împărţit poligonul de către diagonale este egal cu $n - 2$ şi nu depinde de modul de diviziune.

b) Se va calcula numărul l al diagonalelor care fac parte dintr-o astfel de diviziune. Fiecare triunghi are trei laturi, deci numărul total al laturilor tuturor triunghiurilor este egal cu $3(n - 2)$. Dar fiecare diagonală a poligonului este latura a două triunghiuri, iar fiecare latură a poligonului este latură a unui singur triunghi. Deci

$$3(n-2) = 2l + n, \quad 3n - 6 - n = 2l, \quad l = (2n-6)/2 = n - 3.$$

Astfel, numărul diagonalelor este egal cu $n - 3$ şi nu depinde de modul de diviziune.

51. a) Se va nota cu T_n numărul de moduri în care poate fi împărţit în triunghiuri poligonul cu n laturi prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul său. Vom arăta că, dacă sînt cunoscute numerele $T_1, T_2, \dots, T_n$, se poate determina şi numărul T_{n+1}.

Se va fixa o latură oarecare a poligonului cu $n + 1$ laturi, de exemplu A_1A_2. În acest caz, sînt posibile următoarele moduri de împărțire în triunghiuri a poligonului cu $n + 1$ laturi.

1° În descompunere intră $\triangle A_1A_2A_3$ (fig. 64, *a*). Deoarece poligonul cu $n + 1$ laturi este convex, diagonala A_1A_3 separă din el un poligon cu n laturi convex, care poate fi descompuns în triunghiuri în T_n moduri. Deci, există

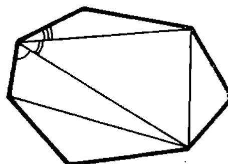


Fig. 63

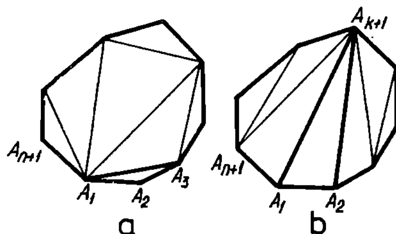


Fig. 64

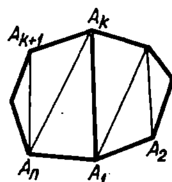


Fig. 65

T_n moduri de diviziune a poligonului cu $n + 1$ laturi în triunghiuri, în care intră $\triangle A_1A_2A_3$.

2° La fel există T_n moduri de descompunere, în care în descompunere intră $\triangle A_1A_2A_{n+1}$.

3° În descompunere intră $\triangle A_1A_2A_{k+1}$, unde $2 < k < n$ (fig. 64, *b*). Se va calcula numărul descompunerilor existente atunci cînd se fixează k. Diagonala $A_{k+1}A_2$ separă din poligonul cu $n + 1$ laturi un poligon cu k laturi $A_2A_3 \ldots A_{k+1}$, iar diagonala A_1A_{k+1} va separa din poligonul cu $n + 1$ laturi un poligon cu $n - k + 2$ laturi $A_{k+1}A_{k+2} \ldots A_nA_{n+1}A_1$. Poligonul cu k laturi poate fi descompus în triunghiuri în T_k moduri, iar poligonul cu $n + 2 - k$ laturi în T_{n+2-k} moduri. Deoarece putem în descompunerea poligonului cu $n+1$ laturi să combinăm o descompunere oarecare a poligonului cu k laturi cu o descompunere oarecare a poligonului cu $n + 2 - k$ laturi, numărul tuturor descompunerilor poligonului cu $n + 1$ laturi în care intră $\triangle A_1A_2A_{k+1}$ este egal cu T_kT_{n+2-k}.

Dînd lui k diferite valori 2, 3, 4, ..., n, vom obține relația

$$T_{n+1} = 2T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3.$$

Trebuie să considerăm că $T_3 = 1$ (există o singură descompunere pentru triunghiuri); patrulaterul poate, însă, să fie descompus în două moduri în triunghiuri (cu fiecare dintre cele două diagonale), așadar $T_4 = 2$.

Mai departe calculele pot fi efectuate cu ajutorul formulei obținute:

$$T_5 = 2T_4 + T_3T_3 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

$$T_6 = 2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 14,$$

$$T_7 = 2T_6 + T_3T_5 + T_4T_4 + T_5T_3 = 2 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 42,$$

$$T_8 = 2T_1 + T_3T_6 + T_4T_5 + T_5T_4 + T_6T_3 =$$
$$= 2 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 = 132.$$

Deci, octogonul convex poate fi descompuns în triunghiuri prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul său în 132 moduri diferite.

b) Folosind numai formula dedusă în problema a), este greu de stabilit cu ce este egal numărul T_n în cazul general. De aceea, vom deduce, acum, încă o relație care permite să determinăm pe T_n, cunoscînd pe $T_3, T_4, \ldots, T_{n-1}$. Folosind apoi ambele relații obținute, vom determina fără greutate formula pentru T_n.

Se va calcula numărul descompunerilor poligonului convex $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, din care face parte diagonala A_1A_k. Această diagonală împarte poligonul în poligonul $A_1A_2 \ldots A_k$ și poligonul cu $n - k + 2$ laturi $A_kA_{k+1} \ldots A_nA_1$ (fig. 65). Deoarece primul dintre aceste poligoane poate fi împărțit în triunghiuri în T_k moduri, iar al doilea în T_{n-k+2} moduri, numărul descompunerilor poligonului, din care face parte diagonala A_1A_k, este egal cu T_kT_{n-k+2}.

Numărul descompunerilor din care face parte o anumită diagonală poate fi însumat după toate diagonalele poligonului în modul următor: mai întîi vom forma suma din $n - 2$ termeni, corespunzătoare celor $n - 2$ diagonale care trec prin vîrful A_1. Apoi vom înmulți această sumă cu numărul n al vîrfurilor și produsul obținut îl vom împărți la 2 (deoarece fiecare diagonală trece prin două vîrfuri). Suma corespunzătoare diagonalelor care trec prin vîrful A_1 este evident egală cu

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3.$$

După înmulțirea acestei expresii cu $n/2$ vom obține

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3).$$

Prin însumarea după fiecare diagonală a numărului de descompuneri din care face parte diagonala dată, fiecare descompunere va fi, evident, considerată de atîtea ori cîte diagonale fac parte din această descompunere. Conform problemei 50, b), numărul diagonalelor care fac parte din fiecare descompunere este egal cu $n - 3$. Deci

$$\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3) = (n-3)T_n. \qquad (*)$$

Aceasta este formula pe care am voit să o obținem.

Se observă, acum, că expresia care stă între paranteze în partea stîngă a egalității (*) figurează, de asemenea, în formula stabilită în soluția problemei a):

$$T_{n+1} = 2T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3,$$

Deci

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3 = T_{n+1} - 2T_n.$$

Substituind această expresie în formula (*), se obține

$$\frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n) = (n-3)\,T_n,$$

de unde

$$T_{n+1} - 2T_n = \frac{2(n-3)}{n} T_n,$$

$$T_{n+1} = 2T_n + \frac{2(n-3)}{n} T_n = \frac{4n-6}{n} T_n = \frac{2(2n-3)}{n} T_n.$$

Acum se deduce fără nici o dificultate formula generală

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} T_n = \frac{2(2n-3)\,2(2n-5)}{n(n-1)} T_{n-1} =$$

$$= \frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\,2(2n-7)}{n(n-1)(n-2)} T_{n-2} =$$

....

$$= \frac{2(2n-3)\,2(2n-5)\dots 2[2n-3-2(n-3)]}{n(n-1)\dots[n-(n-3)]} T_3 =$$

$$= 2^{n-2} \frac{3\cdot 5\dots(2n-3)}{3\cdot 4\cdot 5\dots n}\cdot 1 = 2^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!}$$

sau, înlocuind $n+1$ cu n,

$$T_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-5)}{(n-1)!} 2^{n-2}.$$

Folosind formula pentru numărul combinărilor de m elemente luate cîte k, această relaţie poate fi scrisă sub forma următoare:

$$T_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(2n-6)(2n-5)}{(n-1)!\,2\cdot 4\dots(2n-6)} 2^{n-2} = \frac{(2n-5)!\,2^{n-2}}{(n-1)!\,2^{n-3}(n-3)!} =$$

$$= \frac{2}{n-1}\,\frac{(2n-5)!}{(n-2)!\,(n-3)!} = \frac{2}{n-1} C_{2n-5}^{n-3} = \frac{2}{n-3} C_{2n-5}^{n-1}$$

sau încă altfel:

$$T_n = \frac{(2n-5)!\,2}{(n-1)!\,(n-3)!} = \frac{(2n-4)!}{(n-2)(n-1)!(n-3)!} = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2} = \frac{1}{n-1} C_{2n-4}^{n-2} = \frac{1}{n-2}\,\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-3)!} = \frac{1}{n-2} C_{2n-4}^{n-3}$$

sau

$$T_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!} = \frac{1}{2n-3}\,\frac{(2n-3)!}{(n-1)!\,(n-2)!} = \frac{1}{2n-3}\,C_{2n-3}^{n-2}.$$

Se mai observă că, pentru valori mai mari ale lui n, calculul numărului T_n cu oricare dintre formulele date este laborios (deoarece trebuie să calculăm un produs cu un mare număr de factori). Utilizînd, însă, formula lui Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(v. problemele 160—161 și textul care se referă la aceste probleme), se poate obține fără dificultate o formulă aproximativă pentru T_n, utilă pentru valori mari ale lui n

$$T_n = \frac{1}{n-1}\,\frac{(2n-4)!}{[(n-2)!]^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi 2(n-2)}\,[2(n-2)]^{2(n-2)}\,e^{-2(n-2)}}{(n-1)\,[\sqrt{2\pi(n-2)}\,(n-2)^{(n-2)}\,e^{-(n-2)}]^2} =$$

$$= \frac{2^{2(n-2)}}{(n-1)\sqrt{\pi(n-2)}};$$

această formulă ne permite, cu ajutorul tabelelor de logaritmi, să calculăm pe T_n cu o precizie destul de mare pentru valori ale lui n oricît de mari (se observă, că precizia formulei aproximative este cu atît mai mare, cu cît n este mai mare).

52. a) Vom nota cu Φ_n numărul de moduri în care $2n$ puncte oarecare de pe cerc pot fi unite două cîte două prin n coarde care nu se intersectează în interiorul cercului. Vom arăta că, cunoscînd pe $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, putem determina pe Φ_n.

Să notăm cele $2n$ puncte în ordinea succesiunii lor pe cerc cu $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$. Punctul A_1 poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \ldots, A_{2n}$; altfel, de ambele părți ale coardei care trece prin punctul A_1 s-ar găsi cîte un număr impar de puncte și deci, unind punctele două cîte două, coarda care trece prin A_1 ar trebui să fie intersectată de cel puțin o coardă.

Să calculăm numărul modurilor diferite de unire a punctelor, în care A_1 este unit cu A_{2k}. În acest caz, de o parte a coardei A_1A_{2k} se află $2(k-1)$ puncte (punctele $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$), iar de cealaltă $2(n-k)$ puncte (punctele $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \ldots, A_{2n}$). Evident că primele $2(k-1)$ puncte pot fi unite două cîte două în Φ_{k-1} moduri, iar celelalte $2(n-k)$ puncte în Φ_{n-k} moduri. Toate modurile posibile, care verifică condițiile problemei, de unire două cîte două a tuturor $2n$ puncte și în care A_1 este unit cu A_{2k}, le vom obține combinînd toate cele Φ_{k-1} moduri diferite de unire a punctelor $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-1}$ cu toate cele Φ_{n-k} moduri diferite pentru punctele $A_{2k+1}, A_{2k+2}, \ldots, A_{2n}$; astfel numărul acestor moduri de unire este egal cu $\Phi_{k-1}\Phi_{n-k}$. Considerînd, acum, că punctul A_1 poate fi unit cu punctele $A_2, A_4, A_6, \ldots A_{2n-2}, A_{2n}$, obținem formula generală

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1\Phi_{n-2} + \Phi_2\Phi_{n-3} + \ldots + \Phi_{n-2}\Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

Cu ajutorul acestei formule putem, fără nici o dificultate, să determinăm orice Φ_n. Trebuie să calculăm pe Φ_{10}; vom observa că Φ_1 este evident egal

cu 1 (două puncte pot fi unite într-un mod unic), iar mai departe vom calcula succesiv:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Phi_1\Phi_1 + \Phi_2 = 2 + 1 \cdot 1 + 2 = 5,$$

$$\Phi_4 = \Phi_3 + \Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_1 + \Phi_3 = 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 = 14,$$

$$\Phi_5 = \Phi_4 + \Phi_1\Phi_3 + \Phi_2\Phi_2 + \Phi_3\Phi_1 + \Phi_4 = 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 = 42,$$

$$\Phi_6 = \Phi_5 + \Phi_1\Phi_4 + \Phi_2\Phi_3 + \Phi_3\Phi_2 + \Phi_4\Phi_1 + \Phi_5 = 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 = 132,$$

$$\Phi_7 = \Phi_6 + \Phi_1\Phi_5 + \Phi_2\Phi_4 + \Phi_3\Phi_3 + \Phi_4\Phi_2 + \Phi_5\Phi_1 + \Phi_6 = 132 + 1 \cdot 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 \cdot 1 + 132 = 429,$$

$$\Phi_8 = \Phi_7 + \Phi_1\Phi_6 + \Phi_2\Phi_5 + \Phi_3\Phi_4 + \Phi_4\Phi_3 + \Phi_5\Phi_2 + \Phi_6\Phi_1 + \Phi_7 = 429 + 1 \cdot 132 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2 + 132 \cdot 1 + 429 = 1\,430,$$

$$\Phi_9 = \Phi_8 + \Phi_1\Phi_7 + \Phi_2\Phi_6 + \Phi_3\Phi_5 + \Phi_4\Phi_4 + \Phi_5\Phi_3 + \Phi_6\Phi_2 + \Phi_7\Phi_1 + \Phi_8 = 1\,430 + 1 \cdot 429 + 2 \cdot 132 + 5 \cdot 42 + 14 \cdot 14 + 42 \cdot 5 + 132 \cdot 2 + 1\,430 = 4\,862,$$

$$\Phi_{10} = \Phi_9 + \Phi_1\Phi_8 + \Phi_2\Phi_7 + \Phi_3\Phi_6 + \Phi_4\Phi_5 + \Phi_5\Phi_4 + \Phi_6\Phi_3 + \Phi_7\Phi_2 + \Phi_8\Phi_1 + \Phi_9 = 4\,862 + 1 \cdot 1\,430 + 2 \cdot 429 + 5 \cdot 132 + 14 \cdot 42 + 42 \cdot 14 + 132 \cdot 5 + 429 \cdot 2 + 1\,430 \cdot 1 + 4\,862 = 16\,796.$$

Deci, numărul căutat de moduri este 16 796.

b) Să notăm numărul căutat de moduri cu Φ_n. În rezolvarea problemei a) s-a aratat că Φ_n verifică relația

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_1\Phi_{n-2} + \Phi_2\Phi_{n-3} + \dots + \Phi_{n-2}\Phi_1 + \Phi_{n-1}.$$

Această relație ne permite să determinăm pe Φ_n, cunoscînd pe Φ_1, Φ_2, Φ_3, ..., Φ_{n-1} și cu ajutorul ei putem să calculăm succesiv pe Φ_n pentru orice n (v. rezolvarea problemei a)); însă formula generală pentru Φ_n din această relație este greu de dedus. Am putea, ca în rezolvarea problemei 51, b), să încercăm să găsim încă o relație dintre Φ_n și Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{n-1}, însă este mult mai ușor să utilizăm dintr-o dată rezultatul obținut la problema 51, b). Într-adevăr, la rezolvarea acestei probleme s-a arătat că numerele T_n verifică relația

$$T_{n+1} = T_n + T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \dots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3 + T_n,$$

foarte asemănătoare cu relația pe care o verifică Φ_n. Vom nota pe T_{n+2} cu R_n; atunci R_n va verifica exact aceeași relație ca și Φ_n:

$$R_{n-1} = R_{n-2} + R_1R_{n-3} + R_2R_{n-4} + \dots + R_{n-4}R_2 + R_{n-3}R_1 + R_{n-2}$$

sau, înlocuind $n - 1$ cu n,

$$R_n = R_{n-1} + R_1R_{n-2} + R_2R_{n-3} + \dots + R_{n-3}R_2 + R_{n-2}R_1 + R_{n-1}.$$

În acest caz, $R_1 = T_3 = 1 = \Phi_1$; deci calculul succesiv al lui R_n cu această formulă pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ conduce la același rezultat ca și calculul succesiv al lui Φ_n cu formula dată mai sus (compară soluțiile problemelor 51, a) și 52, a): calculele în ambele cazuri coincid în întregime).

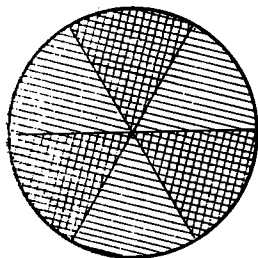
Deci, pentru orice n

$$\Phi_n = R_n = T_{n+2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(n+1)!} 2^n$$

sau, utilizînd expresia pentru numărul combinărilor de n elemente luate cîte m,

$$\Phi_n = \frac{2}{n+1} C_{2n-1}^{n-1} = \frac{2}{n-1} C_{2n-1}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{1}{n} C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^{n}.$$

53. a) Fiecare dintre cele p sectoare poate fi vopsit cu n culori. Deci două sectoare pot fi vopsite în n^2 moduri diferite (fiecare dintre cele n moduri de vopsire pentru un sector poate fi asociat cu fiecare dintre cele n moduri de vopsire pentru un al doilea sector), trei sectoare pot fi vopsite în n^3 moduri diferite (fiecare dintre cele n^2 moduri de vopsire pentru două sectoare poate fi asociat cu fiecare dintre modurile de vopsire pentru un al treilea) etc.; p sectoare pot fi vopsite în n^p moduri diferite. Aici, însă, se consideră diferite două moduri de vopsire oarecare, în care cel puțin un sector este vopsit diferit. Unele dintre aceste moduri de vopsire „diferite" se pot suprapune prin rotirea cercului și deci trebuie considerate ca fiind identice.


Fig. 66

Să calculăm, acum, cîte astfel de moduri de vopsire „diferite" se obțin prin rotirea cercului vopsit într-un anumit mod. Este clar că dacă toate cele p sectoare sînt vopsite într-o singură culoare (vor fi astfel de vopsiri cîte culori diferite avem, adică n), atunci, prin nici o rotire a cercului nu se va obține un nou mod de vopsire. Dacă însă unele sectoare sînt vopsite difererit, atunci pot fi obținute noi moduri de vopsire prin rotirea cercului cu unghiurile de

$$\frac{360°}{p}, \quad \frac{360°}{p}\cdot 2, \quad \frac{360°}{p}\cdot 3, \dots, \quad \frac{360°}{p}\cdot (p-1)$$

(prin aceste rotații sectoarele trec unul în altul). Vom arăta că, pentru un mod de vopsire oarecare, în care cel puțin două sectoare sînt colorate diferit, nici un grup de două dintre cele p moduri de vopsire care se obțin din cea inițială prin rotația cercului cu 0° (aceasta este vospirea inițială), cu $\frac{360°}{p}$, $\frac{360°}{p}\cdot 2, \dots$

..., $\frac{360°}{p} \cdot (p-1)$ nu vor coincide. (Se observă că pentru p neprim acest lucru nu-i adevărat: prin rotirea, de exemplu, a vopsirii reprezentate în fig. 66 cu unghiul de $\frac{360°}{6} \cdot 2 = \frac{360°}{3}$ vom obține aceeași vopsire). Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că la rotiri cu unghiurile de $\frac{360°}{p} \cdot k$ și $\frac{360°}{p} \cdot m$, unde $0 \leqslant k \leqslant (p-1)$, $0 \leqslant m \leqslant (p-1)$, $k < m$, obținem una și aceeași vopsire. Rotind cercul cu unghiul $\frac{360°}{p} \cdot m$ și apoi cu unghiul de $\frac{360°}{p} \cdot k$ în sens contrar, ne convingem că vopsirea inițială trece în ea însăși prin rotație cu unghiul de $\frac{360°}{p} \cdot (m-k)$. Deci, această vopsire trece în ea însăși și la rotațiile cercului cu unghiurile de

$$\frac{360°}{p} \cdot 2(m-k), \quad \frac{360°}{p} \cdot 3(m-k), \ldots, \frac{360°}{p}(p-1)(m-k).$$

Este ușor de văzut însă că la rotații cu unghiurile de

$$0°, \quad \frac{360°}{p} \cdot (m-k), \quad \frac{360°}{p} \cdot 2(m-k), \ldots, \frac{360°}{p} \cdot (p-1)(m-k)$$

(în total sînt p unghiuri!) primul sector se va suprapune pe rînd **cu toate** sectoarele. În caz contrar, la două rotații oarecare, de exemplu, la rotații cu unghiurile de $\frac{360°}{p} \cdot q(m-k)$ și $\frac{360°}{p} \cdot l(m-k)$, primul sector ar fi trebuit să ocupe aceeași poziție (deoarece în total există p poziții diferite, adică atîtea cîte rotații sînt), ceea ce nu este posibil, deoarece diferența

$$\frac{360°}{p} l(m-k) - \frac{360°}{p} q(m-k) = \frac{360°}{p} (l-q)(m-k)$$

nu este multiplu de 360° (p este prim, iar $l-q$ și $m-k$ sînt mai mici decît p). Astfel, pentru ca două vopsiri obținute din vopsirea inițială să se poată suprapune prin rotații cu unghiurile de $\frac{360°}{p} m$ și $\frac{360°}{p} k$, ar fi trebuit ca toate sectoarele să fie vopsite cu aceeași culoare ca și primul sector, adică toate să fie vopsite cu una și aceeași culoare.

Deci, printre n^p moduri de vopsire, cele n vopsiri cu o singură culoare se consideră cîte o singură dată, iar fiecare dintre celelalte vopsiri se consideră de p ori. Deci numărul total de vopsiri diferite este egal cu

$$n + (n^p - n)/p.$$

b) Deoarece numărul modurilor de vopsire diferite este totdeauna un număr întreg, rezultă că, dacă p este un număr prim, atunci pentru orice n, numărul $n^p - n$ se divide cu p. Aceasta este teorema lui Fermat.

54. a) Se va determina, mai întîi, numărul poligoanelor stelate cu p laturi, diferite ca formă sau ca poziție, care au ca vîrfuri punctele $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Se va considera că punctele $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sînt situate pe cerc în ordine succesivă. Toate poligoanele cu p laturi care au ca vîrfuri aceste puncte se obțin unind punctul A_1 cu un punct oarecare A_{i_1} din numărul de $p - 1$ puncte A_2, $A_3, \ldots, A_p$, unind punctul A_{i_1} cu un punct oarecare A_{i_2} din numărul de $p-2$ puncte diferite de A_1 și de A_{i_1}, unind punctul A_{i_2} cu un punct oarecare A_{i_3} din numărul celor $p - 3$ puncte rămase etc. pînă ce terminăm toate punctele A_2, $A_3, \ldots, A_p$; ultimul dintre aceste puncte (punctul $A_{i_{p-1}}$) este unit din nou cu A_1. Punctul A_{i_1} poate fi ales în $p - 1$ moduri diferite, punctul A_{i_2} poate fi ales, după aceea, în $p - 2$ moduri diferite, punctul A_{i_3} poate fi ales în $p - 3$ moduri etc. Combinînd toate modurile posibile de alegere a punctelor A_{i_1}, $A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_{p-1}}$, vom obține în total

$$(p - 1)(p - 2)(p - 3) \ldots 1 = (p - 1)!$$

moduri de alegere a șirului $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_{p-1}}$ (numărul tuturor permutărilor posibile ale numerelor $2, 3, \ldots, p - 1, p$). Să observăm însă, că fiecare poligon care are ca vîrfuri punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ este obținut prin această metodă de două ori: o dată cînd unim A_1 cu A_{i_1}, A_{i_1} cu A_{i_2}, A_{i_2} cu $A_{i_3}, \ldots, A_{i_{p-2}}$ cu $A_{i_{p-1}}$ și $A_{i_{p-1}}$ cu A_1, și a doua oară, cînd unim A_1 cu $A_{i_{p-1}}$, $A_{i_{p-1}}$ cu $A_{i_{p-2}}, \ldots$ $\ldots, A_{i_3}$ cu A_{i_2}, A_{i_2} cu A_{i_1} și A_{i_1} cu A_1 (de exemplu, pentru $p = 7$ heptagoanele $A_1A_4A_5A_3A_7A_2A_6$ și $A_1A_6A_2A_7A_3A_5A_4$ vor coincide, iar toate celelalte heptagoane $A_1A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}A_{i_6}$ vor fi diferite de acestea). Astfel, numărul total al poligoanelor cu p laturi care au ca vîrfuri punctele $A_1, A_2, \ldots, A_p$ este egal cu $(p - 1)/2$.

Este ușor de văzut că dintre aceste $(p - 1)!/2$ poligoane unul singur $A_1A_2A_3 \ldots A_p$ nu va fi stelat, celelalte poligoane vor conține toate cel puțin o intersecție. Astfel, numărul total al poligoanelor s t e l a t e diferite ca formă și ca poziție și care au ca vîrfuri punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ este egal cu $\frac{1}{2}(p - 1)! - 1$.

Se va determina acum, cu cît se va micșora acest număr, dacă se consideră ca diferite doar acele poligoane cu p laturi care nu se suprapun prin rotația cercului. În acest scop, trebuie să calculăm cîte poligoane diferite cu p laturi se obțin dintr-un poligon printr-o rotație a cercului care transformă mulțimea punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_p$ în ea însăși, adică prin rotații de unghiurile $0°$, $\frac{360°}{p}$, $\frac{360°}{p} \cdot 2, \ldots, \frac{360°}{p} \cdot (p - 1)$. Se consideră cele p poligoane cu p laturi care se obțin dintr-unul singur prin aceste rotații. Raționînd ca la rezolvarea problemei 53, a), este ușor de demonstrat că, dacă două dintre ele se suprapun, neapărat se vor suprapune toate aceste poligoane (pentru demonstrație se va folosi faptul că p este un număr prim). Într-un astfel de caz, însă, evident, toate laturile și toate unghiurile poligonului stelat inițial cu p

laturi trebuie să fie egale între ele, adică acest poligon este regulat. Deci, din fiecare poligon stelat cu p laturi regulat se poate obține prin rotație doar un poligon cu p laturi, iar din fiecare dintre celelalte (neregulate) poligoane se obțin, în acest mod, p poligoane diferite ca poziție.

Se va determina numărul poligoanelor stelate regulate care au ca vîrfuri punctele date $A_1, A_2, ..., A_p$. Toate poligoanele regulate care au ca vîrfuri aceste puncte se obțin, evident, unind punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_p$ mai întîi succesiv (adică A_1 cu A_2, A_2 cu A_3 etc.); după aceea sărind unul (adică A_1 cu A_3, A_3 cu A_5 etc.), apoi sărind două (A_1 cu A_4, A_4 cu A_7 etc.), apoi sărind trei etc. Ca ultimă posibilitate vom uni toate vîrfurile date sărind $p - 2$ (A_1 cu A_p etc.). [Observăm că pentru p neprim nu toate poligoanele obținute vor fi poligoane cu p laturi: astfel, pentru $p = 6$, unind vîrfurile din două în două, vom obține triunghiul $A_1A_3A_5$, iar unind peste două, obținem bigonul (adică diametrul) A_1A_4. Dar pentru p prim acest lucru nu se poate întîmpla. Într-adevăr, numerele a p vîrfuri consecutive ale celui de a k-lea poligon sînt egale cu resturile împărțirii la p ale numerelor $1, 1 + k, 1 + 2k, 1 + 3k, ..., 1 + (p - 1)k$. Însă pentru p prim toate aceste resturi sînt diferite (deoarece diferența $(1 + mk) - (1 + nk) = (m - n)k$ pentru $m \neq n$, $m \leqslant p - 1$ și $n \leqslant p - 1$ nu poate să se dividă cu p). Deci, două vîrfuri ale celui de al k-lea poligon cu p laturi sînt diferite și, deci, avem efectiv un poligon cu p laturi].

Astfel, unind punctele $A_1, A_2, ..., A_p$ la rînd, peste unul, peste două ..., ..., peste $p-2$, vom obține $p-1$ poligoane regulate cu p laturi. Dar aceste $p-1$ poligoane regulate se vor suprapune două cîte două (unind vîrfurile peste k sau peste $p - 2 - k$, evident, vom obține unul și același poligon regulat).

Deci, numărul total de poligoane regulate cu vîrfurile în punctele $A_1, A_2, ..., A_p$ este egal cu $(p - 1)/2$ (astfel, pentru $p = 7$ vom avea trei heptagoane regulate: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $A_1A_3A_5A_7A_2A_4A_6$ și $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$; fig. 67). Numărul poligoanelor stelate regulate este egal cu $\frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-3}{2}$ (toate poligoanele regulate, în afara poligonului $A_1 A_2 ... A_p$, sînt stelate).

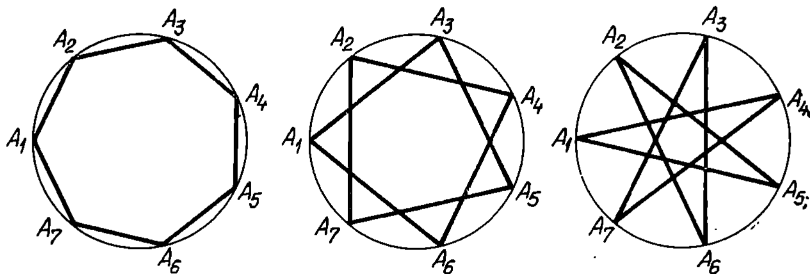


Fig. 67

Acum este ușor de găsit rezolvarea problemei. Deoarece printre cele $\frac{1}{2}(p-1)!-1$ poligoane regulate diferite ca formă sau ca poziție, fiecare dintre cele $(p - 3)/2$ poligoane regulate figurează o singură dată, iar fiecare dintre celelalte poligoane (neregulate) figurează de p ori, rezultă că numărul

total al poligoanelor stelate diferite, care nu se suprapun prin rotația cercului, este egal cu

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)!-1-\frac{1}{2}(p-3)}{p}+\frac{1}{2}(p-3)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(p-1)!+1}{p}+p-4\right\}.$$

b) Deoarece numărul poligoanelor stelate diferite cu p laturi este bineînțeles, un număr întreg, din rezultatul problemei precedente rezultă imediat că, pentru orice număr prim p, numărul $(p-1)!+1$ este divizibil cu p. [Aici considerăm că $p \geqslant 3$, deoarece altfel problema a) nu are sens: însă și pentru $p=2$ numărul $(p-1)!+1=2$ este divizibil cu $p=2$.]

Dacă numărul p nu este prim, atunci $(p-1)!+1$ sigur nu se divide cu p, deoarece în acest caz există un divizor al lui p, mai mic decît $p-1$ și $(p-1)!$ se divide cu acest divizor, iar $(p-1)!+1$ nu se divide cu el.

55. a) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

b) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n C_n^n=(1-1)^n=0$.

c) Se va folosi faptul că

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k=\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Deci

$$(n+1)\left\{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n\right\}=$$

$$=C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{n+1}=(1+1)^{n+1}-1=2^{n+1}-1$$

și

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

d) Se va folosi faptul că

$$kC_n^k=n\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots(k-1)}=nC_{n-1}^{k-1}.$$

Deci

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1})=$$

$$=n(1+1)^{n-1}=2^{n-1}n.$$

e) Ca în rezolvarea problemei d), se obține

$$C_n^1-2C_n^1+3C_n^3-\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=n[C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}]=n(1-1)^{n-1}=0.$$

f) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^n în următorul polinom:

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n.$$

Transformînd acest polinom, vom obține

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + x^{n-2}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n =$$

$$= (1-x)^n(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^{n-m}) = (1-x)^n \frac{x^{n+1} - x^{n-m}}{x-1} =$$

$$= -(1-x)^{n-1}\{x^{n+1} - x^{n-m}\} = x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x^n).$$

Deci, coeficientul căutat al lui x^n este egal cu $(-1)^m C_{n-1}^m$ pentru $m \leqslant n-1$ și egal cu 0 pentru $m = n$ (compară cu rezultatul problemei b)).

g) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^k în polinomul

$$(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \dots + (1+x)^{n+m}.$$

Transformînd acest polinom cu ajutorul formulei pentru suma termenilor unei progresii geometrice, vom obține

$$(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \dots + (1+x)^{n+m} =$$

$$= \frac{(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n}{(1+x)-1} = \frac{1}{x}\{(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n\}.$$

De aici este clar că coeficientul căutat al lui x^k este egal cu $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$ pentru $k \leqslant n-1$ și cu C_{n+m+1}^{n+1} pentru $k = n$.

h) Expresia căutată este egală cu coeficientul lui x^{2n} în polinomul

$$x^{2n}(1-x)^{2n} + x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} + x^{2n-2}(1-x)^{2n-2} + \dots + x^n(1-x)^n.$$

Înainte de a transforma acest polinom, îi vom mai adăuga următorii termeni care nu conțin pe x^{2n}:

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1} + x^{n-2}(1-x)^{n-2} + \dots + x(1+x) + 1;$$

prin adăugirea acestor termeni, coeficientul lui x^{2n} nu va fi desigur influențat. Suma căutată este egală cu

$$(x-x^2)^{2n} + (x-x^2)^{2n-1} + (x-x^2)^{2n-2} + \dots + (x-x^2) + 1 =$$

$$= \frac{(x-x^2)^{2n+1} - 1}{(x-x^2)-1} = \frac{x^{2n+1}(1-x)^{2n+1} - 1}{-x^2+x-1} = \frac{1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2-x+1}.$$

Deci, rămîne numai să determinăm coeficientul lui x^{2n} în expresia

$$[1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}]\frac{1}{1-x+x^2} = [1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}]\frac{1+x}{1+x^3}.$$

Conform formulei pentru suma progresiei geometrice infinite, avem

$$\frac{1+x}{1+x^3} = (1+x)\frac{1}{1+x^3} = (1+x)(1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots)$$

(bineînțeles că această formulă are sens numai dacă x este în valoare absolută mai mic decît unu, lucru de care vom ține seama). Deoarece $x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}$ conține numai puteri ale lui x mai mari decît $2n$, rezultă că suma căutată este egală cu coeficientul lui x^{2n} în ultimul produs. De aici rezultă că

$$C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - \dots + (-1)\, C_n^n =$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ pentru } 2n = 6k, \text{ adică pentru } n = 3k, \\ 0 \text{ pentru } 2n = 6k+2, \text{ adică pentru } n = 3k+1, \\ -1 \text{ pentru } 2n = 6k-2, \text{ adică pentru } n = 3k-1. \end{cases}$$

i) Expresia căutată este egală cu coeficientul lui x^n în polinomul

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n.$$

Se va transforma acest polinom folosind formula pentru suma termenilor unei progresii geometrice

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n =$$

$$= (1+x)^{2n}\left[1 + \frac{2}{1+x} + \frac{2^2}{(1+x)^2} + \dots + \frac{2^n}{(1+x)^n}\right] =$$

$$= (1+x)^{2n}\left[\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} - 1\right] \Big| \left(\frac{2}{1+x} - 1\right) =$$

$$= (1+x)^{2n}\left[\frac{2^{n+1}}{(1+x)^n} - (1+x)\right] \Big| [2 - (1+x)] =$$

$$= [2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}]\,\frac{1}{1-x}.$$

Dar (pentru $|x| < 1$).

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Deci, suma căutată este egală cu coeficientul lui x^n din expresia

$$2^{n+1}(1+x)^n\,(1 + x + x^2 + \dots) - (1+x)^{2n+1}\,(1 + x + x^2 + \dots).$$

Dacă vom înmulți un polinom în x cu $1 + x + x^2 + \dots$, coeficientul lui x^n în acest produs va fi, evident, egal cu suma coeficienților puterilor lui x, nu mai mari decît n din polinomul inițial. Într-adevăr, termenii în x^n din produs se obțin prin înmulțirea termenilor în x^k ai polinomului, unde $k \leqslant n$, respectiv

cu termenii x^{n-k} ai sumei $1 + x + x^2 + \dots$ Astfel, produsul $2^{n+1}(1+x)^n(1 + x + x^2 + \dots)$ după desfacerea parantezelor va conține termenul în x^n cu un coeficient egal cu suma tuturor coeficienților polinomului $2^{n+1}(1 + x)^n$, adică cu un coeficient egal cu $2^{n+1}2^n = 2^{2n+1}$ (compară cu problema a)). Coeficientul lui x^n în produsul $(1 + x)^{2n+1} (1 + x + x^2 + \dots)$ va fi egal cu suma coeficienților polinomului $(1+x)^{2n+1}$, care stau în fața lui $x^0 = 1, x, x^2, \dots, x^n$, adică va fi egal cu suma coeficienților din prima jumătate a polinomului $(1+x)^{2n+1}$. Dar, deoarece $C_{2n}^k = C_{2n}^{2n-k}$, rezultă că această sumă este egală cu semisuma tuturor coeficienților lui $(1 + x)^{2n+1}$, adică este egală cu $2^{2n+1}/2 = 2^{2n}$. De aici rezultă că coeficientul lui x^n în expresia

$$2^{n+1}(1 + x)^n (1 + x + x^2 + \dots) - (1 + x)^{2n+1} (1 + x + x^2 + \dots)$$

este egal cu $2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}$.

j) Expresia căutată este egală cu coeficientul lui x^n în produsul următor:

$$(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) \cdot (C_n^n + C_n^{n-1} x + C_n^{n-2} x^2 + \dots + C_n^0 x^n).$$

Însă $C_n^{n-k} = C_n^k$ și deci,

$$C_n^n + C_n^{n-1}x + C_n^{n-2}x^2 + \dots + C_n^0 x^n =$$

$$= C_n^0 + C_n^{n-1}x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n = (1 + x)^n.$$

Astfel, trebuie să găsim doar coeficientul lui x^n în produsul

$$(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}.$$

Acest coeficient este evident egal cu C_{2n}^n.

k) Aici trebuie determinat coeficientul lui x^n în produsul

$$(C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n)(C_n^n + C_n^{n-1}x + C_n^{n-2}x^2 + \dots + C_n^0 x^n)$$

egal cu

$$(1 - x)^n (1 + x)^n = (1 - x^2)^n.$$

Evident, acest coeficient pentru $n = 2m$ (par) este egal cu $(-1)^m C_{2m}^m$, iar pentru $n = 2m + 1$ (impar) este egal cu zero.

1) Din identitatea

$$(1 + x)^n (1 + x)^m = (1 + x)^{n+m}$$

rezultă imediat că această expresie este egală cu C_{n+m}^k (compară cu rezolvările problemelor j) și k).

56. a), b) Conform soluțiilor problemelor 55, a) și b),

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n,$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1 - 1)^n = 0.$$

Adunînd aceste două egalități și împărțind suma cu 2, vom obține

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = \frac{2^n + 0}{2} = 2^{n-1},$$

ceea ce dă rezolvarea problemei a).

Scăzînd egalitatea a doua din prima și împărțind diferența cu 2, vom avea

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \frac{2^n - 0}{2} = 2^{n-1},$$

adică rezolvarea problemei b).

c), d, e), f). Se va scrie dezvoltarea binoamelor $(1 + 1)^n$, $(1 - 1)^n$, $(1 + i)^n$ și $(1 - i)^n$ după teorema binomului lui Newton:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n,$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

$$(1 + i)^n = C_n^0 + i C_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + \ldots + i^n C_n^n,$$

$$(1 - i)^n = C_n^0 - i C_n^1 + i^2 C_n^2 - i^3 C_n^3 + \ldots + (-1)^n i^n C_n^n.$$

Se observă acum, că pentru k care dă restul 1 prin împărțirea cu 4,

$$1 + (-1)^k + i^k + (-1)^k i^k = 1 - 1 + i - i = 0;$$

pentru k care dă restul 2 prin împărțirea cu 4,

$$1 + (-1)^k + i^k + (-1)^k i^k = 1 + 1 - 1 - 1 = 0;$$

pentru k care dă restul 3 prin împărțirea cu 4,

$$1 + (-1)^k + i^k + (-1)^k i^k = 1 - 1 - i + i = 0,$$

iar pentru k care se împarte la 4 fără rest,

$$1 + (-1)^k + i^k + (-1)^k i^k = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Adunînd cele patru egalități scrise mai sus, obținem

$$2^n + (1 + i)^n + (1 - i)^n = 4\{C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots\},$$

adică

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = [2^n + (1 + i)^n + (1 - i)^n]/4.$$

Cu aceasta, problema c) este rezolvată; se va simplifica, însă, rezultatul obținut, transformînd partea dreaptă a ultimei formule.

Se va folosi forma trigonometrică a numerelor complexe:

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°),$$

$$1 - i = \sqrt{2}[\cos(-45°) + i \sin(-45°)] = \sqrt{2}\,(\cos 45° - i \sin 45°).$$

Conform formulei lui Moivre [1], de aici rezultă că

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\,(\cos n\,45° + i\sin n\,45°), \quad (1-i)^n = \sqrt{2^n}\,(\cos n\,45° - \sin n\,45°).$$

Astfel,

$$2^n + (1+i)^n + (1-i)^n = 2^n + 2\cdot 2^{n/2}\cos n\,45°,$$

adică

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots = 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}\cos n\,45° =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k \pm 1, \\ 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \pm 2, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k \pm 3, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k + 4. \end{cases}$$

Acesta este răspunsul definitiv la problema c).

Pentru rezolvarea problemei d) se va considera suma

$$(1+1)^n - (1-1)^n - i(1+i)^n + i(1-i)^n,$$

unde toate parantezele se desfac după teorema binomului lui Newton. Nu este greu de verificat că $1 - (-1)^k - i\cdot i^k + i(-1)^k i^k = 0$ pentru k care dă prin împărțirea cu 4 resturile 0, 2 sau 3 și $1 - (-1)^k - i\cdot i^k + i(-1)^k i^k = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ pentru k care dă restul 1 prin împărțirea cu 4; deci

$$2^n - i(1+i)^n + i(1-i)^n = 4(C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots).$$

Folosind din nou forma trigonometrică a numerelor $1 + i$ și $1 - i$, vom obține fără nici o dificultate

$$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + C_n^{13} + \ldots = 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}\sin n\,45° =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \text{ sau } n = 8k + 4, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k + 1 \text{ sau } n = 8k + 3, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k + 2, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k - 1 \text{ sau } n = 8k - 3, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k - 2. \end{cases}$$

Se va considera acum suma

$$(1+1)^n + (1-1)^n - (1+i)^n - (1-i)^n;$$

---

[1] Așa se numește formula $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. Pentru demonstrarea ei nu avem decît să utilizăm de n ori egalitatea $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$, care rezultă direct din regula de înmulțire a numerelor complexe.

analog cu cele precedente, este ușor de arătat că această sumă este egală cu

$$2^n - (1 + i)^n - (1 - i)^n = 4(C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \dots).$$

Deci

$$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + C_n^{14} + \dots = 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} \cos n\,45^\circ =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k \pm 1, \\ 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \pm 2, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k \pm 3, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k + 4. \end{cases}$$

În sfîrșit, fie suma

$$(1 + 1)^n + (1 - 1)^n + i\,(1 + i)^n - i\,(1 - i)^n.$$

Această sumă este egală cu

$$2^n + i\,(1 + i)^n - i\,(1 - i)^n = 4(C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \dots),$$

de unde rezultă

$$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + C_n^{15} + \dots = 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} \sin n\,45^\circ =$$

$$= \begin{cases} 2^{n-2} & \text{pentru } n = 8k \text{ sau } n = 8k + 4, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k + 1 \text{ sau } n = 8k + 3, \\ 2^{n-2} - 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k + 2. \\ 2^{n-2} + 2^{(n-3)/2} & \text{pentru } n = 8k - 1 \text{ sau } n = 8k - 3, \\ 2^{n-2} + 2^{(n-2)/2} & \text{pentru } n = 8k - 2. \end{cases}$$

Cu aceasta problemele c), d), e) și f) sînt rezolvate în întregime.

Observație. Este clar că răspunsul la problemele e), f) ar fi putut fi obținut imediat și din rezultatele problemelor precedente a) — d).

g), h), i). Aceste probleme se rezolvă în mod analog cu cele patru probleme precedente; numai că în locul numerelor 1, — 1, i și — i, care sînt cele patru valori ale lui $\sqrt[4]{1}$ (adică cele patru rădăcini ale ecuației $x^4 - 1 = 0$), aici se consideră cele trei valori ale lui $\sqrt[3]{1}$ (cele trei rădăcini ale ecuației $x^3 - 1 = 0$), egale respectiv cu

$$1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{și} \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Deoarece $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, numerele ε_1 și ε_2 sînt, evident, cele două rădăcini ale ecuației de gradul al doilea $x^2 + x + 1 = 0$; să mai observăm că

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = 1,$$

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 = 1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 = 0.$$

Conform teoremei binomului lui Newton, se obține

$$(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n,$$

$$(1 + \varepsilon_1)^n = C_n^0 + \varepsilon_1 C_n^1 + \varepsilon_1^2 C_n^2 + \varepsilon_1^3 C_n^3 + \ldots + \varepsilon_1^n C_n^n,$$

$$(1 + \varepsilon_2)^n = C_n^0 + \varepsilon_2 C_n^1 + \varepsilon_2^2 C_n^2 + \varepsilon_2^3 C_n^3 + \ldots + \varepsilon_2^n C_n^n.$$

Conform proprietăților scrise mai sus ale numerelor ε_1 și ε_2, suma $1 + \varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k$ este egală cu zero pentru k prim cu 3 și egală cu $1 + 1 + 1 = 3$ pentru k divizibil cu 3. Deci, adunînd cele trei egalități, vom obține

$$2^n + (1 + \varepsilon_1)^n + (1 + \varepsilon_2)^n = 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots).$$

Se trece, acum, la forma trigonometrică a numerelor complexe:

$$\varepsilon_1 = \cos 120° + i \sin 120°, \quad \varepsilon_2 = \cos 240° + i \sin 240°,$$

$$1 + \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\cos 240° - i \sin 240° = \cos 60° + i \sin 60°,$$

$$1 + \varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = -\cos 120° - i \sin 120° = \cos 60° - i \sin 60°.$$

Utilizînd formula lui Moivre, se obțin:

$$(1 + \varepsilon_1)^n = \cos n\, 60° + i \sin n\, 60°, \quad (1 + \varepsilon_2)^n = \cos n\, 60° - i \sin n\, 60°.$$

de unde

$$2^n + (1 + \varepsilon_1)^n + (1 + \varepsilon_2)^n = 2^n + 2 \cos n\, 60°.$$

Deci,

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots = (2^n + 2\cos n\, 60°)/3 = \begin{cases} (2^n + 2)/3 & \text{pentru } n = 6k, \\ (2^n + 1)/3 & \text{pentru } n = 6k \pm 1, \\ (2^n - 1)/3 & \text{pentru } n = 6k \pm 2, \\ (2^n - 2)/3 & \text{pentru } n = 6k + 3. \end{cases}$$

Aceasta este rezolvarea problemei g).

Fie suma

$$(1 + 1)^n + \varepsilon_2(1 + \varepsilon_1)^n + \varepsilon_1(1 + \varepsilon_2)^n.$$

Nu este greu de văzut că această sumă este egală cu

$$2^n + \varepsilon_2(1 + \varepsilon_1)^n + \varepsilon_1(1 + \varepsilon_2)^n = 3(C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots).$$

Aplicînd din nou forma trigonometrică a numerelor complexe, vom avea

$$\varepsilon_2(1 + \varepsilon_1)^n = (\cos 240° + i \sin 240°)(\cos n\, 60° + \sin n\, 60°) =$$
$$= \cos (n + 4)60° + i \sin (n + 4)60°,$$

$$\varepsilon_1(1 + \varepsilon_2)^n = (\cos 120° + i \sin 120°)(\cos n\, 60° - i \sin n\, 60°) =$$
$$= (\cos 240° - i \sin 240°)(\cos n\, 60° - i \sin n\, 60°) =$$
$$= \cos (n + 4)\, 60° - i \sin (n + 4)\, 60°.$$

De aici

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \dots = [2^n + 2\cos(n+4)\,60°]/3 =$$

$$= \begin{cases} (2^n - 1)/3 & \text{pentru } n = 6k \text{ sau } n = 6k - 2, \\ (2^n + 1)/3 & \text{pentru } n = 6k + 1 \text{ sau } n = 6k + 3, \\ (2^n + 2)/3 & \text{pentru } n = 6k + 2, \\ (2^n - 2)/3 & \text{pentru } n = 6k - 1. \end{cases}$$

La fel, considerînd suma

$$(1 + 1)^n + \varepsilon_1(1 + \varepsilon_1)^n + \varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)^n$$

egală cu

$$2^n + \varepsilon_1(1 + \varepsilon_1)^n + \varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)^n = 3(C_n^2 + C_n^5 + C_n^3 + C_n^{11} + \dots),$$

se va găsi ușor că

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \dots = [2^n + 2\cos(n+2)\,60°]/3 =$$

$$= \begin{cases} (2^n - 1)/3 & \text{pentru } n = 6k \text{ sau } n = 6k + 2, \\ (2^n - 2)/3 & \text{pentru } n = 6k + 1, \\ (2^n + 1)/3 & \text{pentru } n = 6k + 3 \text{ sau } n = 6k - 1, \\ (2^n + 2)/3 & \text{pentru } n = 6k - 2. \end{cases}$$

Acest rezultat se deduce din răspunsurile la problemele a), g) și h).

57. Teorema se demonstrează prin metoda inducției complete în mod cu totul analog cu demonstrația obișnuită a formulei binomului lui Newton. Este ușor de verificat că pentru n egal cu 1 și 2, teorema binomului factorial este adevărată [1]. Se va presupune că această teoremă este adevărată pentru exponentul n, adică

$$(a + b)^{n|h} = a^{n|h} + C_n^1 a^{n-1|h} b + C_n^2 a^{n-2|h} b^{2|h} + \dots + b^{n|h}$$

și se va arăta că în acest caz teorema va fi adevărată și pentru $n + 1$. Într-adevăr, înmulțind cu $a + b - nh$ ambii membri ai elgalității care exprimă teorema pentru exponentul n, în partea stîngă vom obține evident $(a + b)^{n+1|h}$;

[1] Să observăm că luăm aici și exponentul $n = 2$ doar ca o ilustrare a teoremei considerate. Pentru a putea aplica metoda inducției complete este de ajuns să ne convingem că teorema este adevărată pentru $n = 1$ și să considerăm imediat trecerea de la n la $n + 1$.

În partea dreaptă, unde figura suma avînd ca termen de rang i pe $C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}$, vom obține după înmulțirea cu $a + b - nh$ ca expresie a acestui termen

$$C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(a + b - nh) = C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h} \{[a - (n - i) h] + (b - ih)\} =$$

$$= C_n^i a^{n-i|h}[a - (n - i) h] b^{i|h} + C_n^i a^{n-i|h} b^{i|h}(b - ih) = C_n^i a^{n-i+1|h} b^{i|h} +$$

$$+ C_n^i a^{n-i|h} b^{i+1|h}.$$

Conform relației cunoscute $C_n^{i-1} + C_n^i = C_{n+1}^i$, rezultă, că și în cazul teoremei obișnuite a binomului lui Newton, că după înmulțirea membrului întîi cu $a + b - nh$ se va obține o sumă de termeni de forma $C_{n+1}^i a^{n+1-i|h} b^{i|h}$. Cu aceasta, s-a demonstrat că, dacă teorema binomului factorial este adevărată pentru exponentul n, ea este adevărată și pentru exponentul $n + 1$. Deoarece această teoremă este adevărată pentru $n = 1$, rezultă valabilitatea ei pentru orice n.

58. a) Deoarece

$$C_n^i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} = \frac{n^{i|1}}{i!},$$

se va obține

$$C_n^i C_n^{k-i} = \frac{n^{i|1} m^{k-i|1}}{i!(k-i)!} = \frac{1}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} n^{i|1} m^{k-i|1} \frac{1}{k!} C_k^i n^{i|1} m^{k-i|1}.$$

Deci, suma căutată este egală cu

$$\frac{1}{k!}(C_k^0 m^{k|1} + C_k^1 m^{k-1|1} n + C_k^2 m^{k-2|1} n^{2|1} + \dots + C_k^k n^{k|1}) = \frac{(m+n)^{k|1}}{k!} = C_{m+n}^k.$$

Această rezolvare a fost obținută anterior pe altă cale (v. rezolvarea problemei 55, 1)).

b) Termenul de rang i al sumei poate fi transformat în modul următor:

$$(-1)^i C^{im+i} C_n^{k-i} = (-1)^i \frac{(m+i)^{i|1}}{i!} \frac{n^{k-i|1}}{(k-i)!} = \frac{1}{k!} C_k^i (-1)^i (m+i)^{i|1} n^{k-i|1}.$$

Dar, după cum este ușor de văzut,

$$(-1)^i (m + i)^{i|1} = (-1)^i (m + i)(m + i - 1) \dots (m + 1) =$$

$$= (-m - 1)(-m - 2) \dots (-m - i + 1)(-m - i) = (-m - 1)^{i|1}.$$

Deci,

$$(-1)^i C^i_{m+i} C^{k-i}_n = \frac{1}{k!} C^i_k (-m-1)^{i|1} n^{k-i|1}.$$

Astfel, suma este egală cu

$$\frac{1}{k!}\{C^0_k n^{k|1} + C^1_k n^{k-1|1}(-m-1) + C^2_k n^{k-2|1}(-m-1)^{2|1} + \dots + C^k_k(-m-1)^{k|1}\} =$$

$$= \frac{(n-m-1)^{k|1}}{k!} = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\dots(n-m-k)}{k!}.$$

Pentru $n-m-1 \geqslant k$ această expresie este evident egală cu C^k_{n-m-1}.

Se mai observă că, ținînd seama de egalitatea $C^i_{m+i} = C^m_{m+i}$, putem scrie relația obținută (pentru $n-m-1 \geqslant k$) sub forma

$$C^m_m C^k_n - C^m_{m+1} C^{k-1}_n + C^m_{m+2} C^{k-2}_n - \dots + (-1)^k C^m_{m+k} C^0_n = C^k_{n-m-1}.$$

59. a) Se vor considera cele mai scurte drumuri care duc de la întresecția (0, 0) la intersecția $(n-m+1, m)$ (fig. 68). Numărul unor astfel de drumuri este evident egal cu C^m_{n+1}. Se împart acum aceste drumuri în următoarele clase fără elemente comune. În primul rînd, se poate porni pe strada „orizontală" — astfel de drumuri vor fi tot atîtea cîte drumuri unesc intersecția (1, 0) cu intersecția $(n-m+1, m)$, adică sînt în număr de C^m_n. În al doilea rînd, se poate parcurge mai întîi un cartier pe strada „verticală" și abia în punctul (0, 1) să se treacă la dreapta; numărul acestor drumuri este egal cu numărul drumurilor care unesc intersecția (1, 1) cu intersecția $(n-m+1, m)$, adică este egal cu C^{m-1}_{n-1}. În al treilea rînd, se poate trece întîi din punctul (0, 0) în punctul (0, 2) și de acolo să se ia la dreapta — numărul acestor drumuri este evident egal cu numărul drumurilor care unesc punctele (1, 2) și $(n-m+1, m)$, adică este egal cu C^{m-2}_{n-2}. În al patrulea rînd, se pot parcurge mai întîi trei cartiere pe strada verticală de rang zero și de acolo să se treacă la dreapta (în total C^{m-3}_{n-3} drumuri); în al cincilea rînd, să se ajungă în punctul (0, 4) și acolo să se pornească la dreapta (în total C^{m-4}_{n-4} drumuri) etc. Ultima posibilitate este aceea ca mai întîi să se parcurgă „în sus" toate cele m cartiere și numai de acolo să se treacă la dreapta (un singur drum, $C^0_{n-m} = 1$). Deoarece numărul total de drumuri este egal cu C^m_{n+1} și fiecare drum aparține

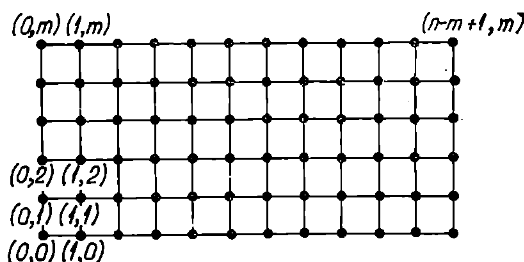


Fig. 68

numai unei singure dintre clasele considerate, de aici rezultă imediat relaţia pe care trebuie să o demonstrăm.

Se mai observă că relaţia obţinută poate fi uşor stabilită şi din rezultatele probleme 55, g). Într-adevăr, deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$, această relaţie poate fi scrisă sub forma

$$C_n^{n-m} + C_{n-1}^{n-m} + C_{n-2}^{n-m} + \dots + C_{n-m}^{n-m} = C_{n+1}^m.$$

Presupunînd aici $n = m + k$ şi scriind termenii din membrul întîi în ordine inversă, vom obţine

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_{k+m}^k = C_{m+k+1}^m = C_{m+k+1}^{k+1}.$$

Însă acesta este un caz particular al problemei 55, g).

Nu este greu, de asemenea, să stabilim direct relaţia căutată cu ajutorul teoremei binomului lui Newton; această problemă se reduce la determinarea coeficientului lui x^m în polinomul

$$(1 + x)^n + x(1 + x)^{n-1} + x^2(1 + x)^{n-2} + \dots + x^m(1 + x)^{n-m},$$

care este suma a $m + 1$ termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $x/(1 + x)$.

b) Se consideră toate drumurile cele mai scurte, care duc din punctul $(0, 0)$ în punctul $(n - m + k + 1, m)$. Numărul unor astfel de drumuri este, evident, egal cu C_{n+k+1}^m. Se împart aceste drumuri în clase fără elemente comune. Pentru aceasta se duce pe „harta oraşului" o dreaptă verticală, care trece între verticalele de rang k şi $k + 1$ (fig. 69). Fiecare dintre drumurile considerate va intersecta această dreaptă în cîte un singur punct. Numărul drumurilor, care intersectează dreapta dată într-un punct situat pe orizontala de rang r este, evident, egal cu produsul dintre numărul drumurilor care unesc punctul $(0, 0)$ cu punctul (k, r) şi numărul drumurilor care unesc punctul $(k + 1, r)$ cu punctul $(n - m + k + 1, m)$. Astfel, acest număr este egal cu $C_{k+r}^r C_{n-r}^{m-r}$. Punînd în ultima expresie $r = 0, 1, 2, \dots, m$ şi însumînd toate expresiile obţinute, ne convingem că suma

$$C_k^0 C_n^m + C_{k+1}^1 C_{n-1}^{m-1} + C_{k+2}^2 C_{n-2}^{m-2} + \dots + C_{k+m}^m C_{n-m}^0$$

este egală cu C_{n+k+1}^m, ceea ce trebuia demonstrat.

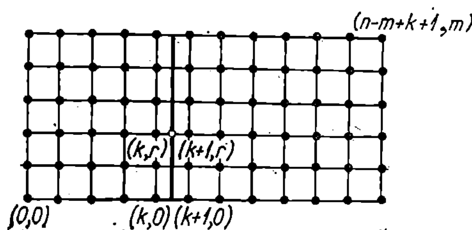


Fig. 69

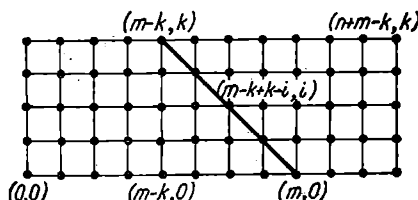


Fig. 70

În cazul particular $k = 0$ se obţine

$$C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \dots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m,$$

adică rezultatul problemei a). Pentru $k = 1$ se obţine următoarea relaţie simplă:

$$C_n^m + 2C_{n-1}^{m-1} + \dots + (m + 1)\, C_{n-m}^0 = C_{n+2}^m.$$

c) Se consideră din nou schema geometrică. Numărul $C_m^k C_n^0$ este produsul dintre numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(m - k, k)$ și numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul $(m - k, k)$ în punctul $(n + m - k, k)$, adică este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(n + m - k, k)$ și care trec prin punctul $(m - k, k)$ (fig. 70). La fel $C_m^{k-2} C_n^2$ este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(n + m - k, k)$ și care trec prin punctul $(m - k + 1, k - 1)$; $C_m^{k-2} C_n^2$ este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(n + m - k, k)$ și care trec prin punctul $(m - k + 2, k - 2)$ etc.; $C_m^0 C_n^k$ este numărul celor mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(n + m - k, k)$ și care trec prin punctul $(m - k + k, 0) = (m, 0)$. Deoarece fiecare dintre cele mai scurte drumuri care duc din punctul (0, 0) în punctul $(n + m - k, k)$ intersectează într-un singur punct dreapta dusă în fig. 70, atunci suma care figurează în problema 59, c) este egală cu numărul total al celor mai scurte drumuri care unesc punctele (0, 0) și $(n + m - k, k)$, adică este egală cu C_{n+m}^k.

Alte aplicații ale metodei utilizate aici sînt date în rezolvările problemelor 81, a) — c)

60. Vom rezolva mai întîi problema b), care este mult mai generală. Vom considera un drum oarecare din rețeaua de drumuri care încep în punctul A și se termină la una dintre intersecțiile aparținînd rîndului de rang o mie și vom stabili cîte persoane merg pe această cale. Drumul considerat este fomat din 1 000 „cartiere“ diferite și la fiecare intersecție grupul de persoane care merg pe acest drum se împarte în două: jumătate continuă drumul considerat, iar cealaltă jumătate cotește în altă parte. Este clar că dintre cele $2^{1\,000} : 2 = 2^{999}$ persoane care pornesc pe drumul imediat următor va sosi la capăt doar una singură, $2^0 = 1$. Deci, pe fiecare drum care aparține rețelei considerate va merge o singură persoană dintre cele $2^{1\,000}$. Rezultă deci că numărul total de drumuri este egal cu $2^{1\,000}$ (ceea ce nu este greu de verificat și printr-un calcul direct). Astfel, problema se reduce la determinarea numărului de drumuri diferite care duc la fiecare din intersecțiile din rîndul de rang o mie. Dar rețeaua de drumuri reprezentată în fig. 5 (v. p. 23) este analoagă cu rețeaua de drumuri reprezentată în fig. 4; cu deosebirea că în fig. 4 „străzile“ sînt dispuse în direcție orizontală și verticală, iar în fig. 5 — în direcțiile l și m. Pentru a ajunge la intersecția a k-a (socotind de la stînga spre dreapta, începînd cu zero) din rîndul de rang o mie, trebuie să se parcurgă în total 1 000 de cartiere, dintre care k cartiere în direcția m (iar celelalte în direcția l). Deci, numărul total de drumuri care duc la intersecția a k-a este egal cu $C_{1\,000}^k$. Deci, la intersecția a k-a din rîndul de rang o mie, unde $0 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant 1\,000$ vor sosi $C_{1\,000}^k = \dfrac{1\,000!}{k!(1\,000 - k)!}$ persoane.

De aici rezultă, în particular, că la cele trei intersecții periferice B_1, B_2 și B_3 vor sosi respectiv $C_{1\,000}^0 = 1$, $C_{1\,000}^1 = 1\,000$ și $C_{1\,000}^2 = \dfrac{1\,000 \cdot 999}{2} =$ $= 499\,500$ oameni. Acest rezultat s-ar fi putut obține și printr-un calcul direct.

61. Cele trei relații din această problemă se stabilesc ușor ținînd seama că numărul B_n^k este coeficientul lui x^k în dezvoltarea expresiei $(1 + x + x^2)^n$;

$$(1 + x + x^2)^n = B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}. \qquad (*)$$

Să demonstrăm, mai întîi, această formulă. Pentru $n = 1$

$$(1 + x + x^2)^1 = 1 + x + x^2,$$

adică formula considerată este într-adevăr valabilă (deoarece $B_1^0 = B_1^1 = B_1^2 = 1$).

Se va presupune, acum, că această relație a fost demonstrată pentru exponentul n și vom arăta că, în acest caz, ea va fi adevărată și pentru exponentul $n + 1$. În acest scop, se vor înmulți ambii membri ai relației (*) cu $(1 + x + x^2)$. În membrul întîi se obține evident $(1 + x + x^2)^{n+1}$, iar în membrul al doilea se găsește

$$(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + B_n^3 x^3 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n})(1 + x + x^2) = B_n^0 + (B_n^0 + B_n^1)x +$$
$$+ (B_n^0 + B_n^1 + B_n^2)x^2 + (B_n^1 + B_n^2 + B_n^3)x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (B_n^{2n-1} + B_n^{2n})x^{2n+1} + B_n^{2n} x^{2n+2}.$$

Dar, conform regulii de formare a numerelor B_{n+1}^k, ultima expresie este egală cu

$$B_{n+1}^0 + B_{n+1}^1 x + B_{n+1}^2 x^2 + B_{n+1}^3 x^3 + \ldots + B_{n+1}^{2n+2} x^{2n+2}.$$

Astfel, într-adevăr, dacă formula este adevărată pentru exponentul n, atunci ea este adevărată și pentru exponentul $n + 1$. Deoarece pentru $n = 1$ această formulă este adevărată, rezultă că ea este adevărată și pentru orice n.

Se mai observă că din simetria triunghiului numeric rezultă că $B_n^k = B_n^{2n-k}$ pentru orice n.

Acum relațiile care ne trebuie pot fi demonstrate dintr-o dată într-un mod cu totul analog cu demonstrarea relațiilor din problemele 55, a), b) și j).

a) $B_n^0 + B_n^1 + B_n^2 + \ldots + B_n^{2n} = (1 + 1 + 1)^n = 3^n$,

b) $B_n^0 - B_n^1 + B_n^2 - \ldots + B_n^{2n} = (1 - 1 + 1)^n = 1$.

c) Suma căutată este egală cu coeficientul lui x^{2n} în polinomul

$$(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n}) \cdot (B_n^{2n} + B_n^{2n-1} x + B_n^{2n-2} x^2 + \ldots + B_n^0 x^{2n}).$$

Dar, deoarece $B_n^{2n-k} = B_n^k$, rezultă că acest polinom este egal cu

$$(B_n^0 + B_n^1 x + B_n^2 x^2 + \ldots + B_n^{2n} x^{2n})^2 = (1 + x + x^2)^{2n},$$

de unde rezultă imediat relația cerută.

62. Deoarece prima bicicletă întîlnită poate fi, cu aceeași probabilitate, oricare dintre cele 10 000 biciclete din oraș, rezultă că numărul total de rezultate egal posibile ale experienței este aici egal cu 10 000. Rămîne de calculat

numărul „rezultatelor favorabile“, adică numărul de numere care nu conţin cifra 8. Acest număr poate fi determinat cu următorul procedeu. Vom conveni ca numerelor care conţin mai puţin de patru cifre să le adăugăm cîteva zerouri în faţă, astfel încît să fie formate din patru cifre (astfel, în locul numărului 26 vom scrie 0026) şi să înlocuim numărul 10 000 cu numărul 0000. În acest caz, numărul numerelor care conţin cifra 8 va rămîne, evident, acelaşi. Acum numerele 0000, 0001, 0002, ..., 9999 reprezintă toate numerele posibile de cîte patru cifre, unde, în particular, pe primul loc poate să stea zero sau mai multe cifre zero. Dacă un astfel de număr nu conţine cifra 8, atunci pe primul loc în acest număr poate să figureze oricare dintre cele nouă cifre 0, 1, 2, ..., 7, 9, tot astfel şi pe locul al doilea, al treilea şi al patrulea poate să figureze oricare dintre aceste nouă cifre. Asociind cele nouă valori posibile ale primei cifre cu cele nouă valori ale celei de-a doua, a treia şi a patra cifră, vom obţine, evident, în total 9^4 numere de cîte patru cifre, care nu conţin cifra 8 (compară cu soluţia problemei 9).

Astfel, din 10 000 de rezultate egal posibile (întîlnirea cu oricare dintre biciclete) vor fi 9^4 rezultate favorabile, de unde rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $9^4/10\,000 = (0,9)^4 = 0,6561$.

63. a) Experienţa considerată constă în aceea că extragem la întîmplare la rînd patru fişe dintr-un grup de şase fişe. În acest caz, prima extragere poate da şase rezultate diferite (poate fi extrasă prima oricare dintre cele şase litere), a doua poate da cinci rezultate diferite (poate fi extrasă a doua oricare dintre cele cinci litere, care au mai rămas după prima extragere), a treia poate da patru rezultate, diferite, a patra — trei rezultate diferite. Asociind cele şase rezultate posibile din prima extracţie cu cele cinci rezultate posibile din a doua extracţie vom obţine $6 \cdot 5 = 30$ rezultate posibile ale succesiunii de două extrageri; tot aşa, pentru o succesiune de trei extrageri se vor obţine $4 \cdot 30 = 120$ rezultate posibile şi pentru patru extrageri succesive $3 \cdot 120 = 360$ rezultate posibile. Deci experimentul poate conduce la 360 rezultate diferite; toate aceste rezultate sînt egal posibile.

Favorabil va fi un singur rezultat, anume acela în care se va extrage întîi fişa cu litera N, a doua oară fişa cu litera O, a treia oară fişa cu litera R şi, în sfîrşit, a patra oară — fişa cu litera A. Deci, probabilitatea căutată este egală cu $1/360 \approx 0,003$.

b) Aici, din nou, experimentul constă în extragerea succesivă a patru fişe dintr-un grup de şase fişe de acelaşi fel, deci poate avea 360 rezultate egal posibile. Calculul numărului de rezultate favorabile este însă mult mai complicat decît în cazul problemei a), deoarece în cuvîntul „mamaia“ există litere identice. Favorabile vor fi aici toate acele rezultate în care va fi extrasă întîi oricare dintre fişele existente cu litera m, a doua — oricare dintre cele trei fişe cu litera a, a treia — a doua fişă cu litera m (amintim că una dintre aceste fişe a fost extrasă la început), a patra — oricare dintre cele două fişe rămase după a doua extragere a fişelor cu litera a. Asociind cele două rezultate posibile ale primei extracţii cu cele trei rezultate posibile ale celei de-a doua, cu un rezultat posibil al celei de-a treia şi cu cele două rezultate posibile

ale celei de-a patra extracții, vom obține în total $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ rezultate favorabile diferite. Deci, probabilitatea căutată este egală aici cu

$$\frac{12}{360} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033.$$

64. Se presupune că cifrele extrase la rînd sînt x, y, z, t, u; numărul căutat N are forma $\overline{xyztu}$ (linia de deasupra înseamnă că x, y, z, t, u sînt cifre ale numărului N). Într-un mod cu totul analog ca în soluția problemei precedente tragem concluzia că numărul total de rezultate diferite ale experimentului, care constă din extragerea la întîmplare a cinci cifre din cele zece, este egal cu $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$. Se va arăta care este numărul rezultatelor favorabile.

Pentru ca numărul N să fie divizibil cu $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$, trebuie ca acesta să verifice criteriile de divizibilitate cu 4, cu 9, cu 11, adică: numărul cu două cifre $\overline{tu}$ să se dividă cu 4; suma $x + y + z + t + u$ să se dividă cu 9 și diferența $(x + z + u) - (y + t)$ să se dividă cu 11 — ultimul criteriu de divizibilitate rezultă din faptul că diferența

$$\overline{xyztu} - [(x + z + u) - (y + t)] = 10\,000x + 1\,000y + 100z + 10t +$$

$$+ u - (x + z + u) + (y + t) = 9\,999x + 1\,001y + 99z + 11t =$$

$$= 11(909x + 91y + 9z + t)$$

se divide totdeauna cu 11. (Vezi [56]). Deoarece $x + y + z + t + u \geqslant 0 + 1 + + 2 + 3 + 4 = 10$ și $x + y + z + t + u \leqslant 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, suma $x + + y + z + t + u$ se poate divide cu 9 numai în cazul în care ea este egală cu 18 sau cu 27. Să considerăm separat aceste două cazuri.

1° Fie $x + y + z + t + u = 18$. Aici diferența $(x + z + u) - (y + t)$ este pară și se divide cu 11 numai dacă $x + z + u = y + t = 9$. În acest caz, perechea de (y, t) nu poate fi decît sau perechea (0, 9), sau perechea (1, 8), sau (2, 7), sau (3, 6), sau (4, 5).

Dacă (y, t) este (0, 9), egalitatea $x + z + u = 9$ este posibilă numai în următoarele trei cazuri:

$$x + z + u = 1 + 2 + 6; \quad x + z + u = 1 + 3 + 5; \quad x + z + u = 2 + 3 + 4.$$

Al doilea dintre aceste cazuri nu convine (cifra u trebuie neapărat să fie pară, doarece $\overline{xyztu}$ se divide cu 4); primul și al treilea caz dau cîte patru numere N care se divid cu 396 (deoarece, dacă vom alege x, z și u astfel ca cifra u să fie pară, atunci numai unul singur dintre cele două numere $\overline{x9z0u}$ sau $\overline{x0z9u}$ este divizibil cu 4 — aceste două numere sînt ambele pare și dau resturi diferite prin împărțire la 4, deoarece diferența $\overline{x9z0u} - \overline{x0z9u} = 8\,910$ nu este divizibilă cu 4). În definitiv, obținem $4 + 4 = 8$ rezultate favorabile.

Dacă (y, t) este $(1, 8)$, sînt posibile următoarele cazuri:

$$x + z + u = 0 + 2 + 7, \quad x + z + u = 0 + 3 + 6,$$

$$x + z + u = 0 + 4 + 5, \quad x + z + u = 2 + 3 + 4,$$

cărora le corespund, în mod analog cu cele precedente, încă $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ rezultate favorabile.

Dacă (y, t) este $(2, 7)$, sînt posibile următoarele cazuri:

$$x + z + u = 0 + 1 + 8, \quad x + z + u = 0 + 3 + 6,$$

$$x + z + u = 0 + 4 + 5, \quad x + z + u = 1 + 3 + 5,$$

cărora le corespund încă $4 + 4 + 4 + 0 = 12$ rezultate favorabile (cazul $x + z + u = 1 + 3 + 5$ nu dă nici un astfel de rezultat).

Dacă (y, t) este $(3, 6)$, sînt posibile următoarele cazuri:

$$x + z + u = 0 + 1 + 8, \quad x + z + u = 0 + 2 + 7, \quad x + z + u = 0 + 4 + 5,$$

cărora le corespund încă $4 + 4 + 4 = 12$ rezultate favorabile.

În sfîrşit, dacă (y, t) este $(4, 5)$, sînt posibile următoarele cazuri:

$$x + z + u = 0 + 1 + 8, \quad x + z + u = 0 + 2 + 7,$$

$$x + z + u = 0 + 3 + 6, \quad x + z + u = 1 + 2 + 6,$$

cărora le corespund încă $4 + 4 + 4 + 4 = 16$ rezultate favorabile.

Astfel, există în total $8 + 16 + 12 + 12 + 16 = 64$ numere $N = \overline{xyztu}$ care se divid cu 396 şi astfel ca $x + y + z + t + u = 18$.

2° Fie $x + y + z + t + u = 27$. În acest caz, diferenţa $(x + z + u) - (y + t)$ este impară şi poate fi divizibilă cu 11 numai în cazul $x + z + u = 19$, $y + t = 8$. Perechea (y, t) poate fi sau perechea $(0, 8)$, sau $(1, 7)$, sau $(2, 6)$, sau $(3, 5)$.

Dacă cifrele (y, t) sînt $(0, 8)$, suma $x + z + u$ poate fi egală cu 19 numai în următoarele cazuri:

$$x + z + u = 9 + 7 + 3; \quad x + z + u = 9 + 6 + 4;$$

primului dintre aceste cazuri nu-i corespunde nici un număr $N = \overline{xyztu}$ divizibil cu 4, iar celui de-al doilea îi corespund patru astfel de numere (dacă $t = 0$ sau $t = 8$, atunci pentru ca N să fie divizibil cu 4 este necesar ca u să fie divizibil cu 4).

Dacă (y, t) este $(1, 7)$, sînt posibile cazurile

$$x + z + u = 9 + 8 + 2; \quad x + z + u = 9 + 6 + 4; \quad x + z + u = 8 + 6 + 5;$$

acestor cazuri le mai corespund încă $4 + 4 + 4 = 12$ rezultate favorabile (dacă $t = 1$ sau $t = 7$, atunci, pentru ca numărul $N = \overline{xyztu}$ să se dividă cu 4, este necesar ca u să fie cifră pară, primă cu 4).

Dacă (y, t) este $(2, 6)$, sînt posibile cazurile

$$x+z+u=9+7+3; \quad x+z+u=8+7+4;$$

acestor cazuri le corespund încă $0+8=8$ rezultate favorabile.

În sfîrşit, dacă (y, t) este $(3, 5)$, sînt posibile cazurile

$$x+z+u=9+8+2, \quad x+z+u=9+6+4;$$

$$x+z+u=8+7+4;$$

acestor cazuri le corespund încă $4+4+0=8$ cazuri favorabile.

În definitiv, cazurilor în care $x+y+z+t+u=27$ le corespund $4+12+8+8=32$ rezultate favorabile.

De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{64+32}{30\,240}=\frac{96}{30\,240}=\frac{1}{630}\approx 0{,}0015.$$

65. Experienţa considerată constă în aceea că cifra citată se formează la întîmplare; dacă, în acest caz, nu se obţine legătura necesară, atunci se formează la întîmplare o a doua cifră. Astfel, aici sînt posibile rezultate de două tipuri diferite: sau se formează două numere sau numai unul (ultimul corespunde situaţiei în care numărul a fost bine ales de prima dată). În acest caz, nu avem nici un motiv să considerăm ca fiind egal posibile unul oarecare din rezultatele de primul tip şi unul oarecare din rezultatele de al doilea tip. Pentru a obţine sistemul de rezultate egal posibile este comod aici să presupunem că **în toate cazurile** se formează două numere, adică chiar şi în cazul în care s-a obţinut de prima dată legătura necesară se formează la întîmplare un alt număr oarecare şi se întreabă dacă s-a obţinut legătura (în fapt nu este, desigur, necesar să se telefoneze efectiv a doua oară).

Numărul total de rezultate posibile egal posibile al unor apeluri telefonice consecutive este egal cu $10\cdot 9=90$ (prima dată poate fi formată oricare dintre cele 10 cifre, iar a doua oară oricare dintre celelalte 9 cifre). Favorabile, vor fi aici, evident, nouă rezultate în care prima dată va fi formată cifra care trebuie, iar a doua oară oricare dintre celelalte nouă cifre şi nouă rezultate în care va fi formată prima dată oricare dintre cele nouă cifre necorespunzătoare, iar a doua oară cifra bună. Deci, numărul total al rezultatelor favorabile este egal cu $9+9=18$. În consecinţă, probabilitatea căutată este egală cu $\frac{18}{90}=\frac{1}{5}=0{,}2.$

66. a) Aici experimentul constă în a întreba 12 persoane şi a afla în care lună cade ziua lor de naştere. Ziua de naştere a primei dintre aceste persoane poate să cadă în oricare dintre cele 12 luni — acestea vor fi cele 12 rezultate egal posibile diferite ale chestionării primei persoane. După aceea, ziua de naştere a celei de-a doua persoane poate din nou să cadă în oricare dintre cele 12 luni; asociind aceste 12 posibilităţi cu 12 rezultate ale chestionării

primei persoane, vom obţine $12 \cdot 12 = 12^2$ rezultate egal posibile ale chestionării a două persoane. La fel, la chestionarea a trei persoane vom avea 12^3 rezultate egal posibile ale chestionării etc.; la chestionarea a 12 persoane vom avea 12^{12} rezultate egal posibile.

Se va calcula acum cîte dintre aceste rezultate vor fi favorabile, adică astfel ca zilele de naştere să cadă toate în luni diferite. Ziua de naştere a primei persoane poate să cadă, evident, în orice lună, însă ziua de naştere a celei de-a doua persoane trebuie neapărat să cadă în una dintre cele 11 luni libere, ziua de naştere a celei de-a treia persoane trebuie să cadă în una dintre cele 10 luni rămase etc. pînă la ultima persoană, a cărei zi de naştere trebuie neapărat să cadă în singura lună neocupată de zilele de naştere ale celorlalte. Asociind aici 12 posibilităţi pentru prima persoană cu 11 posibilităţi pentru a doua, cu 10 pentru a treia etc., vom obţine în total $12 \cdot 11 \cdot 10 \ldots 1 = 12!$ rezultate favorabile. Deci, probabilitatea căutată este egal cu $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}000\,054$.

b) Numărul total al rezultatelor egal posibile se calculează aici la fel ca în a), — acesta este egal cu 12^6. Vom calcula acum numărul rezultatelor favorabile. Numărul rezultatelor pentru care zilele de naştere ale tuturor celor 6 persoane vor cădea în două luni anumite (de exemplu, în ianuarie şi aprilie) este egal cu 2^6 — acest număr se obţine prin aceleaşi raţionamente ca şi numărul 12^6 pentru numărul total al rezultatelor. Din aceste 2^6 rezultate trebuie să lăsăm de o parte două pentru care toate cele 6 zile de naştere cad sau în prima sau în a doua dintre cele două luni ale noastre — aceste două rezultate nu pot fi considerate favorabile, deoarece aici toate cele 6 zile de naştere cad nu în două luni, ci într-una singură. Deci, numărul rezultatelor favorabile, pentru care toate zilele de naştere cad în două luni anumite este egal cu $2^6 - 2$. Deoarece 2 luni din 12 pot fi alese în $C_{12}^2 = 66$ moduri diferite, rezultă că numărul total al rezultatelor favorabile va fi egal cu $66 \cdot (2^6 - 2) = 66 \cdot 62$ De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $\frac{66 \cdot 62}{12^6} \approx 0{,}00137$.

67. Primul călător se poate urca în oricare dintre cele trei vagoane. Apoi, al doilea călător se poate urca, de asemenea, într-unul dintre cele trei vagoane, aşa că numărul total de moduri de repartizare în vagoane a doi călători este egal cu $3 \cdot 3 = 3^2$; în mod analog, numărul modurilor de repartizare a nouă călători în trei vagoane de tramvai este egal cu 3^9. Deci, numărul total de rezultate egal posibile este egal cu 3^9. Să considerăm acum numărul de rezultate favorabile pentru problemele a), b) şi c).

a) Trei călători aşezaţi în primul vagon pot fi aleşi din cei nouă călători în $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ moduri diferite. Numărul modurilor de repartizare a celorlalţi şase călători în celelalte două vagoane este egal cu 2^6 (tot aşa cum numărul modurilor de repartizare a nouă călători în cele trei vagoane este egal cu 3^9). Asociind C_9^3 moduri de alegere a trei călători, aşezaţi în primul vagon, cu 2^6 moduri de repartizare a celorlalţi călători, vom obţine în total $C_9^3 \cdot 2^6 =$

$=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3}$ rezultate favorabile. De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^9}=\frac{1\,792}{6\,561}\approx 0{,}273.$$

b) Numărul **modurilor** în care se pot alege trei călători, așezați în primul vagon, este egal cu numărul combinărilor de 9 luate cîte 3, adică cu $C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}$ (v. rezolvarea problemei a)). În al doilea vagon se pot urca oricare trei din ceilalți șase călători; acești trei călători se pot alege din șase în $C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$ moduri. Asociind C_9^3 moduri în care se pot alege trei călători așezați în primul vagon cu C_6^3 moduri în care se pot alege trei călători urcați în al doilea vagon, vom obține în total $C_9^3C_6^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}=\frac{9!}{(3!)^3}$ rezultate favorabile.

Deci, probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{9!}{(3!)^3 3^9}=\frac{560}{6\,561}\approx 0{,}085.$$

c) La fel, ca în b) se arată că numărul cazurilor în care în primul vagon s-au urcat doi călători, iar în al doilea trei, este egal cu

$$C_9^2C_{9-2}^3=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{9!}{2!3!4!}.$$

Numărul de cazuri este același și cînd în primul vagon s-au urcat doi călători, iar în al treilea trei; sau în al doilea vagon doi călători, iar în primul trei; sau în al doilea doi călători, iar în al treilea trei; sau în al treilea vagon doi călători, iar în primul trei; sau în al treilea vagon doi călători, iar în al doilea trei. Astfel, numărul total al rezultatelor favorabile este egal cu $6\cdot C_9^2C_7^3=\frac{9!}{2\cdot 4!}$. Probabilitatea căutată este egală cu $\frac{9!}{2\cdot 4!\cdot 3^9}=\frac{280}{729}\approx 0{,}384$. $\left(\text{Această probabilitate este de } 4\frac{1}{2} \text{ ori mai mare decît probabilitatea repartizării din b)}\right)$.

68. Experimentul considerat în această problemă constă în repartizarea a 20 de echipe în două grupe. Numărul total de moduri de alegere a 10 echipe (o grupă) din 20 este egal cu $C_{20}^{10}=\frac{20!}{(10!)^2}$; în acest caz, alegerea a 10 echipe și alegerea celorlalte 10 echipe conduce la una și aceeași împărțire

a echipelor în două grupe. Deci numărul total de rezultate egal posibile, adică împărțirea tuturor echipelor în două grupe de cîte 10 echipe fiecare, este egal, în acest caz, cu $\frac{1}{2}C_{20}^{10} = \frac{20!}{2(10!)^2}$. Să cercetăm care este numărul rezultatelor favorabile în cazurile a), b) și c).

a) Numărul cazurilor în care două echipe date A și B (faptul că aceste echipe sînt cele mai tari nu are, bineînțeles, nici o importanță) fac parte din grupe diferite este egal cu numărul modurilor în care din 18 echipe care mai rămîn după ce se scot echipele A și B se pot alege nouă echipe, care intră în aceeași grupă cu echipa A. Numărul unor astfel de moduri este egal, evident, cu numărul combinărilor de 18 luate cîte 9. Deci, probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{C_{18}^{9}}{C_{20}^{10}/2} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} :$$

$$: \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{10}{19}.$$

Problema a) poate fi rezolvată și fără a calcula numărul total al rezultatelor. Pentru aceasta, este suficient să ne imaginăm că, dacă echipa A se găsește în una din cele două grupe, atunci echipa B poate ocupa sau unul dintre cele 9 locuri libere în aceeași grupă sau unul dintre cele 10 locuri libere din grupa a doua (10 rezultate favorabile și 9 nefavorabile).

b) Numărul cazurilor în care patru echipe A, B, C și D vor face parte din aceeași grupă este egal cu numărul combinărilor de $20 - 4 = 16$ (numărul echipelor rămase) luate cîte $10 - 4 = 6$ (numărul locurilor rămase în acea grupă, unde se află echipele A, B, C și D). Probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{C_{16}^{6}}{C_{20}^{10}/2} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{28}{323} \approx 0{,}08.$$

Dacă se consideră repartizările posibile ale echipelor în decurs de doi ani, fiecare repartizare posibilă a echipelor din primul an poate să fie asociată cu orice repartizare din anul următor, adică numărul rezultatelor posibile aici se ridică la pătrat și este egal cu $(C_{20}^{10}/2)^2$. Numărul rezultatelor favorabile, de asemenea, se ridică la pătrat și este egal cu $(C_{16}^{6})^2$.

Astfel, probabilitatea ca cele patru echipe mai tari să facă parte din aceeași grupă doi ani la rînd este egală cu $(28/323)^2 \approx 0{,}0064$.

c) Numărul cazurilor în care echipele A și B vor face parte din aceeași grupă, iar echipele C și D din cealaltă este egal cu numărul combinărilor de $20 - 4 = 16$ (numărul echipelor rămase după scoaterea echipelor A, B, C și D) luate cîte $10 - 2 = 8$ (numărul locurilor rămase în grupa în care se află echipele A și B). Numărul cazurilor este același și cînd într-o grupă se află A și C, iar în a doua B și D, sau cînd într-una din grupe se află A și D, iar în a doua B și C. Numărul total al cazurilor favorabile este egal cu $3 \cdot C_{16}^{8} = \frac{3 \cdot 16!}{(8!)^2}$ iar probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{3C_{16}^{8}}{C_{20}^{10}/2} = \frac{2 \cdot 3(10 \cdot 9)^2}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{135}{323} \approx 0{,}42.$$

69. Numărul total al rezultatelor posibile într-o succesiune de patru partide se obține asociind cîștigul sau pierderea din prima partidă cu cîștigul sau pierderea din a doua, a treia și a patra partidă. Acest număr este egal cu $2^4 = 16$. Toate aceste rezultate sînt egal posibile, deoarece după enunțul problemei adversarii sînt de forțe egale și pentru fiecare partidă în parte probabilitatea cîștigului este aceeași pentru fiecare dintre adversari. Aici rezultatele favorabile sînt rezultatele în care primul dintre adversari cîștigă în trei cazuri din patru; numărul unor astfel de rezultate este egal, evident, cu 4 (aceste patru cazuri corespund cazurilor în care se pierde prima, a doua, a treia sau a patra partidă și se cîștigă celelalte). Probabilitatea căutată este, astfel, egală cu $4/16 = 1/4$. La fel în cazul a opt partide, numărul total de rezultate este egal cu $2^8 = 256$. Numărul rezultatelor favorabile este egal, aici, cu numărul de moduri în care se pot grupa cinci partide cîștigate din opt, adică este egal cu $C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$. Deci, probabilitatea de a cîștiga cinci partide din opt este egală cu $\frac{56}{256} = \frac{7}{32} < \frac{1}{4}$.

Răspuns. **Este mai probabil să se cîștige trei partide din patru față de un adversar de forță egală decît să se cîștige cinci partide din opt** [1].

70. a) Aici se consideră experimentul constînd din extrageri a k bile dintr-o urnă, care conține $n + m$ bile. Alegerea a k bile din $n + m$ bile se poate face în C_{n+m}^k moduri diferite. Acesta va fi numărul rezultatelor egal posibile ale experimentului nostru. Rezultatele favorabile vor fi acelea în care, printre cele k bile extrase, se vor afla exact r bile albe și deci $k - r$ negre. Este clar că, pentru aceasta, trebuie ca $r \leqslant k$, $r \leqslant n$ și $k - r \leqslant m$; în caz contrar, nu se va obține nici un rezultat favorabil și probabilitatea va fi egală cu zero. Procedînd la verificarea acestor inegalități, se obține numărul rezultatelor favorabile asociind C_n^r moduri de extragere a r bile albe din n bile albe existente cu C_m^{k-r} moduri de extragere a $k - r$ bile negre din m astfel de bile. Deci numărul rezultatelor favorabile este aici egal cu $C_k^r C_m^{k-r}$ și probabilitatea căutată este $C_n^r C_m^{k-r} / C_{n+m}^k$.

b) Fie $k \leqslant n$ și $k \leqslant m$. La o extragere a k bile din urnă care conține n bile albe și m negre, numărul bilelor albe extrase poate fi egal sau cu 0, sau cu 1, sau cu 2, ..., sau cu k. Conform problmei a), probabilitatea ca acest număr

---

[1] Acest rezultat pare la început paradoxal, deoarece $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ și se pare, astfel, că trebuie să fie mai greu să se cîștige față de un adversar de egală valoare trei partide din patru, decît cinci partide din opt. Însă într-un fel astfel de raționament nu se ține seama de faptul că atunci cînd numărul total de partide crește, probabilitatea unui anumit rezultat în general se micșorează considerabil deoarece crește numărul cazurilor posibile. Într-adevăr, trebuie să facem deosebirea între probabilitatea de a cîștiga exact cinci partide din opt, despre care se vorbește în enunțul problemei, de probabilitatea de a cîștiga n u m a i p u ț i n de cinci partide din opt. A cîștiga față de un adversar de valoare egală n u m a i p u ț i n de cinci partide din opt este, într-adevăr, mult mai ușor decît a cîștiga n u m a i p u ț i n de trei partide din patru; însă, pentru a cîștiga nu mai puțin de cinci partide din opt există patru cazuri posibile (cîștigarea a cinci, șase, șapte și opt partide), iar pentru cîștigarea a nu mai puțin de trei partide din patru sînt numai două (cîștigarea a trei sau a patra partide).

să fie egal cu 0 este egală cu $C_n^0C_m^k/C_{n+m}^k$; probabilitatea ca acesta să fie 1 este egală cu $C_n^1C_m^{k-1}/C_{n+m}^k$; probabilitatea ca acesta să fie 2 este egală cu $C_n^2C_m^{k-2}/C_{n+m}^k$;... probabilitatea ca acesta să fie egal cu k este egală cu $C_n^kC_m^0/C_{n+m}^k$. Dar suma tuturor acestor probabilități trebuie să fie egală cu 1: într-adevăr, prin adunarea lor vom obține o fracție avînd la numărător și la numitor numărul total al rezultatelor egal posibile ale experimentului. Deci,

$$\frac{C_n^0C_m^k}{C_{n+m}^k}+\frac{C_n^1C_m^{k-1}}{C_{n+m}^k}+\frac{C_n^2C_m^{k-2}}{C_{n+m}^k}+\dots+\frac{C_n^kC_m^0}{C_{n+m}^k}=1$$

și

$$C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+C_n^2C_m^{k-2}+\dots+C_n^kC_m^0=C_{n+m}^k.$$

Observație. Metoda utilizată în problema 70, b) pentru stabilirea relațiilor dintre coeficienții binomiali este, ca idee, asemănătoare cu metoda „geometrică" examinată în problema 59. În ambele cazuri împărțim o anumită mulțime de obiecte (cele mai scurte drumuri din metoda „geometrică" și toate rezultatele posibile ale experienței în soluția problemei 70, b)), al căror număr poate fi calculat, în submulțimi fără elemente comune și egalăm, după aceea numărul total al obiectelor cu suma numărului de obiecte aparținînd submulțimilor. Să observăm că, spre deosebire de numărul celor mai scurte drumuri, nu este obligatoriu ca numărul total de rezultate ale experienței să fie exprimat prin coeficienți binomiali, ceea ce face ca metoda din problema 70, b) să fie aplicabilă la stabilirea unui șir de relații care în principiu nu pot fi obținute în schema geometrică a problemei 59 (v., de exemplu, problema 71).

71. a) În momentul în care o persoană constată că cutia de chibrituri scoasă din buzunar este goală, a doua cutie poate să conțină 0 chibrituri (adică să fie de asemenea goală), 1 chibrit, 2 chibrituri, 3 chibrituri etc. pînă la n chibrituri inclusiv. Experimentul constă în aceea că persoana scoate de mai multe ori la întîmplare cîte un chibrit dintr-o cutie sau din cealaltă, pînă cînd una dintre ele se va goli. În acest caz, numărul total de chibrituri scoase în diferite etape ale experimentului va fi, desigur, diferit; de aceea diferitele rezultate nu vor fi egal posibile și nu pot fi folosite pentru calculul probabilităților. Această dificultate poate fi înlăturată cu ajutorul unui procedeu analog celui folosit în rezolvarea problemei 65: vom considera că în momentul în care cutia scoasă va fi goală persoana o umple din nou (practic acest lucru poate fi realizat, de exemplu, înlocuind cutia goală cu o cutie plină) și continuă să ia mai departe cîte un chibrit la întîmplare dintr-o cutie sau alta. Vom conveni să considerăm că această extragere succesivă a chibriturilor se oprește după scoaterea celui de-al $(2n+1)$-lea chibrit; deoarece inițial ambele cutii au conținut în total $2n$ chibrituri, este clar că în acest moment cel puțin una dintre cutii va fi goală (și va fi umplută din nou). Acum putem formula din nou problema pusă în modul următor: o persoană scoate de $2n+1$ ori la rînd cîte un chibrit dintr-una din cele două cutii, iar probabilitatea de a lua de fiecare dată un chibrit dintr-o cutie sau alta este aceeași. Numărul de chibrituri din fiecare cutie poate fi considerat nemărginit (deoarece am convenit să umplem cutia goală din nou). Într-un moment oarecare, persoana a scos pentru prima oară al $(n+1)$-lea chibrit dintr-una din cutii (în prima formulare aceasta ar fi însemnat că el a găsit cutia goală); care este probabilitatea ca în acel moment din cutia a doua să fi fost scoase $n-k$ chibrituri?

În noua formulare, problema se rezolvă foarte simplu. La fiecare extracţie în parte se pot prezenta, evident, două cazuri (chibritul poate fi extras din prima sau din a doua cutie); la $2n+1$ extracţii succesive se pot prezenta 2^{2n+1} cazuri diferite. Acesta este chiar numărul total al cazurilor egal posibile în experimentul considerat. Cazuri favorabile vor fi acelea în care în primele $2n-k$ extracţii vor fi scoase n chibrituri din prima cutie şi $n-k$ din a doua, iar al $(2n-k+1)$-lea chibrit va fi din nou scos din prima cutie; sau, dimpotrivă, în primele $2n-k$ extracţii, n chibrituri vor fi scoase din a doua cutie şi $n-k$ din prima, iar în a $(2n-k+1)$-a extracţie, chibritul va fi scos, de asemenea, din a doua; rezultatele ultimelor k extracţii pot fi în acest caz oarecare. Dar numărul cazurilor în $2n-k$ extracţii, în care n chibrituri sînt scoase din prima cutie, iar $n-k$ din a doua, este egal cu numărul combinărilor C_{2n-k}^{n} de $2n-k$ elemente luate cîte n. Asociind aceste cazuri cu 2^k cazuri posibile din ultimele k probe, vom găsi că numărul de cazuri în care $n+1$ chibrituri sînt scoase mai întîi din prima cutie, din a doua cutie fiind scoase în acest moment $n-k$ chibrituri, este egal cu $C_{2n-k}^{n}2^k$. Tot atîtea vor fi şi cazurile în care al $(n+1)$-lea chibrit va fi scos pentru prima oară din a doua cutie, iar din prima cutie vor fi scoase în acel moment $n-k$ chibrituri. Deci, numărul total de cazuri favorabile ale experienţei este aici egal cu $2C_{2n-k}^{n}\cdot 2^k = 2^{k+1}C_{2n-k}^{n}$. Deci, pentru probabilitatea căutată, vom obţine formula

$$p = \frac{2^{k+1}C_{2n-k}^{n}}{2^{2n+1}} = \frac{C_{2n-k}^{n}}{2^{2n-k}}.$$

b) În momentul în care persoana, despre care este vorba în enunţul problemei a), constată că cutia de chibrituri scoasă din buzunar este goală, în a doua cutie se poate găsi orice număr de chibrituri de la 0 la n. Suma probabilităţilor ca acest număr să fie egal cu 0, ca acest număr să fie egal cu 1, ca acest număr să fie egal cu 2 etc. pînă ce acest număr este egal cu n, trebuie, evident, să fie egală cu 1: adunînd toate aceste probabilităţi, vom obţine o fracţie avînd atît la numărător cît şi la numitor numărul cazurilor egal posibile ale experimentului. Deci,

$$\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}} + \frac{C_{2n-1}^{n}}{2^{2n-1}} + \frac{C_{2n-2}^{n}}{2^{2n-2}} + \dots + \frac{C_{n}^{n}}{2^{n}} = 1,$$

$$C_{2n}^{n} + 2C_{2n-1}^{n} + 2^2C_{2n-2}^{n} + \dots + 2^nC_{n}^{n} = 2^{2n}.$$

72. Deoarece fiecare dintre vînătorii A şi B pot nimeri şi ucide raţa de tot atîtea ori cît o pot rata, atunci, la fiecare împuşcătură în parte, probabilitatea de a ucide raţa pentru fiecare dintre aceşti vînători este egală cu 1/2, adică este egală cu probabilitatea de a obţine stema în aruncarea monedei. Astfel, problema noastră este echivalentă cu următoarea: A aruncă moneda de 50 de ori, iar B o aruncă de 51 ori; care este probabilitatea ca lui B să-i iasă stema de mai multe ori decît lui A? În această problemă, numărul cazurilor egal posibile ale experienţei nu este greu de calculat; însă, calculul numărului cazurilor favorabile este foarte complicat. Nu vom face acest calcul, ci vom folosi în locul lui următorul raţionament simplu şi ingenios.

Mulţimea tuturor cazurilor experimentului, care constă în aceea că A aruncă moneda de 50 ori, iar B o aruncă de 51 ori o vom separa în următoarele două părţi: 1) mulţimea tuturor cazurilor în care lui B îi va ieşi stema de mai multe ori decît lui A şi 2) mulţimea tuturor cazurilor în care lui B îi va ieşi stema nu de mai multe ori (adică de mai puţine ori sau de tot atîtea ori). Se observă că, dacă lui B i-a ieşit stema de tot atîtea ori cît şi lui A sau de mai puţine ori, aceasta înseamnă că lui B i-a ieşit banul de mai multe ori decît lui A şi, invers, dacă lui B i-a ieşit banul de mai multe ori decît lui A, aceasta înseamnă că stema i-a ieşit lui B sau de tot atîtea ori cît şi lui A sau chiar de mai puţine ori (deoarece B aruncă numai o singură dată în plus decît A). Deci, mulţimea cazurilor în care B nu obţine stema de mai multe ori decît A coincide cu mulţimea cazurilor în care B obţine banul de mai multe ori decît A. Dar, datorită perfectei simetrii a monedei, numărul cazurilor, în care lui B îi apare stema de mai multe ori decît lui A trebuie să fie egal cu numărul cazurilor în care lui B îi apare banul de mai multe ori decît lui A. Deci, în problema noastră numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul cazurilor nefavorabile, de unde rezultă imediat că probabilitatea căutată este egală cu 1/2.

Astfel, probabilitatea ca prada lui B să fie mai mare decît prada lui A este egală cu 1/2.

O b s e r v a ţ i e. Soluţia dată rămîne valabilă în întregime în cazul în care în timpul vînătorii A întîlneşte n raţe iar B întîlneşte $n + 1$ raţe. Şi în acest caz mai general probabilitatea ca prada lui B să fie mai mare decît a lui A este egală cu 1/2.

73. a) În experimentul din problemă, doi vînători trag în vulpe în acelaşi timp. În acest caz, frecvenţa cu care unul dintre vînători nimereşte sau ratează nu depinde, desigur, de rezultatul împuşcăturii simultane a celuilalt: dacă ei vor trage simultan de mai multe ori în vulpe, atunci primul va nimeri la ţintă o dată la trei trageri, iar al doilea va nimeri la ţintă atît în cazul în care împuşcătura primului vînător este reuşită cît şi în cazul în care nu este reuşită. În calculul probabilităţilor, cei doi vînători pot fi înlocuiţi cu două persoane care extrag fiecare, independent de cealaltă, cîte un bilet dintr-o urnă conţinînd două bilete cu inscripţia Ra (adică „rateu“) şi un bilet cu inscripţia R („reuşit“). Numărul biletelor cu inscripţia R extrase din urnă dau numărul cazurilor în care vulpea este nimerită.

Asociind cele trei cazuri ale extragerii biletului de către prima persoană cu cele trei cazuri de acelaşi fel din extragerea efectuată de a doua persoană, vom obţine următoarele nouă cazuri egal posibile:

Ra—Ra	Ra—Ra	Ra—R
Ra—Ra	Ra—Ra	Ra—R
R —Ra	R —Ra	R —R

(primul este indicat rezultatul primei extrageri a biletului). Printre aceste nouă cazuri există cinci cazuri favorabile, adică astfel că cel puţin o persoană scoate biletul R (în tabel acestea sînt cazurile care figurează în coloana a treia sau în rîndul al treilea). Astfel, probabilitatea căutată, ca vînătorii să ucidă vulpea, este egală cu 5/9.

b) Asociind fiecare dintre cele nouă cazuri din problema precedentă cu cele două ratări şi o reuşită, independente de ele, ale celui de-al treilea vînător, vom obţine 27 rezultate egal posibile pentru împuşcăturile simultane ale celor trei vînători. În aceste 27 rezultate, cel puţin unul dintre primii doi vînători nimereşte în vulpe în $5 \cdot 3 = 15$ cazuri (amintim că în problema precedentă vulpea era nimerită în cinci cazuri din nouă); în celelalte 12 cazuri şi primul şi al doilea vînător vor rata, însă, în a treia parte dintre ele (adică în patru cazuri) al treilea vînător va nimeri în vulpe. Astfel, cel puţin un caz în care se nimereşte va fi unul dintre cele $15 + 4 = 19$ din 27 cazuri egal posibile şi probabilitatea căutată va fi egală cu 19/27.

c) În cazul tragerii simultane de către n vînători, în mod analog cu cazurile a) şi b) vom obţine 3^n cazuri egal posibile. Dar, aici, calculul numărului de cazuri corespunzătoare cazurilor în care nimereşte cel puţin un vînător este mult mai complicat decît în condiţiile mult mai simple considerate mai sus. Totuşi, un astfel de calcul poate fi efectuat (el este analog calculului făcut la prima soluţie a problemei 78, a)). Aici, nu-l vom face, însă, deoarece problema poate fi rezolvată mai simplu cu ajutorul următorului raţionament. Vom calcula numărul cazurilor care corespund r a t ă r i l o r d e c ă t r e t o ţ i c e i n v î n ă t o r i. Numărul cazurilor în care nimereşte cel puţin unul dintre vînători va fi egal cu diferenţa dintre numărul total al cazurilor egal posibile şi acest număr. Numărul cazurilor în care ratează toţi vînătorii este uşor de calculat; evident, primul vînător din 3^n împuşcături va rata în $\frac{2}{3} \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}$ cazuri. Din aceste $2 \cdot 3^{n-1}$ împuşcături nereuşite pentru primul vînător, al doilea vînător va rata în $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 3^{n-1} = 2^2 \cdot 3^{n-2}$ cazuri. Din aceste $2^2 \cdot 3^{n-2}$ împuşcături nereuşite pentru primii doi vînători, al treilea vînător va rata în $\frac{2}{3} \cdot 2^2 \cdot 3^{n-2} = 2^3 \cdot 3^{n-3}$ cazuri. Continuînd să raţionăm în mod analog, vom ajunge la concluzia că toţi cei n vînători vor rata simultan în 2^n cazuri din 3^n. Astfel, numărul cazurilor corespunzătoare cazului ca să nimerească cel puţin un vînător este egal cu $3^n - 2^n$ şi probabilitatea căutată în această problemă este egală cu $\frac{3^n - 2^n}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

74. Se va calcula întîi probabilitatea cu care se nimereşte la a doua şi la a treia împuşcătură. A doua oară vînătorul trage de la distanţa de 150 m, iar a treia oară de la distanţa de 200 m. Deoarece, conform presupunerii făcute, probabilitatea de a nimeri este invers proporţională cu pătratul distanţei şi probabilitatea de a nimeri la distanţa de 100 m este egală cu 1/2, atunci probabilitatea de a nimeri la a doua împuşcătură va fi egală cu $\frac{1}{2}\left(\frac{100}{150}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$, iar la a treia va fi egală cu $\frac{1}{2}\left(\frac{100}{200}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

Rezultă deci că problema noastră este echivalentă cu următoarea. O persoană extrage la întîmplare o bilă dintr-o urnă în care se află o bilă albă şi una neagră. Dacă bila scoasă este neagră, ea face o a doua extracţie dintr-o

altă urnă care conține două bile albe și 9 — 2 = 7 negre. În sfîrșit, dacă și această bilă este neagră, face o a treia extracție dintr-o urnă în care se află o bilă albă și 8 — 1 = 7 bile negre. Care este probabilitatea ca această persoană să scoată cel puțin o dată o bilă albă? Această probabilitate va fi egală, exact cu probabilitatea ca vînătorul să nimerească vulpea.

Se va considera ca, independent de rezultatul primei și celei de-a doua extracții, persoana considerată tot va extrage cîte o bilă din toate cele trei urne (această presupunere este analoagă cu cele făcute mai înainte în rezolvarea problemelor 65 și 71 și urmărește același scop). Extragerea unei bile din prima urnă poate prezenta două cazuri egal posibile: unul în care se extrage bila albă, al doilea, extracția bilei negre. La extragerea din a doua urnă se pot ivi nouă cazuri egal posibile: două în care este extrasă bila albă și șapte pentru cea neagră. Extragerea din urna a treia poate prezenta opt cazuri egal posibile din care numai în unul bila extrasă va fi albă. Asociind cele două cazuri din prima extragere cu nouă cazuri din cea de-a doua și cu opt cazuri din cea de-a treia, vom obține în total $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ cazuri egal posibile ale experimentului. Nefavorabile vor fi acele $1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$ cazuri în care și din prima, și din a doua, și din a treia urnă sînt extrase bile negre. Celelalte $144 - 49 = 95$ cazuri vor fi favorabile. Deci, probabilitatea căutată în problemă este egală cu $\frac{95}{144} \approx 0{,}66$.

75. P r i m a r e z o l v a r e. Vom considera experimentul în care fiecare din cele patru persoane A, B, C și D face anumite afirmații și după aceea se verifică care dintre ele a spus adevărul și care nu. Fiecare din aceste patru persoane spune adevărul o dată din trei cazuri, tot așa cum fiecare din vînătorii din problema 73 nimerește la țintă o dată din trei cazuri. Raționînd ca și la rezolvarea acestei probleme, ne vom convinge că în experimentul considerat se poate aprecia că există 81 cazuri egal posibile; aceste 81 cazuri egal posibile se pot reduce la următorul tabel (A înseamnă adevăr, F — fals; patru litere consecutive se referă la afirmațiile făcute respectiv de A, B, C și D):

A—A—A—A; A—A—A—F; A—A—F—A; A—F—A—A; F—A—A—A;
o dată — de 2 ori — de 2 ori — de 2 ori — de 2 ori

A—F—F; A—F—A—F; A—F—F—A; F—A—A—F;
de 4 ori — de 4 ori — de 4 ori — de 4 ori

F—A—F—A; F—F—A—A; A—F—F—F; F—A—F—F;
de 4 ori — de 4 ori — de 8 ori — de 8 ori

F—F—A—F; F—F—F—A; F—F—F—F
de 8 ori — de 8 ori — de 16 ori

(aici un caz se repetă o dată, patru cazuri se repetă de două ori, șase cazuri se repetă de patru ori, încă patru cazuri se repetă de opt ori și ultimul caz se repetă de 16 ori, deci în total avem efectiv $1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 16 = 81$ cazuri egal posibile). Aceste 81 de cazuri egal posibile au loc atunci cînd afirmațiile făcute de A, B, C și D nu depind una de cealaltă. În cazul

nostru, însă, dat fiind caracterul special al acestor afirmații, unele din aceste posibilități sînt excluse. Pentru a înțelege în ce constă faptul, vom cerceta cazul mai simplu, cînd se pronunță numai două din cele patru persoane (să zicem A și D). În general, aici vor fi nouă cazuri egal posibile (acest caz este în totul analog cu cel considerat în problema 73, a)); dacă, însă, D a făcut o afirmație oarecare și A declară că D a spus adevărul, atunci este clar că numărul posibilităților se reduce: posibile vor fi doar schemele în care sau și A și D au spus adevărul, sau și A și D au mințit. La fel, dacă A declară că C susține că D a spus adevărul, atunci este evident că sau și A și C și D spun adevărul, sau două din persoane spun minciuni, iar a treia spune adevărul. În cazul nostru, A declară că B neagă că C suține că D a spus o minciună ; acest lanț de afirmații poate fi exprimat în modul următor: A declară că B susține că C susține că D a spus adevărul. Este clar că, într-un astfel de caz, pot să mintă doar un număr par de persoane, adică sau toate patru, sau două oarecare, sau nici una [1]. Deci, după însuși sensul problemei aici sînt posibile doar cazurile cuprinse în rîndurile întîi, al patrulea, al cincilea și al optulea din tabelul nostru de cazuri, adică în total sînt $1 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 16 = 41$ cazuri egal posibile.

Ne mai rămîne acum să calculăm cîte dintre aceste cazuri corespund situației în care D a spus adevărul, adică să calculăm numărul celorlalte scheme care se încheie cu litera A. De acest gen, evident, vor fi schemele

A—A—A—A;

o dată

A—F—F—A; F—A—F—A; F—F—A—A.

de 4 ori — de 4 ori — de 4 ori

Deci numărul cazurilor favorabile în problema noastră este egal cu $1 + 3 \cdot 4 = 13$ și, prin urmare, probabilitatea căutată este egală cu 13/41.

R e z o l v a r e a a d o u a. Această problemă poate fi rezolvată și fără a scrie tabelul complet al tuturor cazurilor. O vom rezolva în formularea dată în observația de la enunț. Să presupunem că D a scris semnul „plus". Conform enunțului problemei, într-un astfel de caz vom avea trei cazuri egal posibile ale experimentului în care C transcrie semnul de la D: în unul dintre cazuri C transcrie semnul „plus" și în două cazuri semnul „minus" (compară cu soluția problemei 73). Să presupunem, mai departe, că B transcrie semnul de la C; fiecăruia din cazurile în care C a scris semnul „plus" îi corespunde un singur caz în care B scrie semnul „plus" și două cazuri în care B scrie „minus"; cazului în care C a scris „minus" îi corespund două cazuri în care B scrie „plus" și un caz în care B scrie „minus". Să presupunem că D a scris semnul „plus"; C a copiat semnul de la D și B a copiat semnul de la C. În acest caz, vor fi în total $3 \cdot 3 = 9$ cazuri egal posibile ale experimentului în $1 \cdot 1 +$

[1] Este ușor de verificat că celelalte posibilități se înlătură, iar acestea rămîn. Astfel, dacă D a mințit într-adevăr, atunci, în mod vădit, ceilalți trei nu au putut să spună cu toții adevărul (altfel A ar fi trebuit să spună că B confirmă că C susține că D a spus minciuna); în mod analog se verifică că nu sînt posibile nici toate celelalte cazuri în care a mințit una din persoane sau trei din ele.

$+ 2 \cdot 2 = 5$ din aceste cazuri B scrie semnul „plus“, iar în $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$ din aceste cazuri B scrie semnul „minus“. Să presupunem, în sfîrşit, că A transcrie semnul de la B. Fiecărui caz în care B scrie „plus“ îi corespunde un caz în care A transcrie semnul „plus“ şi două cazuri în care A scrie semnul „minus“; fiecărui caz în care B scrie „minus“ îi corespund două cazuri în care A scrie „plus“ şi un caz în care A transcrie „minus“. Astfel, obţinem în total $9 \cdot 3 = 27$ cazuri egal posibile ale experimentului în care A transcrie semnul de la B (B a transcris semnul de la C; C a transcris semnul de la D; D a scris semnul „plus“); în $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 13$ dintre aceste cazuri A scrie semnul „plus“, iar în $5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$ dintre aceste cazuri A scrie semnul „minus“.

Tot aşa, dacă se ştie că D a scris semnul „minus“, vor fi 27 de cazuri egal posibile ale experimentului; în 13 din aceste cazuri A scrie semnul „minus“ şi în 14 cazuri scrie semnul „plus“. Deoarece D scrie „plus“ o dată la trei cazuri, rezultă că, în total, există, evident, $27 \cdot 3 = 81$ cazuri egal posibile; în $13 + 2 \cdot 14 = 41$ din aceste cazuri A scrie „plus“, iar în $14 + 2 \cdot 13 = 40$ cazuri A scrie „minus“. Dacă se ştie dinainte că A a scris semnul „plus“, atunci sînt posibile numai primele 41 de cazuri. În 13 din aceste 41 cazuri D a scris „plus“, iar în $2 \cdot 14 = 28$ cazuri D a scris „minus“. De aceea, dacă se ştie că în urma transcrierii consecutive A a scris „plus“, probabilitatea ca D să fi scris semnul „plus“ este egală cu $13/41$.

Observaţie. A doua rezolvare a problemei este interesantă prin aceea că prezintă mari posibilităţi de generalizare. Să presupunem că există $n + 1$ persoane; prima persoară A_0 scrie semnul „plus“ sau „minus“ şi-l arată lui A_1; A_1 transcrie acest semn şi-l arată lui A_2; A_2 transcrie semnul de la A_1 şi-l arată lui A_3 etc. pînă la ultima persoană A_n, care scrie semnul de la A_{n-1}. Să presupunem că se ştie că probabilitatea ca A_0 să scrie semnul „plus“ este egală cu $\alpha/(\alpha + \beta)$ (cu alte cuvinte, A_0 scrie „plus“ în α cazuri din $\alpha + \beta$): probabilitatea ca fiecare din persoanele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să nu greşească la transcriere este egală cu $p/(p + q)$ (soluţia problemei nu se va modifica sensibil în cazul în care se consideră probabilităţi diferite de a greşi pentru persoanele $A_1, A_2, \ldots, A_n$). Să presupunem că se ştie că persoana A_n a scris semnul „plus“; se întreabă care este probabilitatea ca persoana A_0 să fi scris, de asemenea, semnul „plus“? (Propunem cititorului să formuleze singur această problemă ca „problema celor $n + 1$ mincinoşi“).

Vom raţiona ca în a doua rezolvare a problemei. Să presupunem că se ştie că persoana A_0 a scris semnul „plus“. Într-un astfel de caz, experienţa în care A_1 transcrie semnul de la A_0 va avea $p + q$ cazuri egal posibile; în p dintre aceste cazuri A_1 scrie „plus“ şi în q cazuri scrie semnul „minus“. Experienţa în care A_2 transcrie semnul de la A_1 va avea $(p + q)^2$ cazuri egal posibile; în $p \cdot p + q \cdot q = p^2 + q^2$ din aceste cazuri A_2 scrie semnul „plus“, iar în $p \cdot q + q \cdot p = 2pq$ din aceste cazuri A_2 scrie semnul „minus“. Experienţa în care A_3 copiază semnul de la A_2 va avea $(p + q)^3$ cazuri egal posibile; în $(p^2 + q^2) \cdot p + 2pq \cdot q = p^3 + 3pq^2$ din aceste cazuri A_3 scrie „plus“, iar în $(p^2 + q^2) \cdot q + 2pq \cdot p = 3p^2q + q^3$ din aceste cazuri A_3 scrie „minus“. Continuînd să raţionăm la fel, vom obţine că experienţa în care A_n copiază semnul de la A_{n-1} va avea $(p + q)^n$ cazuri egal posibile; în

$$p^n + C_n^2 p^{n-2} q^2 + C_n^4 p^{n-4} q^4 + \ldots$$

din aceste cazuri A_n scrie semnul „plus“, în

$$C_n^1 p^{n-1} q + C_n^3 p^{n-3} q^3 + \ldots$$

din aceste cazuri A_n scrie „minus“ (punctele de la sfîrşitul sumelor înseamnă că termenii sumelor se scriu după aceeaşi lege atîta timp cît au o semnificaţie; demonstraţia ultimului rezultat se obţine uşor prin metoda inducţiei complete).

Tot aşa se demonstrează că, dacă A_0 a scris semnul „minus", experienţa în care A_1 transcrie semnul de la A_0; A_2 scrie semnul de la A_1; ...; în sfîrşit A_n copiază semnul de la A_{n-1} va avea, de asemenea, $(p+q)^n$ cazuri egal posibile; în

$$p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots$$

din aceste cazuri A_n scrie semnul „minus", iar în

$$C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots$$

din aceste cazuri A_n scrie „plus". Ţinînd seama, acum, de faptul că în α cazuri A_0 scrie semnul „plus" şi în β cazuri scrie semnul „minus", vom obţine în total $(\alpha+\beta)(p+q)^n$ cazuri egal posibile; în

$$\alpha(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots) + \beta(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots)$$

din aceste cazuri A_n scrie semnul „plus"; în

$$\alpha(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots) + \beta(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots)$$

cazuri scrie semnul „minus". Dacă se ştie dinainte că A_n a scris semnul „plus", atunci numai primele

$$\alpha(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots) + \beta(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots)$$

din aceste cazuri sînt posibile. În

$$\alpha(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots)$$

din aceste cazuri A_0 a scris „plus", iar în celelalte

$$\beta(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots)$$

cazuri a scris „minus". Astfel, tragem concluzia că, dacă se ştie că în urma transcrierilor consecutive A_n a scris semnul „plus", probabilitatea ca A_0 să fi scris „plus" este egală cu

$$\frac{\alpha(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots)}{\alpha(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots) + \beta(C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots)}.$$

Acest răspuns poate fi scris şi într-o formă mult mai comodă. Într-adevăr, vom utiliza faptul că

$$(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots) + (C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots) =$$

$$= p^n + C_n^1 p^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^3 p^{n-3}q^3 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots = (p+q)^n,$$

$$(p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 q^{n-4}q^4 + \dots) - (C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots) =$$

$$= p^n - C_n^1 p^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 - C_n^3 p^{n-3}q^3 + C_n^4 p^{n-4}q^4 - \dots = (p-q)^n.$$

De aici avem

$$p^n + C_n^2 p^{n-2}q^2 + C_n^4 p^{n-4}q^4 + \dots = [(p+q)^n + (p-q)^n]/2,$$

$$C_n^1 p^{n-1}q + C_n^3 p^{n-3}q^3 + \dots = [(p+q)^n - (p-q)^n]/2,$$

ceea ce ne permite să scriem răspunsul obţinut sub forma următoare:

$$\frac{\alpha(p+q)^n + \alpha(p-q)^n}{(\alpha+\beta)(p+q)^n + (\alpha-\beta)(p-q)^n}.$$

$$\frac{\alpha_1 [1 + (p_1 - q_1)^n]}{1 + (\alpha_1 - \beta_1)(p_1 - q_1)^n}.$$

Punînd în ultima formulă $\alpha_1 = 1/3$, $p_1 = 1/3$, $n = 3$, vom obține 13/41, adică răspunsul la problema 75.

Raționamentul folosit în observația de față are un caracter general și este aplicabil într-un mare număr de probleme de teoria probabilităților (cazul așa-numitelor lanțuri Markov; v. problema 190 din [17]).

76. a) Șase capete ale firelor de iarbă pot fi legate două cîte două în $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ moduri diferite (primul capăt poate fi legat cu oricare dintre celelalte cinci; după aceea unul din celelalte patru poate fi legat cu oricare din celelalte trei; apoi celelalte două capete pot fi legate numai într-un singur mod). Deoarece capetele de sus și de jos pot fi legate în 15 moduri diferite, independent unele de altele, rezultă că numărul total de cazuri egal posibile ale experimentului este egal cu $15 \cdot 15 = 225$.

Vom calcula acum numărul cazurilor favorabile. Să presupunem că părțile de sus sînt legate două cîte două într-unul din cele 15 moduri posibile; să presupunem, de exemplu, că s-a legat capătul primului fir de iarbă cu capătul celui de-al doilea, capătul celui de-al treilea cu capătul celui de-al patrulea și capătul celui de-al cincilea cu capătul celui de-al șaselea. În acest caz, pentru a se obține un inel, capătul de jos al primului fir de iarbă trebuie să fie legat cu capătul de jos al celui de-al treilea, al patrulea, al cincilea sau al șaselea fir de iarbă; deci pentru a lega capătul de jos al primului fir de iarbă, există patru posibilități. Mai departe, dacă, de exemplu, capătul de jos al primului fir de iarbă se leagă cu capătul celui de-al treilea, atunci capătul de jos al celui de-al doilea fir de iarbă va trebui să fie legat cu capătul celui de-al cincilea fir de iarbă sau al celui de-al șaselea — aici nu mai sînt, deci, decît două posibilități. După aceasta, ne va mai rămîne să mai legăm două capete încă nelegate. Asociind toate modurile posibile de legare, rezultă că pentru fiecare dintre cele 15 moduri de legare a capetelor de sus vor corespunde exact $4 \cdot 2 = 8$ moduri de legare a capetelor de jos, care conduc la un rezultat favorabil al experienței: prin urmare, numărul total al cazurilor favorabile este egal cu $15 \cdot 8 = 120$.

Dec', probabilitatea căutată este egală cu $\frac{15 \cdot 8}{15 \cdot 15} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$.

b) Raționînd la fel ca și la soluția problemei a), vom găsi că pentru $2n$ fire de iarbă numărul total de cazuri este egal cu $[(2n-1)(2n-3)(2n-5) \ldots 1]^2$, iar numărul cazurilor favorabile este egal cu

$$[(2n-1)(2n-3)(2n-5) \ldots 1]\,[(2n-2)(2n-4) \ldots 2].$$

Astfel, în acest caz, obținem pentru probabilitate expresia

$$p_n = \frac{(2n-2)(2n-4) \ldots 2}{(2n-1)(2n-3) \ldots 3 \cdot 1} = \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \ldots \frac{2}{3}.$$

Observație. Trebuie să observăm că răspunsul la problema 76, b), simplu ca formă, pentru valori mari ale lui n devine incomod, deoarece în acest caz trebuie să înmulțim multe fracții. Însă, utilizînd formula lui Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

(v. problemele 160—161 și textul care urmează după acestea), se poate obține pentru această probabilitate o expresie aproximativă simplă, cu o precizie foarte bună tocmai pentru valori mari ale lui n. Într-adevăr, observînd că $(2n-2)(2n-4)\dots 2 = 2^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 1 = 2^{n-1}(n-1)!$ și înmulțind numărătorul și numitorul de la răspunsul la problema 76, *b*) cu această expresie. vom găsi că

$$p_n = \frac{[2^{n-1}(n-1)!]^2}{[(2n-1)(2n-2)!} \approx \frac{[2^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\,(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}]^2}{(2n-1)\sqrt{2\pi\cdot 2(n-1)}\,[2(n-1)]^{2(n-1)}e^{-2(n-1)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{2n-1} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

deoarece pentru valori mari ale lui n

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2n-1} = \sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\Big/\left[2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right] \approx \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Aici, π, ca de obicei, este raportul dintre lungimea cercului și diametru: $\pi \approx 3,14$. Eroarea formulei aproximative $p_n \approx \sqrt{\pi}/(2\sqrt{n})$ va fi cu atît mai mică, cu cît n va fi mai mare.

77. a) Vom calcula numărul total al cazurilor egal posibile ale experimentului considerate în enunțul problemei. Prima persoană poate extrage oricare dintre cele $C_{2n}^2 = 2n(2n-1)/2$ perechi de bile (numărul perechilor este egal cu numărul combinărilor de $2\,n$ elemente luate cîte 2). După aceasta, a doua poate scoate oricare din cele $C_{2n-2}^2 = (2n-2)(2n-3)/2$ perechi care se pot forma din cele $2n-2$ bile rămase. A treia poate să scoată oricare din cele $C_{2n-4}^2 = (2n-4)(2n-5)/2$ perechi etc., pînă la penultima, care poate să scoată una din cele $C_4^2 = 4\cdot 3/2 = 6$ perechi (deoarece în momentul penultimei extracții mai rămîn în urnă patru bile) și pînă la ultima care ia ultimele două bile fără nici o alegere. Asociind C_{2n}^2 cazuri posibile la extragerea primei perechi de bile cu C_{2n-2}^2 cazuri posibile la extragerea celei de-a doua perechi cu C_{2n-4}^2 cazuri posibile la extragerea celei de-a treia perechi, ..., cu C_4^2 cazuri posibile la extragerea celei de-a $(n-1)$-a perechi cu un caz, $C_2^2 = 1$, extragerea ultimei perechi, vom obține în total

$$C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 \dots C_4^2 C_2^2 = \frac{2n(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}\dots\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

cazuri egal posibile. Rămîne să mai calculăm cîte din aceste cazuri sînt favorabile.

Cazuri favorabile sînt acelea în care fiecare din cei care fac extracția scoate o bilă albă și una neagră. Prima persoană poate, evident, să scoată oricare din cele n bile albe și oricare din cele n bile negre, adică poate să scoată oricare din cele n^2 perechi de bile care sînt formate dintr-o bilă albă și una neagră. A doua persoană, după aceasta, poate scoate doar una din cele $(n-1)^2$ perechi rămase (după prima extragere mai rămîn $n-1$ bile albe

şi $n - 1$ bile negre), a treia poate scoate una din $(n-2)^2$ astfel de bile, ..., penultima poate scoate una din $2^2 = 4$ perechi, ultima poate lua ultima pereche rămasă. Asociind toate aceste posibilităţi, vom obţine în total

$$n^2(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 2^2 \cdot 1^2 = (n!)^2$$

cazuri favorabile. Deci, probabilitatea căutată p_n este egală cu

$$p_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!/2^n} = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

Observaţie. Răspunsul căpătat, care pare foarte simplu, este în realitate foarte incomod, de îndată ce trebuie să lucrăm cu cîteva numere n mai mari (de exemplu, de ordinul lui 8 sau mai mari). În acest caz, ca şi în multe altele analoage, o foarte mare însemnătate prezintă formula lui Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},$$

care se aplică tocmai în cazul valorilor mari ale lui n. Utilizînd această formulă, obţinem următoarea formulă aproximativă foarte comodă pentru p_n:

$$p_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \approx \frac{2^n(2\pi n)\, n^{2n}\, e^{-2n}}{\sqrt{2\pi \cdot 2n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n};$$

pentru n mare precizia acestei formule va fi foarte mare.

b) Numărul total al cazurilor egal posibile este aici egal cu $(2n)!/2^n$, deoarece experienţa considerată este aceeaşi ca şi în enunţul problemei a) (v. soluţia acestei probleme). Astfel, ne mai rămîne să găsim numărul de cazuri favorabile.

În primul rînd, este foarte clar că pentru n impar numărul cazurilor favorabile (deci şi probabilitatea căutată p_n) este egal cu zero: dacă numărul total al bilelor albe este impar, cel puţin una din acestea va fi neapărat extrasă într-o pereche cu o bilă neagră (deoarece fiecare persoană extrage două bile). De aceea este suficient să considerăm cazul lui $n = 2k$ par; aici, numărul total de cazuri egal posibile va fi egal cu $(4k)!/2^{2k}$.

Vom calcula, mai întîi, numărul cazurilor favorabile, în care k persoane din cele $2k$ care efectuează extracţiile extrag cîte o pereche de bile albe (şi deci celelalte k extrag cîte o pereche de bile negre). Cele k persoane pot extrage cîte o pereche de bile albe din numărul total de $2k$ de astfel de bile în $(2k)!/2^k$ moduri diferite (deoarece acest număr de moduri se obţine din numărul total al tuturor cazurilor posibile prin înlocuirea lui n cu k). Celelalte k persoane pot extrage cîte o pereche de bile negre tot în $(2k)!/2^k$ moduri diferite. Asociind aceste posibilităţi, vom obţine că numărul de cazuri în care k persoane scot bile albe este egal cu $[(2k)!]^2/2^{2k}$. Însă din numărul total de $2k$ persoane, k persoane care scot tocmai bile albe pot fi alese în $C_{2k}^k = (2k)!/(k!)^2$ moduri diferite. Numărul total de cazuri favorabile se obţine prin înmulţirea numărului de cazuri, calculat presupunînd că aceste k persoane sînt alese dinainte, cu $(2k)!/(k!)^2$. Deci, în definitiv, numărul total al cazurilor favorabile este

egal cu $\frac{[(2k)!]^2}{2^{2k}} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{[(2k)!]^3}{2^{2k}(k!)^2}$ şi deci probabilitatea căutată p_{2k} este egală cu

$$p_{2k} = \frac{[(2k)!]^3}{2^{2k}(k!)^2} \cdot \frac{(4k)!}{2^{2k}} = \frac{[(2k!)]^3}{(4k)!(k!)^2}.$$

Observaţie. Ca şi în cazul problemei a), pentru valori mari ale lui k este comod să transformăm răspunsul obţinut, utilizînd formula lui Stirling:

$$p_{2k} = \frac{[(2k)!]^3}{(4k)!(k!)^2} \approx \frac{(2\pi \cdot 2k)^{3/2}(2k)^{6k} e^{-6k}}{\sqrt{2\pi \cdot 4k}(4k)^{4k} e^{-4k}(2\pi k) k^{2k} e^{-2k}} = \frac{(2\pi k)^{3/2} \cdot 2^{3/2} \cdot 2^{6k} k^{6k} e^{-6k}}{(2\pi k)^{3/2} \cdot 2 \cdot 4^{4k} k^{6k} e^{-6k}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2k}}.$$

78. a) Prima rezolvare. Experimentul despre care este vorba în această problemă constă în faptul că pe fiecare dintre cele n plicuri se scrie una din cele n adrese. În acest caz, pe primul plic poate fi scrisă oricare din cele n adrese; pe al doilea poate fi scrisă oricare din $n - 1$ adrese rămase; pe al treilea poate fi scrisă oricare din $n - 2$ adrese rămase etc. Asociind aceste posibilităţi, vom găsi că în total experimentul poate avea $n(n - 1)(n - 2)\ldots$ $\ldots 1 = n!$ cazuri egal posibile diferite (după cum trebuia să ne aşteptăm. acest număr este egal cu numărul permutărilor de n elemente). Astfel, rămîne să mai calculăm numărul cazurilor favorabile.

Cazurile favorabile vor fi aici acelea în care cel puţin pe unul din plicuri va fi scrisă adresa corectă. Numărul de cazuri în care pe primul plic va fi scrisă adresa corectă este egal, evident, cu numărul de moduri în care pot fi scrise celelalte $n - 1$ adrese pe plicuri, adică este egal cu $(n - 1)!$. La fel, numărul cazurilor în care adresa corectă va fi scrisă pe al doilea plic, pe al treilea plic, ..., pe al n-lea plic, va fi egal cu $(n - 1)!$. Însumînd toate cazurile în care adresa corectă va fi scrisă pe primul, pe al doilea, pe al treilea, ..., pe al n-lea plic vom obţine

$$(n - 1)! + (n - 1)! + \ldots + (n - 1)! = n(n - 1)! = n!$$

cazuri favorabile. Însă, într-un astfel de calcul, facem greşeala că socotim de mai multe ori unele cazuri în care în acelaşi timp sînt scrise adresele corecte pe mai multe plicuri (tocmai datorită acestei greşeli numărul cazurilor favorabile coincide cu numărul total al cazurilor). Ne vom strădui acum să reparăm această greşeală.

Toate cazurile, în care pe două plicuri oarecare (de exemplu, pe primul şi pe al doilea) au fost scrise adresele corecte se consideră de două ori în expresia $n(n - 1)!$: o dată printre $(n - 1)!$ cazuri în care pe primul plic este scrisă adresa corectă şi a doua oară printre $(n - 1)!$ cazuri în care pe al doilea plic este scrisă adresa corectă. Numărul cazurilor în care şi pe primul şi pe al doilea plic sînt scrise adresele corecte este, evident, egal cu numărul de moduri în care pot fi completate celelalte $n - 2$ plicuri, adică este egal cu $(n - 2)!$. Acelaşi este, evident, şi numărul cazurilor în care oricare două plicuri vor fi completate corect. Deoarece din n plicuri se pot forma

$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ perechi diferite, atunci însumînd toate cazurile în care va fi completată corect prima pereche de plicuri, a doua pereche, a treia pereche ..., a $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ pereche, vom obține în total

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)! = \frac{n!}{1\cdot 2}$$

cazuri. Fiecare din aceste cazuri este socotit de două ori în expresia $n(n-1)! = n!$. Deci numărul obținut trebuie să fie scăzut din $n!$; astfel, vom obține drept număr al cazurilor favorabile expresia

$$n! - \frac{n!}{1\cdot 2}.$$

Însă într-un astfel de calcul tot mai facem o eroare: în expresia $n! - \frac{n!}{1\cdot 2}$ se consideră o singură dată fiecare caz în care numai un singur plic este scris corect (toate aceste cazuri intră în primul termen) și o singură dată se consideră fiecare caz, în care două plicuri sînt scrise corect $\left(\text{fiecare din aceste cazuri se consideră de două ori în termenul } n! \text{ și o singură dată în termenul } \frac{n!}{1\cdot 2}\right)$; însă cazurile în care au fost completate corect mai mult de două plicuri nu sînt socotite exact aici. Să cercetăm, de exemplu, în cazul care au fost completate corect trei plicuri: primul, al doilea și al treilea. În primul termen $n!$ acest caz este considerat de trei ori: el figurează o dată printre cele $(n-1)!$ cazuri în care primul plic este completat corect, printre cele $(n-1)!$ cazuri în care al doilea plic este completat corect și printre cele $(n-1)!$ cazuri, în care al treilea plic este completat corect. În al doilea termen $\frac{n!}{1\cdot 2}$ acest caz este de asemenea, socotit de trei ori: el figurează printre cele $(n-2)!$ cazuri, în care primul și al doilea plic sînt completate corect, printre cele $(n-2)!$ cazuri, în care primul și al treilea plic sînt completate corect și printre cele $(n-2)!$ cazuri în care al doilea și al treilea plic sînt completate corect. Astfel, în diferența $n! - \frac{n!}{1\cdot 2}$ cazul a trei plicuri completate corect nu este deloc considerat. Deoarece toate aceste cazuri sînt favorabile, rezultă că trebuie să adăugăm la $n! - \frac{n!}{1\cdot 2}$ numărul total al acestor cazuri. Numărul cazurilor în care primul, al doilea și al treilea plic sînt completate corect este egal cu numărul de moduri în care pot fi completate celelalte $n-3$ plicuri, adică este egal cu $(n-3)!$. Deoarece din n plicuri se pot separa

$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ grupuri de trei plicuri, atunci, însumînd expresia $(n-3)!$ după toate aceste grupuri de trei, vom obține în total

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-3)! = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

cazuri care nu sînt luate în considerare în expresia $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2}$. Astfel, numărul corectat al cazurilor favorabile va deveni acum

$$n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

După toate cele spuse, este clar că ultima expresie pentru numărul cazurilor favorabile, de asemenea, nu este definitivă. Într-adevăr, în această expresie se consideră exact toate cazurile în care sînt completate corect unul, două sau trei din plicuri; însă cazurile în care sînt completate corect mai mult de trei plicuri nu sînt socotite exact. Să cercetăm și cazul în care sînt completate corect patru plicuri, de exemplu, primul, al doilea, al treilea și al patrulea. Acest caz este considerat de patru ori în termenul $n(n-1)! = n!$ de șase ori în termenul $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(n-2)! = \frac{n!}{1 \cdot 2}$ $\left(\text{din cele patru plicuri se pot forma } C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \text{ perechi de plicuri}\right)$ și de patru ori în termenul $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(n-3)! = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (din patru plicuri se pot forma $C_4^3 = 4$ grupuri de trei plicuri). Astfel, acest caz este considerat în expresia $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, în total de $4 - 6 + 4 = 2$ ori. Deci, pentru a socoti exact toate aceste cazuri trebuie ca din $n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ să scădem numărul lor total. Însă numărul cazurilor în care primul, al doilea, al treilea și al patrulea plicuri sînt completate corect este egal cu $(n-4)!$. Înmulțind această expresie cu numărul $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ care dă numărul grupurilor de cîte patru plicuri, vom obține expresia

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(n-4)! = \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Astfel, evaluarea următoare a numărului căutat al cazurilor favorabile o dă expresia

$$n! - \frac{n!}{1 \cdot 2} + \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Bineînțeles că această expresie nu este exactă. Însă raționamentul făcut arată că toate corecțiile succesive, care trebuie aduse, se calculează după o anumită lege simplă. Ne mai rămîne să mai verificăm valabilitatea acestei legi în cazul general. Această verificare poate fi făcută prin metoda inducției complete.

Vom presupune că după k asemenea pași am obținut expresia

$$C_n^1(n-1)!-C_n^2(n-2)!+\ldots-(-1)^k C_n^k(n-k)!=n(n-1)!-$$

$$-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)!+\ldots-(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}(n-k)!=$$

$$=n!-\frac{n!}{1\cdot 2}+\frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3}-\ldots-(-1)^k\frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$

în care sînt socotite exact toate cazurile în care nu mai mult de k plicuri sînt completate corect (considerăm că $k < n$). Vom căuta acum să evaluăm corect și acele cazuri în care $k+1$ plicuri au fost completate corect. Fiecare din aceste cazuri este socotit în primul termen $C_n^1(n-1)!$ de $C_{k+1}^1=k+1$! ori, în al doilea termen $C_n^2(n-2)!$, care este cu semnul minus, este socotit de C_{k+1}^2 ori (deoarece din $k+1$ plicuri se pot forma C_{k+1}^2 perechi), în al treilea termen $C_n^3(n-3)!$ de C_{k+1}^3 ori etc., în sfîrșit, în ultimul termen $C_n^k(n-k)!$ este socotit de $C_{k+1}^1=k+1$ ori. Deci, în toată suma acest caz este socotit de

$$C_{k+1}^1-C_{k+1}^2+C_{k+1}^3-\ldots-(-1)C_{k+1}^k$$

ori. Dar, deoarece

$$1-(C_{k+1}^2-C_{k+1}^2+C_{k+1}^3-\ldots-(-1)^k C_{k+1}^k)+(-1)^{k+1}=(1-1)^{k+1}=0$$

(v. problema 55, b), atunci

$$C_{k+1}^1-C_{k+1}^2+C_{k+1}^3-\ldots-(-1)^k C_{k+1}^k=1+(-1)^{k+1},$$

adică această sumă este egală cu 2 pentru $k+1$ par și egală cu 0 pentru $k+1$ impar. Deoarece toate aceste cazuri trebuie să le considerăm o singură dată, atunci pentru $k+1$ par numărul total al acestor cazuri trebuie să-l scădem din expresia obținută mai înainte, iar pentru $k+1$ impar trebuie să-l adăugăm la expresia obținută mai înainte. Însă numărul cazurilor în care anumite $k+1$ plicuri sînt scrise corect este egal cu $(n-k-1)!$. Înmulțind acest rezultat cu numărul $C_n^{k+1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}$, care exprimă numărul grupurilor de $k+1$ plicuri, care se pot forma din toate cele n plicuri, vom obține termenul

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{1\cdot 2\ldots(k+1)}(n-k-1)!=\frac{n!}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)}$$

care trebuie scăzut sau adăugat la expresia obținută mai înainte, după cum $k+1$ este par sau impar.

Astfel, expresia în care sînt socotite exact toate cazurile în care nu mai mult de $k + 1$ plicuri sînt scrise corect are forma

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots - (-1)^k \frac{n!}{k!} - (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!}.$$

Deci, presupunînd că după k paşi avem expresia

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots - (-1)^k \frac{n!}{k!},$$

am demonstrat că după $k + 1$ paşi vom obţine expresia

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots - (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!},$$

care în baza principiului inducţiei complete confirmă regula generală observată de noi.

Toate cazurile favorabile vor fi luate, evident, în consideraţie după n paşi, cînd vor fi socotite corect toate cazurile în care sînt completate corect nu mai mult decît n plicuri (adică orice număr de plicuri, deoarece în total sînt n plicuri). Deci, numărul total de cazuri favorabile este egal cu

$$n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Deoarece numărul total de cazuri egal posibile este aici $n!$, rezultă că probabilitatea căutată este egală cu

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Acesta este răspunsul cerut.

A doua rezolvare. Ca şi în problema cu vulpea (problema 73, *c*), probabilitatea căutată poate fi găsită ceva mai repede, dacă se calculează nu numărul total al cazurilor favorabile, ci numărul total al cazurilor nefavorabile, adică numărul cazurilor în care nici unul din plicuri nu va fi completat corect. Vom nota numărul unor astfel de cazuri, care depinde, bineînţeles, de numărul n, cu A_n. Vom numerota într-un fel oarecare plicurile de la 1 la n; adresa, pe care trebuie să o scriem pe plicul al k-lea, o vom numi adresa a k-a.

Dacă avem un caz nefavorabil, pe plicul 1 poate să fie scrisă adresa a 2-a, a 3-a, a 4-a, ..., a n-a. Să cercetăm acele cazuri nefavorabile pentru care pe plicul 1 se află scrisă adresa a 2-a. În acest caz, pe plicul al 2-lea poate fi scrisă sau adresa 1 sau una din adresele a 3-a pînă la a n-a. Ambele aceste cazuri le vom cerceta separat.

Dacă pe plicul al 2-lea este scrisă adresa 1, atunci pentru ca acest caz să fie nefavorabil, este necesar numai ca pe nici unul din celelalte $n - 2$ plicuri (de la al 3-lea pînă la al n-lea) să nu fie scrisă adresa corectă. Numărul unor astfel de cazuri, evident, este egal cu numărul cazurilor nefavorabile pentru un număr de plicuri egal cu $n - 2$, adică este egal cu A_{n-2}.

Să cercetăm acum acele cazuri în care pe plicul al 2-lea este scrisă adresa diferită de prima. Numărul unor astfel de cazuri, este, evident egal cu numărul de moduri în care pot fi completate plicurile 2, 3, 4, ..., n, scriind pe ele adresele 1, 3, 4, ..., n, astfel ca pe plicul 2 să nu fie scrisă adresa 1, pe plicul 3 să nu fie scrisă adresa 3, pe plicul 4 să nu fie scrisă adresa 4,... ..., pe plicul n să nu fie scrisă adresa n. Acest număr, evident, este egal cu numărul cazurilor nefavorabile în cazul a $n - 1$ plicuri, adică cu A_{n-1} (faptul că aici pe plicul 2 nu trebuie să fie scrisă adresa 1, iar nu adresa 2, bineînțeles, nu este esențial).

Deci, numărul total de cazuri nefavorabile în care pe plicul 1 este scrisă adresa 2 este egal cu $A_{n-1} + A_{n-2}$. Aceeași expresie o vom obține pentru numărul acelor cazuri nefavorabile în care pe plicul 1 sînt scrise adresele 3, 4, ..., n. Deoarece, în total, pe primul plic, în cazurile nefavorabile, pot fi scrise $n - 1$ adrese diferite, rezultă formula

$$A_n = (n - 1)(A_{n-1} + A_{n-2}). \qquad (*)$$

Să considerăm probabilitatea p_n ca nici unul din cele n plicuri să nu fie completat corect. Deoarece numărul total al încercărilor egal posibile ale experimentului este, în cazul nostru, egal cu ! n (v. începutul primei soluții), iar numărul cazurilor, în care nici unul din plicuri nu este completat corect este egal cu A_n, atunci

$$p_n = A_n/n!.$$

Formula (*) dă, acum,

$$\frac{A_n}{n} = (n - 1)\left(\frac{A_{n-1}}{n!} + \frac{A_{n-2}}{n!}\right) =$$

$$= (n - 1)\left(\frac{1}{n}\,\frac{A_{n-1}}{(n - 1)!} + \frac{1}{n(n - 1)}\,\frac{A_{n-2}}{(n - 2)!}\right)$$

sau

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)p_{n-1} + \frac{1}{n}\,p_{n-2};\ p_n = p_{n-1} - \frac{1}{n}\,(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

Pentru $n = 1$ va exista un singur caz favorabil, deoarece $A_1 = 0$ și $p_1 = 0$; pentru $n = 2$ din două cazuri egal posibile unul va fi favorabil și unul nu, deoarece $p_2 = 1/2$. Utilizînd formula obținută, se poate calcula succesiv

$$p_3 = p_2 - \frac{1}{3}(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3},$$

$$p_4 = p_3 - \frac{1}{4}(p_3 - p_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\cdot 3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4},$$

$$p_5 = p_4 - \frac{1}{5}(p_4 - p_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

. . . .

$$p_n = p_{n-1} - \frac{1}{n}(p_{n-1} - p_{n-2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1)} -$$

$$- \frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Deoarece numărul total al cazurilor f a v o r a b i l e este egal cu $n! - A_n$, probabilitatea, căutată în problemă, ca cel puțin unul din plicuri să fie completat corect, este egală cu

$$\frac{n! - A_n}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots - \frac{(-1)^n}{n!}.$$

b) Pentru n mare, suma

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

este foarte apropiată de suma seriei

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots$$

În problema 158 se arată că suma acestei serii este egală cu 1/e, unde e = 2,718 281 82 ... este limita expresiei $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pentru $n \to \infty$ (e este baza sistemului de logaritmi naturali; e poate fi definit ca o arie a suprafeței mărginite de o hiperbolă; v. problemele 151 și 156). Astfel, probabilitatea găsită în această problemă este apropiată de 1 — 1/e ≈ 0,632 120 56 (adică este ceva mai mică decît 2/3). (Să observăm că pentru $n = 10$ probabilitatea noastră diferă de 1 — 1/e numai cu a opta zecimală.)

79. *a*) Această problemă se rezolvă analog cu prima rezolvare a problemei 78, a). Aici se consideră experimentul în care fiecare din cei k călători își alege la întîmplare, independent de ceilalți, unul din cele n vagoane ale trenului. În acest caz, un călător are n posibilități diferite de a-și alege vagonul, doi călători au n^2 posibilități, trei călători au n^3 posibilități, ..., k călători au n^k posibilități. Astfel, numărul total de cazuri egal posibile ale experienței este, aici, egal cu n^k.

Vom calcula, acum, numărul cazurilor n e f a v o r a b i l e, adică al cazurilor în care nu toate vagoanele trenului vor fi ocupate. Numărul cazurilor în care primul vagon va fi gol este egal cu numărul modurilor de plasare a k călători în celelalte $n - 1$ vagoane, adică este egal cu $(n - 1)^k$. La fel, va fi egal cu $(n - 1)^k$ numărul cazurilor în care va fi liber al doilea, al treilea, ..., al n-lea vagon. Însumînd toate cazurile în care rămîne neocupat primul, al doilea, al treilea, ..., al n-lea vagon, vom obține

$$(n - 1)^k + (n - 1)^k + ... + (n - 1)^k = n(n - 1)^k$$

cazuri nefavorabile; însă, în acest calcul cazurile în care rămîn libere mai multe vagoane sînt socotite de mai multe ori așa că numărul $n(n - 1)^k$ este în realitate mai mare decît numărul cazurilor nefavorabile.

Vom căuta să calculăm cu cît se mărește într-un astfel de calcul numărul real al cazurilor nefavorabile. Acele cazuri în care două vagoane (de exemplu al i-lea și al j-lea) sînt neocupate este socotit în suma care ne dă numărul $n(n - 1)^k$, de două ori: o dată în termenul care dă numărul de cazuri în care este neocupat vagonul al i-lea și a doua oară în termenul care dă numărul de cazuri în care rămîne neocupat al j-lea vagon. Însă numărul de cazuri, în care și al i-lea și al j-lea vagoane rămîn libere, este egal cu numărul de moduri în care se repartizează k călători în celelalte $n - 2$ vagoane, adică este egal cu $(n - 2)^k$. Același va fi numărul de cazuri în care două vagoane oarecare vor rămîne neocupate. Deoarece două vagoane din numărul total n pot fi alese în C_n^2 moduri diferite, atunci, însumînd toate cazurile în care rămîn libere diferite perechi de vagoane, vom obține în total $C_n^2(n - 2)^k$ cazuri, socotite de două ori în expresia $n(n - 1)^k$. Astfel, într-un mod mai exact, numărul cazurilor nefavorabile poate fi transcris astfel:

$$n(n - 1)^k - C_n^2(n - 2)^k = C_n^1(n - 1)^k - C_n^2(n - 2)^k.$$

În ultima expresie toate cazurile în care vor fi libere numai un vagon sau două sînt socotite exact (adică fiecare cîte o dată), însă acele cazuri în care sînt libere, în același timp, trei vagoane, aici nu sînt socotite deloc [compară cu primul caz al problemei 78, a)]. Numărul cazurilor în care anumite trei vagoane sînt libere este egal cu numărul de moduri de repartizare a k călători în $n - 3$ vagoane, adică este egal cu $(n - 3)^k$. Deoarece trei vagoane din n pot fi alese în C_n^3 moduri diferite, atunci, însumînd $(n - 3)^k$ după toate grupurile posibile de trei vagoane, vom obține în total $C_n^3(n - 3)^k$ cazuri neluate în considerație în expresia $C_n^1(n - 1)^k - C_n^2(n - 2)^k$. Astfel, o expresie mult mai exactă a numărului de cazuri nefavorabile va fi

$$C_n^1(n - 1)^k - C_n^2(n - 2)^k + C_n^3(n - 3)^k.$$

Continuînd să raționăm în același mod (adică corectînd succesiv această expresie astfel încît să socotim corect acele cazuri în care sînt libere 4, 5, ..., $n-1$ vagoane), vom obține în definitiv, pentru numărul adevărat al cazurilor nefavorabile, formula

$$C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k + C_n^3(n-3)^k - \ldots + (-1)^n C_n^{n-1}\cdot 1^k.$$

Demonstrația riguroasă a acestei formule este foarte asemănătoare demonstrației formulei pentru numărul de cazuri favorabile obținute în prima soluție a problemei 78a); propunem acest lucru cititorului.

Ținînd seama de faptul că numărul total al tuturor cazurilor egal posibile ale experienței este, aici, egal cu $n^k = C_n^0 n^k$, obținem, pentru numărul cazurilor favorabile, formula

$$C_n^0 n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}\cdot 1^k.$$

De aici rezultă că probabilitatea căutată în problemă este egală cu

$$p = \frac{C_n^0 n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 1^k}{n^k} =$$

$$= C_n^0\cdot 1^k - C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k + C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

b) Prima rezolvare. Numărul total al cazurilor egal posibile ale experimentului în care k călători se urcă în n vagoane, într-un mod oarecare, este egal cu n^k [v. rezolvarea problemei a)]. În acest caz, k călători pot să se repartizeze în r vagoane, astfel încît nici unul din aceste vagoane să nu rămînă liber în

$$C_r^0 r^k - C_r^1(r-1)^k + C_r^2(r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1}C_r^{r-1}\cdot 1^k$$

moduri [acest rezultat a fost obținut în rezolvarea problemei a)]. Deoarece r vagoane din numărul total n pot fi alese în C_n^r moduri diferite, rezultă că numărul cazurilor favorabile este egal cu

$$C_n^r[C_r^0 r^k - C_r^1(r-1)^k + C_r^2(r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1}\cdot 1^k].$$

Astfel, probabilitatea căutată este egală cu

$$p = \frac{C_n^r[C_r^0 r^k - C_r^1(r-1)^k + C_r^2(r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1}\cdot 1^k]}{n^k}.$$

A doua rezolvare. Problema b) poate fi rezolvată și independent de problema a). Vom nota cu $p(k, r)$ numărul de moduri în care k călători pot să se repartizeze în n vagoane astfel ca să fie ocupate r vagoane (numărul n îl considerăm dat). Vom calcula cu cît este egal $p(k+1, r)$. Din fiecare repartizare a k călători din cele $p(k, r)$ moduri în care sînt ocupate r vagoane, se pot obține r repartizări de aceeași natură a $k+1$ călători, deoarece al $(k+1)$-lea călător poate fi plasat în fiecare din cele r vagoane deja ocupate. În mod analog, din fiecare dintre cele $p(k, r-1)$ repartizări a k călători, prin care sînt ocupate $r-1$ vagoane, pot fi obținute $n-r+1$ repartizări

a $k+1$ călători prin care vor fi ocupate r vagoane: pentru aceasta, trebuie numai ca ultimul călător să se plaseze în unul din cele $n-(r-1)=n-r+1$ vagoane încă libere. De aici rezultă că

$$p(k+1, r) = rp(k, r) + (n-r+1)\, p(k, r-1).$$

Pentru a elimina pe n din ultima egalitate vom introduce notația

$$\frac{p(k, r)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)} = A_k^r,$$

cu care putem scrie egalitatea sub forma

$$A_{k+1}^r = rA_k^r + A_k^{r-1}. \qquad (*)$$

În acest caz, mai trebuie să avem în vedere că

$$p(1, r) = \begin{cases} n \text{ pentru } r = 1, \\ 0 \text{ pentru } r > 1; \end{cases}$$

de aici $A_1^1 = 1$ și $A_1^r = 0$ pentru $r > 1$. Acum formula (*) ne dă posibilitatea să calculăm succesiv coeficienții A_k^r în același mod în care se calculează coeficienții binomiali cu ajutorul „triunghiului aritmetic". Anume vom forma tabelul

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

unde fiecare număr este egal cu suma dintre numărul care stă deasupra sa înmulțit cu numărul coloanei și numărul care stă în rîndul de deasupra în coloana învecinată de la stînga; dacă unul oarecare dintre aceste numere nu se află în tabel, acesta se înlocuiește cu zero. Numărul care se află la intersecția dintre rîndul k și coloana r va fi egal cu A_k^r.

Acum problema poate fi considerată ca fiind rezolvată: rezultatele obținute permit să calculăm numărul $p(k, r)$ pentru orice k și r și deci să găsim și probabilitatea căutată

$$p = p(k, r)/n^k$$

[numărul total al cazurilor egal posibile ale experimentului este egal cu n^k; v. rezolvarea problemei a)]. Se poate găsi și expresia explicită pentru probabilitatea p cu ajutorul metodei inducției matematice. Anume cu ajutorul relației (*) se poate arăta că, dacă

$$A_k^r = \begin{cases} \dfrac{C_r^0 r^k - C_r^1 (r-1)^k + \dots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} \cdot 1^k}{r!} & \text{pentru } k \geqslant 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k, \\ 0 & \text{pentru } r > k, \end{cases}$$

atunci şi A_{k+1}^r va fi determinat cu aceeaşi formulă prin înlocuirea lui k cu $k+1$; în afară de aceasta, pentru $k=1$ această formulă dă rezultatul corect

$$A_1^r = \begin{cases} 1 \text{ pentru } r=1. \\ 0 \text{ pentru } r>1. \end{cases}$$

Expresia obţinută pentru A_k^r conduce la aceeaşi valoare a probabilităţii căutate ca şi prima rezolvare a problemei [în calculul probabilităţii trebuie să folosim faptul că $p(k, r) = A_k^r n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ şi $p = p(k, r)/n^k$].

Observaţie. Din a doua rezolvare a problemei b) se poate bineînţeles obţine o nouă rezolvare a problemei a) (deoarece problema a) reprezintă un caz particular al problemei b) corespunzînd valorii $r = n$).

c) Dacă numărul de călători este mai mic decît numărul vagoanelor, probabilitatea ca în fiecare vagon să fie cel puţin un călător va fi egală cu zero. Dacă însă numărul de călători este egal cu numărul vagoanelor (şi unul şi celălalt este egal cu n), toate vagoanele vor fi ocupate, numai dacă în fiecare vagon se va urca un singur călător. În acest caz, primul călător poate ocupa oricare din cele n vagoane, al doilea — oricare din cele $n-1$ vagoane rămase libere după aşezarea primului, al treilea — oricare din cele $n-2$ vagoane rămase libere după primii doi călători etc.; astfel, aici, vor fi în total $n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$ cazuri în care toate vagoanele vor fi ocupate. Deoarece numărul total al modurilor în care se repartizează n călători în n vagoane este egal cu n^n, probabilitatea ca n călători să ocupe n vagoane ale trenului este egală cu $n!/n^n$.

Utilizînd acum formula dedusă în rezolvarea problemei a), vom obţine

$$C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^n + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k = 0 \quad \text{pentru } k < n$$

şi

$$C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^n = n!.$$

Înlocuind aici coeficienţii binomiali cu ajutorul formulei $C_n^k = C_n^{n-k}$ şi scriind termenii din partea stîngă a egalităţii în ordinea inversă, vom obţine relaţia

$$1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n = 0 \quad \text{pentru } k < n$$

şi

$$1^n C_n^1 - 2^n C_n^2 + 3^n C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} n^n C_n^n = (-1)^{n-1} n!.$$

Aceste relaţii trebuiau să fie demonstrate.

80. Să calculăm, mai întîi, numărul cazurilor egal posibile ale experimentului, adică în cîte moduri diferite pot fi aşezate pe un cerc cele 20 litere, astfel ca literele mari şi mici să alterneze. Numărul diferitelor moduri în care pot fi aşezate 10 litere mari în 10 locuri date este egal cu numărul permutărilor de 10 elemente, adică este egal cu 10!. Deoarece aici ne interesează numai ordinea în care sînt scrise literele, atunci configuraţiile obţinute una din cealaltă prin rotirea cercului, cu toate literele, în jurul centrului, cu k locuri spre dreapta trebuie considerate identice. Aici k poate fi egal cu 1, 2, 3, ..., 10; de aceea numărul configuraţiilor esenţiale diferite cu cele 10 litere mari

este egal cu $10!/10 = 9!$. Apoi, cele 10 litere mici pot fi scrise în 10 locuri între literele mari în $10!$ moduri. Astfel, obținem în total $10!\,9!$ configurații diferite în care literele mari și mici alternează; acest număr este numărul total al cazurilor egal posibile.

Să calculăm numărul cazurilor n e f a v o r a b i l e, adică al cazurilor în care cel puțin două litere identice sînt vecine. Fie a_1 numărul configurațiilor în care o literă mare dată este așezată alături de litera mică de același fel. Deoarece există în total 10 litere mari, s-ar părea că numărul total al cazurilor nefavorabile este egal cu $10a_1$. Însă această concluzie este falsă, deoarece, în acest caz, toate configurațiile în care, în același timp, m a i m u l t e litere mari sînt așezate fiecare alături de litera mică de același fel sînt considerate de mai multe ori [compară cu prima rezolvare a problemei 78, a) sau cu rezolvarea problemei 79]. Astfel, toate configurațiile în care două litere mari sînt așezate alături de literele mici de același fel sînt considerate de două ori în expresia $10\,a_1$. De aceea, dacă notăm cu a_2 numărul configurațiilor în care două litere mari date sînt așezate fiecare alături de litera mică de același fel, atunci din numărul $10a_1$ trebuie să scădem numărul $C_{10}^2 a_2$ (C_{10}^2 este numărul de moduri în care pot fi alese două litere mari din 10 astfel de litere).

În diferența $10a_1 - C_{10}^2 a_2 = C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2$ sînt socotite corect toate configurațiile în care o literă mare sau două litere mari sînt așezate alături de literele mici de același fel, însă numărul tuturor configurațiilor în care m a i m u l t d e d o u ă litere mari sînt așezate fiecare alături de litera mică de același fel nu este calculat corect. Astfel, fiecare configurație în care trei litere mari sînt așezate alături de literele mici de același fel sînt socotite de trei ori în termenul $10a_1$ și de trei ori în termenul $C_{10}^2 a_2$, astfel că în diferența $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2$ această configurație nu este considerată deloc. De aceea, la această diferență trebuie să mai adăugăm termenul $C_{10}^3 a_3$, unde a_3 este numărul configurațiilor în care t r e i litere mari date sînt așezate fiecare alături de litera mică de același fel și C_{10}^3 este numărul de moduri în care pot fi alese trei litere mari din 10 astfel de litere.

În expresia $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2 + C_{10}^3 a_3$ se consideră o singură dată toate configurațiile în care una, două sau trei litere mari sînt așezate fiecare alături de litera mică de același fel, însă configurațiile în care m a i m u l t d e t r e i litere mari sînt așezate alături de literele mici de același fel nu sînt considerate exact; de aceea, această expresie trebuie precizată mai departe. În mod analog, se demonstrează [compară cu prima rezolvare a problemei 78, a)], că numărul efectiv de configurații, în care c e l p u ț i n u n a dintre literele mari este așezată alături de litera mică de același fel, este exprimat prin formula

$$C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2 + C_{10}^3 a_3 - C_{10}^4 a_4 + C_{10}^5 a_5 - C_{10}^6 a_6 + C_{10}^7 a_7 - C_{10}^8 a_8 + C_{10}^9 a_9 - C_{10}^{10} a_{10},$$

unde a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$, este numărul configurațiilor în care k l i t e r e m a r i d a t e s î n t a ș e z a t e a l ă t u r i d e l i t e r e l e m i c i d e a c e l a ș i f e l.

Acum ne-a mai rămas numai să determinăm numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Numărul a_1 de configurații în care o literă mare dată este așezată alături de litera mică de același fel, de exemplu, A cu a sînt așezate alături, se determină în modul următor. Vom așeza pe cerc, într-un mod oarecare, 18 litere fără A

şi a, astfel încît literele mari şi mici să alterneze; evident, acest lucru se poate face în $9!\,8!$ moduri diferite (compară cu demonstraţia faptului că numărul total al configuraţiilor posibile este egal cu $10!\,9!$). După aceea vom scrie, undeva între două litere scrise mai înainte, litera A; aceasta se poate face în 18 moduri diferite, deoarece între 18 litere sînt 18 intervale. În sfîrşit, vom scrie litera a alături de A, anume între A şi litera m a r e învecinată cu A. De aici rezultă că

$$a_1 = 9!\cdot 8!\cdot 18; \quad C_{10}^1 a_1 = 10!\cdot 9!\cdot 2.$$

În mod analog, pentru a determina numărul a_2, vom scrie pe cerc 16 litere fără A, B, a şi b; aceasta se poate face în $8!\cdot 7!$ moduri diferite. După aceea, A poate fi introdus în 16 locuri diferite, iar apoi B în 17 locuri diferite. În sfîrşit, vom scrie a şi b respectiv alături de A şi B, astfel încît literele mari şi mici să alterneze; nu este greu de văzut că aceasta se poate face într-un singur mod (dacă A şi B nu sînt aşezate alături, atunci a şi b trebuie înscrise între aceste litere şi literele mari vecine; dacă A şi B sînt aşezate alături şi, de exemplu, A este aşezată între două litere mari, atunci litera a trebuie scrisă între A şi litera mare învecinată cu A, iar b între A şi B). De aici rezultă că

$$a_2 = 8!\cdot 7!\cdot 16\cdot 17; \quad C_{10}^2 a_2 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot 8!\cdot 7!\cdot 16\cdot 17 = 10!\cdot 8!\cdot 17.$$

Tot astfel se determină toate numerele a_k, unde $k = 1, 2, \ldots, 9$. Pentru a găsi numărul a_k, vom scrie pe cerc $20 - 2k$ litere (fără k litere mari şi fără tot atîtea litere mici de acelaşi fel); aceasta se poate face în $(10 - k)!\times$ $\times (10 - k - 1)!$ moduri. După aceea vom scrie între aceste litere cele k litere mari excluse la început; aceasta se poate face în $(20 - 2k)(20 - 2k + 1)\ldots$ $\ldots (20 - 2k + k - 1)$ moduri. În sfîrşit, vom scrie celelalte k litere mici alături respectiv de cele mari astfel ca literele mari şi mici să alterneze; nu este greu de văzut că aceasta se poate face într-un singur mod. Astfel, în definitiv, obţinem

$$a_k = (10 - k)!\,(10 - k - 1)!\,(20 - 2k)\,(20 - 2k + 1)\ldots(20 - k - 1).$$

Deci,

$$a_3 = 7!\cdot 6!\cdot 14\cdot 15\cdot 16;$$

$$C_{10}^3 a_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 7!\cdot 6!\cdot 14\cdot 15\cdot 16 = 10!\cdot 8!\cdot 10;$$

$$a_4 = 6!\cdot 5!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15;$$

$$C_{10}^4 a_4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6!\cdot 5!\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15 = 10!\cdot 7!\cdot \frac{65}{2};$$

$$a_5 = 5!\cdot 4!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14;$$

$$C_{10}^5 a_5 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 5!\cdot 4!\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14 = 10!\cdot 7!\cdot \frac{143}{15};$$

$$a_6 = 4!\cdot 3!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13;$$

$$C_{10}^6 a_6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot 4!\cdot 3!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13 = 10!\cdot 4!\cdot 429;$$

$$a_7 = 3!\cdot 2!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12;$$

$$C_{10}^7 a_7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot 3!\cdot 2!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 10!\cdot 4!\cdot 66;$$

$$a_8 = 2!\cdot 1!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11;$$

$$C_{10}^8 a_8 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\cdot 2!\cdot 1!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 = 10!\cdot 165;$$

$$a_9 = 1!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;$$

$$C_{10}^9 a_9 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot 1!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 10!\cdot 10.$$

Pentru determinarea numărului a_{10} al configurațiilor în care toate literele mari sînt așezate alături de literele mici de același fel, vom proceda în modul următor. Vom scrie mai întîi 10 litere mari; după cum s-a mai arătat aceasta se poate face în 9! moduri esențiale diferite. După aceea, toate literele mici pot fi scrise alături de literele mari respective în două moduri (așa ca fiecare literă mică să fie așezată la stînga sau la dreapta literei mari respective). Astfel,

$$a_{10} = 2\cdot 9!;\quad C_{10}^{10} a_{10} = 2\cdot 9!.$$

În definitiv, pentru numărul cazurilor f a v o r a b i l e obținem $10!\cdot 9! - 10!\cdot 9!\cdot 2 + 10!\cdot 8!\cdot 17 - 10!\cdot 8!\cdot 10 + 10!\cdot 7!\cdot \frac{65}{2} - 10!\cdot 7!\cdot \frac{143}{15} + 10!\cdot 4!\cdot 429 - 10!\cdot 4!\cdot 66 + 10!\cdot 165 - 10!\cdot 10 + 2\cdot 9! = 10!\left(-9! + 8!\cdot 7 + 7!\cdot\frac{689}{30} + 4!\cdot 363 + 155\right) + 2\cdot 9! = 9!\cdot 439\,792$ și, deci, probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{9!\cdot 439\,792}{10!\cdot 9!} = \frac{439\,792}{10!} = \frac{439\,792}{3\,628\,800} \approx 0{,}12.$$

81. a) P r i m a r e z o l v a r e. Experimentul considerat în problemă constă în aceea că $n + m$ cumpărători, dintre care n au monede de cinci lei și m numai de zece lei, se așază într-un mod oarecare la rînd pentru bilete. Numărul total al cazurilor egal posibile ale acestui experiment este, evident, egal cu numărul de moduri de așezare a m cumpărători, care au numai monede de zece lei în rîndul format de $n + m$ oameni, adică este egal cu C_{n+m}^m. Vom reprezenta aceste C_{n+m}^m posibilități cu ajutorul celor mai scurte drumuri în

număr de C_{n+m}^{m} care unesc intersecţiile (0, 0) şi (n, m) ale oraşului, aşa cum am făcut mai înainte (v. p. 20). Anume, vom duce în plan, pornind de la punctul $A_0 = (0, 0)$, segmentul A_0A_1 de lungime 1, orizontal (de la stînga spre dreapta) sau vertical (de jos în sus), după cum primul cumpărător a avut monede de cinci lei sau numai de zece lei. Din punctul A_1 vom duce segmentul A_1A_2 de lungime 1, orizonal sau vertical după cum al doilea cumpărător a avut sau nu monede de cinci lei. Din punctul A_2 vom duce segmentul A_2A_3 de lungime 1, orizontal sau vertical după cum al treilea cumpărător a avut sau nu monede de cinci lei etc. (fig. 71, *a*). În acest caz, fiecăreia din cele C_{n+m}^{m} posibilităţi de aşezare în rînd a $n + m$ cumpărători îi va corespunde o linie frîntă $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ formată din n segmente orizontale şi m segmente verticale. Toate aceste linii frînte se vor sfîrşi în punctul $A_{n+m} = (n, m)$ situat cu n unităţi la dreapta şi cu m unităţi mai sus de puntul A_0 şi vor da toate cele mai scurte drumuri posibile care unesc intersecţiile $A_0 = (0, 0)$ şi $A_{n+m} = (n, m)$.

Vom determina acum numărul de cazuri în care nici unuia din cumpărători nu i se va întîmpla să aştepte restul. Pentru ca aceasta să aibă loc neapărat, este necesar ca în faţa fiecăruia dintre cumpărători să stea un număr de persoane, care au monede de cinci lei, nu mai mic decît numărul acelora care au numai monede de zece lei. Geometric, aceasta înseamnă că fiecărui caz favorabil îi corespunde o linie frîntă $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$, situată în întregime mai jos de dreapta l, care trece prin punctul A_0 sub unghiul de 45° faţă de orizontală (v. fig. 71, *a*); în particular, primul segment al unei astfel de linii frînte trebuie să fie orizontal.

De aici rezultă că în fiecare linie frîntă, care corespunde unui caz nefavorabil, trebuie să intersecteze dreapta l sau, ceea ce este acelaşi lucru, trebuie să aibă vîrfurile pe dreapta l_1, paralelă cu dreapta l şi obţinută din l printr-o translaţie în sus cu o distanţă egală cu 1 (fig. 71, *b*). Pentru $m > n$, toate liniile noastre frînte vor avea, neapărat, vîrfurile pe dreapta l_1: în acest caz punctul A_{n+m} se află mai sus de dreapta l. Vom presupune că $m \leqslant n$ şi vom

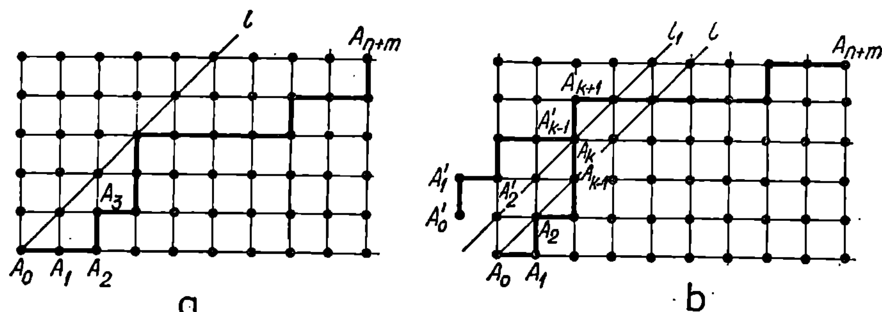


Fig. 71

determina numărul liniilor frînte care au vîrfurile pe dreapta l_1. Fie A_k primul vîrf al unei astfel de linii frînte $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$, care aparţine dreptei l_1. Vom lua simetrica părţii $A_0A_1 \dots A_k$ a acestei linii frînte faţă de dreapta l_1. Se obţine, în acest caz, o nouă linie frîntă $A'_0A'_1 \dots A'_{k-1}A_kA_{k+1} \dots A_{n+m}$, care uneşte

punctul A_{n+m} cu punctul A'_0 simetricul lui A_0 față de l_1, adică situat cu o unitate mai la stînga și cu o unitate mai sus de punctul A_0 (fig. 71, *b*). Mai departe, pentru $m \leqslant n$ fiecare cea mai scurtă linie frîntă, care unește punctele A'_0 și A_{n+m} va intersecta neapărat dreapta l_1. Dacă A_k este primul punct de intersecție a unei linii frînte $A'_0A'_1 \ldots A'_{k-1}A_kA_{k+1} \ldots A_{n+m}$ cu dreapta l_1, atunci luînd simetrica părții $A'_0A'_1 \ldots A'_{k-1}A_k$ a acestei linii frînte față de l_1, vom obține linia frîntă $A_0A_1 \ldots A_kA_{k+1} \ldots A_{n+m}$, care unește A_0 cu A_{n+m} și care are vîrfurile pe dreapta l_1. Astfel, pentru $m \leqslant n$ numărul liniilor frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} și care au vîrfurile pe dreapta l_1 este egal cu numărul tuturor liniilor frînte care unesc A'_0 cu A_{n+m}. Însă aceste ultime linii frînte sînt formate din $n+1$ segmente orizontale și $m-1$ segmente verticale; numărul lor este egal cu C_{n+m}^{m-1}.

Deci, în problema considerată, numărul total al cazurilor egal posibile este egal cu C_{n+m}^{m}, iar numărul cazurilor nefavorabile este egal cu numărul total al cazurilor pentru $m > n$ și egal cu C_{n+m}^{m-1} pentru $m \leqslant n$. De aici rezultă că numărul cazurilor favorabile este respectiv egal cu zero sau cu

$$C_{n+m}^{m} - C_{n+m}^{m-1} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} - \frac{(n+m)!}{(n+1)!\,(m-1)!} =$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!(m-1)!}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!}.$$

Deci, probabilitatea căutată ca nici un cumpărător să nu fie nevoit să aștepte restul este egală cu zero pentru $m > n$ (ceea ce este clar după însăși natura întrebării) și este egală pentru $m \leqslant n$ cu

$$\frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!} : C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{(n+1)!\,m!} : \frac{(n+m)!}{n!\,m!} =$$

$$= \frac{n-m+1}{n+1}$$

R e z o l v a r e a a d o u a. Cunoscînd răspunsul la problemă (acest răspuns poate fi ghicit după un calcul direct al cazurilor favorabile pentru cîteva cazuri simple cu valori nu prea mari ale lui n și lui m), veridicitatea lui în cazul general se demonstrează cel mai simplu prin metoda inducției matematice. Într-adevăr, fie $0 < m \leqslant n$ (pentru $m = 0$ și pentru $m > n$ răspunsul la problemă este evident). Să presupunem cunoscut că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc punctul A_0 cu punctul $A_{n+m-1}^{(1)} = (n, m-1)$, situat cu n unități mai la dreapta și cu $m-1$ unități mai sus decît A_0, și care nu are vîrfuri pe dreapta l_1 (v. fig. 71, *b* și prima rezolvare a problemei), este egal cu $\frac{n-(m-1)+1}{n+1} C_{n+m-1}^{m}$ și că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc punctul A_0 cu punctul $A_{n+m-1}^{(2)} = (n-1, m)$, situat cu $n-1$ unități mai la dreapta și cu m unități mai sus decît A_0, și care nu au vîrfuri pe l_1, este egal cu $\frac{(n-1)-m+1}{(n-1)+1} C_{n+m-1}^{m}$. Deoarece orice cea mai

scurtă linie frîntă care unește A_0 cu $A_{n+m} = (n, m)$ trece, neapărat, sau prin punctul $A^{(1)}_{n+m-1}$ sau prin punctul $A^{(2)}_{n+m-1}$, rezultă că numărul unor astfel de linii frînte care nu au vîrfuri pe l_1 este egal cu

$$\frac{n-(m-1)+1}{n+1}C^{m-1}_{n+m-1} + \frac{(n-1)-m+1}{(n-1)+1}C^{m}_{n+m-1} =$$

$$= \frac{n-m+2}{n+1}\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} + \frac{n-m}{n}\cdot\frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} =$$

$$= \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\left(\frac{n-m+2}{n+1} + \frac{n-m}{m}\right) =$$

$$= \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\cdot\frac{(n+m)(n-m+1)}{(n+1)m} = \frac{n-m+1}{n+1}C^{m}_{n+m}.$$

Deoarece pentru $m = 0$, n oarecare și pentru $m = n + 1$, n oarecare, expresia obținută pentru numărul celor mai scurte linii frînte care unesc pe A_0 cu A_{n+m} și care nu au vîrfuri pe l_1 este evident adevărată (în primul din aceste cazuri aceasta se transformă în $C^n_n = 1$, iar în a doua în zero), atunci, conform principiului inducției, se poate deduce de aici în mod succesiv că această formulă este adevărată pentru $m = 1$, n oarecare; $m = 2$, n oarecare; $m = 3$, n oarecare etc., adică este adevărată pentru orice m și n, $0 \leqslant m \leqslant n + 1$.

A treia rezolvare[1]. Trebuie să determinăm probabilitatea ca în fața fiecăruia din cumpărătorii din rînd să stea nu mai puține persoane care au monede de cinci lei, decît cele care au monede de zece lei. Vom rezolva, mai înainte, următoarea problemă asemănătoare cu aceasta, însă care nu este identică cu ea: să se determine probabilitatea ca în fața fiecărui cumpărător să stea mai multe persoane care au monede de cinci lei decît cele ce nu le au. Mai departe, se va arăta că din soluția acestei probleme noi poate fi dedusă ușor și soluția problemei care ne interesează [2].

Este clar că pentru $n \leqslant m$ probabilitatea căutată este egală cu zero. Vom considera $n > m$ și vom cerceta o așezare în rînd a $n + m$ cumpărători (n avînd monede de cinci lei și m numai monede de zece lei). Din această așezare, se pot obține $n + m - 1$ noi așezări în modul următor: mai întîi vom trece pe ultimul loc cumpărătorul care stă în primul rînd (prima așezare nouă), apoi în noul rînd vom trece primul cumpărător (adică pe cumpărătorul care era mai înainte al doilea) pe ultimul loc (a doua așezare nouă) etc. pînă cînd pe primul loc se va afla cumpărătorul care inițial stătea ultimul [a $(n+m-1)$-a așezare nouă]. În definitiv, ținînd seama de așezarea inițială, vom obține $n + m$ așezări ale cumpărătorilor în rînd. Acum se va arăta că dintre aceste $n + m$ așezări $n - m$ au proprietatea că în fața fiecărui cumpărător stă un

---

[1] Această rezolvare este ceva mai lungă decît cele precedente însă este mult mai elementară (nu presupune nici un fel de cunoștințe care ies din cadrul clasei a opta a școlii generale). În plus această rezolvare este foarte comodă pentru generalizări [v. prima rezolvare a problemei c)].

[2] Este adevărată, bineînțeles, și reciproca: din soluția problemei 81 a) rezultă ușor și soluția problemei formulată aici (compară cu partea finală a rezolvării de față).

număr mai mare de persoane care au monede de cinci lei, decît cele care au doar monede de zece lei.

Vom utiliza aceeaşi reprezentare sugestivă a diferitelor aşezări a $n+m$ oameni în rînd cu ajutorul liniilor frînte ca şi în prima soluţie a problemei

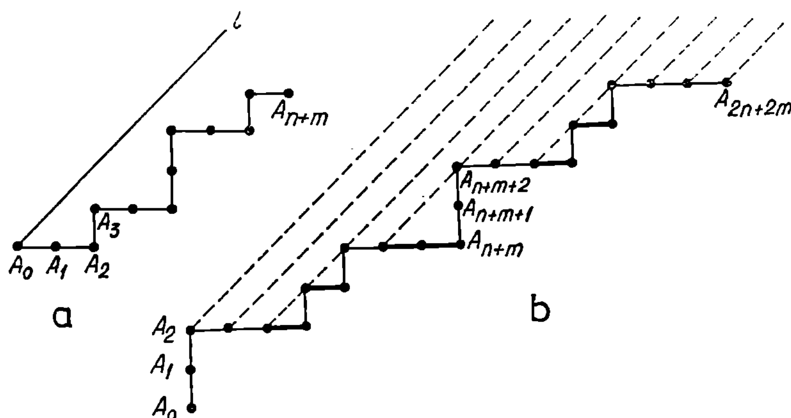


Fig. 72

(v. p. 199 şi fig. 71, *a*). În acest caz, fiecarei aşezări îi va corespunde cîte o linie frîntă $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m-1}A_{n+m}$, formată din n segmente orizontale şi m segmente verticale (fig. 72, *a*). Rîndurilor în care în faţa fiecărui cumpărător stau m a i m u l ţ i cumpărători care au monede de cinci lei, decît cumpărători care au numai monede de zece lei le vor corespunde linii frînte, în care în faţa fiecărui segment sînt aşezate m a i m u l t e segmente orizontale decît cele verticale, adică linii frînte situate în întregime sub dreapta l, care trece prin punctul A_0 sub un unghi de 45° faţă de orizontală şi care nu au pe această dreaptă alte vîrfuri în afară de A_0. Este comod să reprezentăm linia frîntă $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ ca o scară care duce din punctul A_0 în punctul A_{n+m} şi care este formată dintr-un anumit număr de trepte de diferite lăţimi şi de diferite înălţimi (lăţimea totală a tuturor treptelor scării este egală cu n unităţi, iar înălţimea totală cu m unităţi). Dacă vom lumina această scară de sus cu un fascicul de raze paralele care cad sub unghiul de 45° faţă de orizontală, aşezările favorabile ale cumpărătorilor, din punctul de vedere al enunţului problemei, vor corespunde scărilor în care baza A_0 va fi luminată (nu se află în umbra aruncată de treptele scării).

Pentru reprezentarea tuturor celor $n+m$ aşezări obţinute din una prin trecerea primului cumpărător în coada rîndului, vom adăuga la capătul A_{n+m} al liniei frînte $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ linia frîntă $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2} \dots A_{2n+2m}$, care reproduce exact pe $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ (fig. 72, b). Într-un astfel de caz, celor $n+m$ aşezări le vor corespunde liniile frînte formate din $n+m$ segmente de lungime 1 şi care încep respectiv în punctele A_0, A_1, A_2, ..., A_{n+m-1} (deci, care se termină în punctele A_{n+m}, A_{n+m+1}, A_{n+m+2}, ..., $A_{2n+2m-1}$). Dacă acum linia frîntă obţinută $A_0A_1A_2 \dots A_{2n+2m}$ va fi luminată de sus cu un fascicul de raze paralele, care cad sub un unghi de 45° faţă de orizontală, atunci la aşezările cumpărătorilor pentru care în faţa fiecăruia dintre ei stau mai mulţi

cumpărători care au monede de cinci lei decît cumpărătorii care au numai monede de zece lei, le vor corespunde liniile frînte $A_kA_{k+1}A_{k+2} \dots A_{n+m+k}$, care încep cu punctele A_k[1] luminate (care nu se află în umbră). Astfel, trebuie doar să numărăm cîte din punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n+m-1}$ nu se vor găsi în umbră.

Pot fi luminate doar acele din punctele $A_0, A_1, \dots, A_{n+m-1}$, pentru care segmentul A_kA_{k+1}, care urmează după ele, este orizontal — numărul acestor puncte va fi acelaşi ca numărul segmentelor orizontale, adică n. Însă nu toate aceste n puncte vor fi luminate. Pe unele laturi orizontale ale liniei frînte $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ segmentele verticale vor arunca umbră. Se poate ca nu toate cele m segmente verticale de lungime 1, care formează $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$, să arunce o astfel de umbră — unele dintre ele pot arunca umbra mai la stînga punctului A_0 (de exemplu în fig. 72, b astfel de segmente vor fi segmentele A_0A_1 și A_1A_2). Însă, deoarece linia frîntă $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2} \dots A_{2n+2m}$ reproduce exact pe $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$, atunci tot atîtea segmente verticale ale liniei, frînte $A_{n+m}A_{n+m+1}A_{n+m+2} \dots A_{2n+2m}$ vor arunca umbra la stînga punctului A_{n+m}, adică pe laturile orizontale ale liniei frînte $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$. Deci, în definitiv pe laturile orizontale ale liniei frînte $A_0A_1A_2 \dots A_{n+m}$ aruncă umbră exact m segmente verticale de lungime 1. Și, deoarece razele cad sub un unghi de 45°, umbra celor m segmente verticale va acoperi exact m segmente orizontale de lungime 1, adică exact m dintre cele n puncte dintre punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n+m-1}$, după care urmează segmentele orizontale. (Astfel, în fig. 72, b avem $n = 7$, $m = 4$ și vor fi luminate doar $7 - 4 = 3$ puncte.) Cu aceasta este demonstrat în întregime faptul că pentru $n > m$, din $n + m$ așezări ale cumpărătorilor în rînd, care se obțin dintr-una din așezări prin trecerea succesivă a primului cumpărător la coadă, exact $n - m$ au proprietatea că în fața fiecăruia din cumpărători stau mai multe persoane care au monede de cinci lei decît persoane care au monede de zece lei.

Să observăm că cele $n + m$ așezări, care se obțin dintr-una prin trecerea primului cumpărător pe ultimul loc, nu vor fi obligatoriu toate diferite. Dacă n și m nu sînt prime între ele, se poate întîmpla ca rîndul de $n + m$ persoane să se compună din mai multe părți, care se reproduc exact (de exemplu, șase cumpărători care au monede de cinci lei și trei cumpărători care au numai monede de zece lei pot fi așezați în următoarea ordine: 5 10 5 5 10 5 5 10 5; numerele 5 și 10 înseamnă aici cumpărătorii care au monede de cinci lei și care au numai monede de zece lei); într-un astfel de caz, trecînd de mai puțin de $n + m$ ori (în exemplul nostru de trei ori) pe primul cumpărător la coadă, vom căpăta o așezare, care nu diferă de cea inițială. Este însă ușor de văzut că în acest caz printre $n + m$ așezări fiecare din așezările d i f e r i t e (astfel de așezări vor fi mai puține decît $n + m$) se repetă de un număr egal de ori (în exemplul nostru $n + m = 9$ și printre cele nouă așezări există trei diferite, din care fiecare se repetă de trei ori).

---

[1] Dacă umbra treptelor liniei frînte $A_kA_{k+1}A_{k+2} \dots A_{n+m+k}$ nu va acoperi punctul A_k (aceasta înseamnă că linia frîntă $A_kA_{k+1}A_{k+2} \dots A_{n+m+k}$ corespunde unei așezări favorabile a cumpărătorilor din punctul de vedere al enunțului problemei), atunci nici umbra treptelor situate între punctele A_{n+m+k} și A_{2n+2m} nu va putea să acopere pe A_k. Aceasta rezultă din faptul că linia frîntă $A_{n+m+k}\ A_{n+m+k+1} \dots A_{2n+2m}$ este identică cu linia frîntă $A_kA_{k+1} \dots A_{n+m}$.

Astfel, raportul dintre numărul așezărilor favorabile din punctul de vedere al problemei considerate și numărul total al așezărilor diferite va fi același și pentru toate cele $n + m$ așezări, adică este egal cu $(n-m)/(n+m)$. Deci, pentru $n > m$ toate așezările posibile a $n + m$ cumpărători într-un rînd pot fi totdeauna împărțite în grupuri, astfel ca pentru fiecare grup raportul dintre numărul așezărilor favorabile și numărul total al așezărilor să fie egal cu $(n - m)/(n + m)$. De aici rezultă că la o așezare întîmplătoare în rînd a n cumpărători, care au monede de cinci lei și a m cumpărători care au numai monede de zece lei, probabilitatea ca în fața fiecărei persoane să se afle mai mulți oameni care au monede de cinci lei decît cei care au doar monede de zece lei va fi egală cu $(n - m)/(n + m)$ (aici se consideră că $n > m$; pentru $n \leqslant m$ această probabilitate este egală cu zero). Cu aceasta, problema ajutătoare formulată la începutul soluției de față este rezolvată în întregime.

Vom trece acum la rezolvarea problemei de bază, adică la determinarea probabilității ca în fața fiecărui cumpărător în rînd să stea nu mai puține persoane care au monede de cinci lei, decît cele care au numai monede de zece lei. Să cercetăm în acest scop toate așezările posibile în rînd a $n + 1$ persoane care au monede de cinci lei și a m persoane care au numai monede de zece lei. Numărul total al unor astfel de moduri de așezare îl vom nota cu $N_{n+1, m}$. Numărul modurilor de așezare, în care pe primul loc în rînd se află un cumpărător care are o monedă de cinci lei, este egal cu numărul modurilor de așezare în rînd a celorlalți n cumpărători care au monede de cinci lei și m cumpărători care nu le au — este firesc să notăm acest număr cu $N_{n, m}$. Raportul $N_{n, m}/N_{n+1, m}$ este egal cu probabilitatea ca pe primul loc în rînd să stea un cumpărător care are o monedă de cinci lei. Și deoarece pe primul loc poate să se afle, cu aceeași probabilitate, oricare din cumpărători, această ultimă probabilitate este egală cu raportul dintre numărul cumpărătorilor care au monede de cinci lei și numărul total al cumpărătorilor; deci $\frac{N_{n, m}}{N_{n+1, m}} = \frac{n+1}{n+m+1}$ [1]. Vom nota acum cu $M_{n+1, m}$ numărul modurilor de așezare în rînd a $n + m + 1$ cumpărători, astfel ca în fața fiecărui cumpărător să stea mai multe persoane care au numai monede de zece lei; atunci, așa cum s-a mai arătat

$$\frac{M_{n+1, m}}{N_{n+m, m}} = \begin{cases} \dfrac{n-m+1}{n+m+1} & \text{pentru } n+1 > m, \\ 0 & \text{pentru } n+1 \leqslant m. \end{cases}$$

Însă pentru ca într-un rînd format din $n + m + 1$ persoane să stea în fața fiecărui cumpărător mai multe persoane care au monede de cinci

[1] Această concluzie rezultă imediat și din formula care dă numărul combinărilor. Într-adevăr, evident, $N_{n+1, m} = C^m_{n+m+1} = \frac{(n+m+1)!}{(n+m)!\,m!}$ (v. începutul primei rezolvări) și $N_{n, m} = C^m_{n+m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$; înseamnă că $\frac{N_{n, m}}{N_{n+1, m}} = \frac{n+1}{n+m+1}$.

lei, decît cele care au numai monede de zece lei, este necesar ca pe primul loc să se afle o persoană care să aibă o monedă de cinci lei și ca de cealaltă parte a rîndului (format din $n + m$ persoane) în fața fiecărui cumpărător să stea n u m a i p u ț i n e persoane care au monede de cinci lei, decît cei care nu au. Astfel, $M_{n+1, m}$ este egal cu numărul modurilor de așezare în rînd a n cumpărători care au monede de cinci lei și a m cumpărători care au numai monede de zece lei, în așa fel ca în fața fiecărui cumpărător să stea n u m a i p u ț i n e persoane care au monede de cinci lei, decît cele ce nu au. Deci, probabilitatea căutată în problema a) este egală cu

$$\frac{M_{n+1, m}}{N_{n, m}} = \frac{M_{n+1, m}}{N_{n+1, m}} \cdot \frac{N_{n+1, m}}{N_{n, m}} = \frac{M_{n+1, m}}{N_{n+1, m}} \cdot \frac{n+m+1}{n+1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-m+1}{n+1} & \text{pentru } n \geqslant m, \\ 0 & \text{pentru } n < m. \end{cases}$$

O b s e r v a ț i e. Pentru cazul particular $n = m$ va fi dată încă o rezolvare (a patra) a acestei probleme, în observația de la sfîrșitul problemei 82, a).

b) P r i m a r e z o l v a r e. Problema b) poate fi rezolvată în mod analog ca în prima rezolvare a problemei a). Existența în casă a p monede de cinci lei la începutul vînzării biletelor face posibil să se dea restul în toate cazurile în care, în fața fiecărui cumpărător, numărul persoanelor care au numai monede de zece lei este mai mare decît numărul celor care au monede de cinci lei, cu nu mai mult decît p. Geometric, aceasta înseamnă că liniile frînte care corespund cazurilor favorabile sînt situate în întregime sub dreapta l_p, paralelă cu dreapta l și obținută din aceasta printr-o translație cu p unități în sus (fig. 73). Cu alte cuvinte, liniile frînte, corespunzătoare cazurilor nefavorabile, trebuie să aibă puncte situate pe dreapta l_{p+1}, paralelă cu l_p și obți-

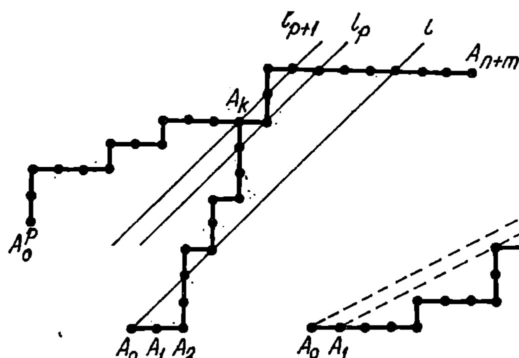


Fig. 73

Fig. 74

nută din l_p printr-o translație cu distanța 1 în sus, adică pe dreapta obținută din l printr-o translație cu $p + 1$ unități în sus (v. fig. 73, unde s-a luat $p = 3$). Este clar că pentru $m > n + p$, toate liniile frînte, care corespund diferitelor

cazuri egal posibile ale experimentului vor avea vîrfurile pe l_{p+1}, astfel încît probabilitatea căutată va fi aici egală cu zero. Dimpotrivă, pentru $m \leqslant p$ toate cazurile vor fi egal posibile și probabilitatea căutată va fi egală cu unitatea.

Vom considera, acum, $m \leqslant n + p$, însă $m \geqslant p + 1$. Ca și la rezolvarea problemei 81, a), se demonstrează că numărul liniilor frînte corespunzătoare cazurilor nefavorabile va fi egal cu numărul liniilor frînte care unesc punctul A_{n+m} cu punctul A_0^p, simetricul lui A_0 față de dreapta l_{p+1} (adică așezat cu $p + 1$ unități mai la stînga și cu $p + 1$ unități mai sus decît punctul A_0). De aici rezultă că numărul total al cazurilor nefavorabile, aici, este egal cu C_{n+m}^{m-p-1}, iar numărul total al cazurilor favorabile este egal cu $C_{n+m}^m - C_{n+m}^{m-p-1}$. Astfel, pentru $n + p \geqslant m \geqslant p + 1$, probabilitatea ca nici unul din cumpărători să nu fie nevoit să aştepte restul este egală cu

$$\frac{C_{n+m}^m - C_{n+m}^{m-p-1}}{C_{n+m}^m} = 1 - \frac{(m+n)!}{(m-p-1)!\,(n+p+1)!} : \frac{(m+n)!}{m!\,n!} =$$

$$= 1 - \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}.$$

A doua rezolvare. Dacă a fost ghicit răspunsul la problemă, valabilitatea lui poate fi demonstrată prin metoda inducției complete în mod cu totul analog cu cel din a doua soluție a problemei a). Într-adevăr, fie $n + p \geqslant m \geqslant p + 1$ și să presupunem demonstrat faptul că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu $A_{n+m-1}^{(1)}$ [v. a doua soluție a problemei a)] și care nu au vîrfuri pe l_{p+1} este egal cu $\left[1 - \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p-1)}{(n+1)\cdot(n+2)\dots(n+p+1)}\right] C_{n+m-1}^{m-1}$; presupunem de asemenea, că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu $A_{n+m-1}^{(2)}$ și care nu au vîrfuri pe l_{p+1} este egal cu $\left[1 - \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{n(n+1)\dots(n+p)}\right] C_{n+m-1}^m$. Atunci, pentru numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} și care nu au vîrfuri pe l_{p+1}, vom obține formula

$$\left[1 - \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)]}\right] C_{n+m-1}^{m-1} +$$

$$+ \left[1 - \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{n(n+1)\dots(n+p)}\right] C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} +$$

$$+ \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} - \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)} \cdot \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} -$$

$$- \frac{m(m-1)\dots(m-p)}{n(n+1)\dots(n+p)} \cdot \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,m!} = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!\,(m-1)!}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right] -$$

Deoarece pentru $m = p$, n oarecare şi pentru $m = n + p + 1$, n oarecare, formula obţinută este evident valabilă, atunci, utilizînd principiul inducţiei complete, este uşor să deducem de aici că ea este valabilă pentru orice n şi m, $p < m \leq n + p + 1$.

Observaţie. În cazul particular $p = 1$, soluţia acestei probleme rezultă imediat şi din soluţia a treia a problemei a). Într-adevăr, să considerăm toate modurile posibile de aşezare în rînd a $n + 2$ persoane care au monede de cinci lei şi a m persoane care au numai monede de zece lei; numărul total al acestor moduri de aşezări diferiţe îl vom nota cu $N_{n+2,\,m}$. Numărul acelor moduri de aşezare, pentru care şi pe primul şi pe al doilea loc stau cumpărători care au monede de cinci lei, este egal, evident, cu numărul modurilor diferite de aşezare în rînd a celorlalţi n cumpărători care au monede de cinci lei şi m cumpărători care au numai monede de zece lei, adică este egal cu $N_{n,\,m}$. Raportul $N_{n,\,m}/N_{n+2,\,m}$ este egal cu probabilitatea ca în rîndul format din $n + m + 2$ oameni pe primele două locuri să stea cumpărători care au monede de cinci lei; deoarece, în general. pe primul loc poate să se afle cu aceeaşi probabilitate oricare dintre cele $n + m + 2$ persoane, iar pe al doilea — oricare dintre celelalte $n + m + 1$ persoane, iar modurile favorabile de aşezare vor fi acelea în care pe primul loc stă unul din cei $n + 2$ cumpărători care au monede de cinci lei iar pe al doilea — unul din ceilalţi $n + 1$ astfel de cumpărători, atunci

$$\frac{N_{n,\,m}}{N_{n+2,\,m}} = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+m+1)(n+m+2)}\ ^{1)}.$$

Fie acum $M_{n+2,\,m}$ numărul modurilor de aşezare a celor $n + m + 2$ cumpărători astfel că în faţa fiecăruia dintre ei să se afle mai multe persoane care au monede de cinci lei, decît cele care au doar monede de zece lei; atunci conform celor demonstrate în a doua soluţie a problemei 81, a),

$$\frac{M_{n+2,\,m}}{N_{n+2,\,m}} = \begin{cases} \dfrac{n-m+2}{n+m+2} & \text{pentru } n+2 > m, \\ 0 & \text{pentru } n+2 \leq m. \end{cases}$$

Însă, pentru ca în rîndul format din $n + m + 2$ persoane în faţa fiecăruia să stea mai multe persoane care au monede de cinci lei, decît cele care au doar monede de zece lei, este necesar ca pe primele două locuri să stea persoane care au monede de cinci lei (astfel condiţia dată nu va fi îndeplinită încă de la al treilea cumpărător) şi ca de cealaltă parte a rîndului (formată

---

1) Acelaşi rezultat se deduce din formula pentru numărul combinărilor

$$N_{n+2,\,m} = C_{n+m+2}^{m} = \frac{(n+m+2)!}{(n+2)!\,m!}, \quad N_{n,\,m} = C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!},$$

deci

$$\frac{N_{n,\,m}}{N_{n+2,m}} = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+m+2)\,(n+m+1)}.$$

din $n+m$ oameni) în fața fiecărui cumpărător numărul cumpărătorilor care au doar monede de zece lei să fie mai mare decît numărul acelora care au monede de cinci lei cu mai mult decît o unitate. Deci, $M_{n+2,\,m}$ este egal cu numărul modurilor de așezare, favorabile din punctul de vedere al condițiilor problemei 81, b) (pentru $p=1$) în rîndul format de n cumpărători care au monede de cinci lei și de m cumpărători care au doar monede de zece lei. De aici rezultă că pentru $p=1$ probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{M_{n+2,\,m}}{N_{n,\,m}}=\frac{M_{n+2,\,m}}{N_{n+2,\,m}}\cdot\frac{N_{n+2,\,m}}{N_{n,\,m}}=\frac{M_{n+2,\,m}}{N_{n+2,\,m}}\cdot\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)},$$

adică este egală cu

$$\frac{n-m+2}{n+m+2}\cdot\frac{(n+m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)}=\frac{(n-m+2)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)}=$$

$$=1-\frac{m(m-1)}{(n+2)(n+1)}$$

pentru $n\geqslant m-1$ și egală cu zero pentru $n<m-1$.

c) P r i m a r e z o l v a r e. Pentru ca nici un cumpărător să nu fie nevoit să aștepte restul, este necesar ca înaintea fiecăruia dintre ei să se afle un număr de persoane care au monede de un leu c e l p u ț i n d e d o u ă o r i mai mare decît numărul acelora care au numai monede de trei lei. Probabilitatea acestui eveniment se calculează în modul cel mai simplu prin metoda arătată la soluția a treia a problemei a) — această rezolvare se transpune aproape cuvînt cu cuvînt în cazul problemei c). În primul rînd, vom calcula probabilitatea ca în fața fiecărui cumpărător să stea un număr de persoane care au monede de un leu d e p e s t e d o u ă o r i mai mare decît numărul acelora care au numai monede de trei lei — fiecărei așezări de acest fel a cumpărătorilor îi va corespunde, evident, o „scară“ $A_0A_1A_2\ldots A_{n+m}$, a cărei bază A_0 nu va fi în umbră, dacă întreaga „scară“ este luminată de sus cu un fascicul de raze paralele ce cad sub un astfel de unghi ca lungimea umbrei aruncate de un segment vertical să fie de două ori mai mare decît lungimea segmentului dat (fig. 74). Analog cu rezolvarea a treia a problemei a) (înlocuind numai razele ce cad sub un unghi de 45° cu razele ce cad sub unghiul indicat), se arată că probabilitatea ca în fața fiecărui cumpărător să stea mai mult decît de două ori atîtea persoane care au monede de un leu cîte sînt care nu le au este egală cu $\frac{n-2m}{n+2m}$ (aici se consideră $n>2\,m$; pentru $n\leqslant 2m$ această probabilitate este, evident, egală cu zero).

Mai departe, repetînd raționamentul din partea finală a rezolvării a treia a problemei 81, a), vom ajunge la următoarea concluzie.

Fie două rînduri: primul este format din n cumpărători care au monede de cîte un leu și din m cumpărători care au numai monede de trei lei (în total $n+m$ persoane) și al doilea din $n+1$ cumpărători care au monede de cîte un leu și din m cumpărători care au doar monede de trei lei (în total $n+m+1$ persoane). Într-un astfel de caz, probabilitatea ca în primul rînd în fața fiecărui cumpărător să stea c e l p u ț i n de două ori mai multe persoane care au monede de cîte un leu, decît cele care nu au, este egală cu probabili-

tatea ca în al doilea rînd în fața fiecărui cumpărător să stea m a i m u l t decît de două ori atîtea persoane care au monede de un leu, cîte sînt cele care nu le au, înmulțită cu $(n+m+1)/(n+1)$.

Rezultă deci că probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{n-2m+1}{n+m+1}\cdot\frac{n+m+1}{n+1}=\frac{n-2m+1}{n+1}$$

pentru $n\geqslant 2m$ și egală cu zero pentru $n<2m$.

A d o u a r e z o l v a r e. Problema considerată admite, de asemenea, o rezolvare asemănătoare ca metodă cu prima rezolvare a problemei a); însă aici această rezolvare este mult mai complicată decît în cazul problemei a).

Ca și în prima rezolvare a problemei a), vom reprezenta cele C^m_{n+m} așezări egal posibile a $n+m$ cumpărători cu ajutorul celor mai scurte linii frînte în număr de C^m_{n+m}, care unesc punctele $A_0=(0, 0)$ și $A_{n+m}=(n, m)$. În acest caz, conform condițiilor problemei c), vor fi favorabile acele așezări cărora le corespund liniile frînte așezate în întregime sub dreapta $\tilde{l}$, care trece prin punctele

$$A_0,\ B_1=(2, 1),\quad B_2=(4, 2), \ldots, B_m=(2m, m)$$

(fig. 75, *a*)[1]. Pentru $n<2m$ nu vor exista, în general, astfel de linii frînte (în acest caz, punctul A_{n+m} va fi situat deasupra dreptei $\tilde{l}$); mai departe, vom considera că $n\geqslant 2m$.

Vom calcula numărul de așezări nefavorabile din punctul de vedere al condițiilor problemei; unor astfel de așezări le corespund liniile frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} și care intersectează dreapta $\tilde{l}$. Toate aceste linii frînte au vîrfurile pe dreapta $\tilde{l}_1$, paralelă cu dreapta $\tilde{l}$ și obținută din $\tilde{l}$ printr-o translație la stînga cu o distanță egală cu 1 (fig. 75,*b*)[2]. Astfel, rămîne numai să calculăm numărul liniilor frînte, care unesc A_0 cu A_{n+m} și cu vîrfurile pe dreapta $\tilde{l}_1$.

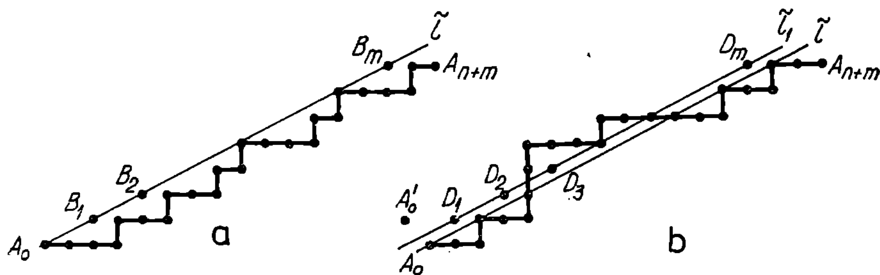


Fig. 75

1) În sistemul de coordonate cu originea în A_0, axa orizontală ca axa absciselor și axa verticală ca axa ordonatelor, ecuația dreptei $\tilde{l}$ se scrie sub forma $x=2y$.

2) Deoarece $n\geqslant 2m$, rezultă că fiecare linie frîntă, care unește A_0 cu A_{n+m} și care intersectează pe $\tilde{l}$, în mod necesar va intersecta cel puțin o dată această dreaptă în sensul de la stînga spre dreapta. Este clar că vîrful liniei frînte vecin cu un astfel de punct de intersecție va aparține lui $\tilde{l}_1$ (v. fig. 75, *b*).

Vom nota, ca şi în prima soluţie a problemei a), prin A'_0 punctul situat cu o unitate mai la stînga şi cu o unitate mai sus de punctul A_0 (fig. 75, *b*). Vom demonstra că numărul celor mai scurte drumuri care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care au vîrfurile pe dreapta $\widetilde{l}_1$ este de două ori mai mare decît numărul celor mai scurte drumuri care unesc A'_0 cu A_{n+m}.

Vom nota cu N_{AB} numărul celor mai scurte drumuri care unesc punctele (intersecţiile) A şi B; dacă $A = (i, j)$ şi $B = (k, l)$, atunci $N_{AB} = C^{l-j}_{(k-i)+(l-j)}$. Pe dreapta $\widetilde{l}_1$ sînt situate următoarele intersecţii: $D_1 = (1, 1)$, $D_2 = (3, 2)$, $D_3 = (5, 3), \ldots, D_k = (2k - 1, k), \ldots, D_m = (2m - 1, m)$. Deoarece

$$N_{A_0D_k} = C^k_{3k-1} = \frac{(3k-1)!}{k!(2k-1)!} = 2\frac{(3k-1)!}{(k-1)!(2k)!} = 2C^{k-1}_{3k-1},\ N_{A'_0D_k} = C^{k-1}_{3k-1},$$

atunci, pentru orice k ($k = 1, 2, \ldots, m$),

$$N_{A_0D_k} = 2N_{A'_0D_k}.$$

Vom compara acum numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care întîlnesc pentru prima dată pe $\widetilde{l}_1$ în punctul D_k cu numărul liniilor frînte asemănătoare care unesc A'_0 cu A_{n+m}. Numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care trec prin punctul D_1, evident, este egal cu

$$N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1A_{n+m}} = 2N_{A'_0D_1} \cdot N_{D_1A_{n+m}},$$

iar numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A'_0 cu A_{n+m} şi care trec prin D_1 este egal cu $N_{A'_0D_1} \cdot N_{D_1A_{n+m}}$; deci, primele linii sînt de două ori mai multe decît cele de al doilea fel.

Numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care trec prin punctul D_2, dar nu trec prin D_1, este egal cu

$$N_{A_0D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}} - N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}}$$

(primul termen dă aici numărul total de linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care trec prin D_2, iar al doilea — numărul unor astfel de linii frînte, care trec şi prin D_1), iar numărul liniilor frînte asemănătoare, care unesc A'_0 cu A_{n+m} este egal cu

$$N_{A'_0D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}} - N_{A'_0D_1} \cdot N_{D_1D_2} \cdot N_{D_2A_{n+m}}.$$

Deoarece $N_{A_0D_2} = 2N_{A'_0D_2}$ şi $N_{A_0D_1} = 2N_{A'_0D_1}$, numărul liniilor frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} este şi aici de două ori mai mare decît numărul liniilor frînte care unesc A'_0 cu A_{n+m}.

În mod analog, numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care trec prin D_3, dar care nu trec nici prin D_1 nici prin D_2, este egal cu

$$N_{A_0D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0D_2} \cdot N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}} +$$
$$+ N_{A_0D_1} \cdot N_{D_1D_2} \cdot N_{D_2D_3} \cdot N_{D_3A_{n+m}}$$

(primul termen dă numărul total de linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} și care trec prin D_3, al doilea și al treilea dă numărul unor astfel de linii frînte care trec și prin D_1, respectiv prin D_2, iar al patrulea dă numărul liniilor frînte care trec și prin D_1 și prin D_2 și prin D_3), iar numărul liniilor frînte asemănătoare care unesc A_0' cu A_{n+m} este egal cu

$$N_{A_0'D_3}N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0'D_1}N_{D_1D_3}\cdot N_{D_3A_{n+m}} - N_{A_0'D_2}\cdot N_{D_2D_3}\cdot N_{D_3A_{n+m}} +$$

$$+ N_{A_0'D_1}\cdot N_{D_1D_2}\cdot N_{D_2D_3}\cdot N_{D_3A_{n+m}};$$

de asemenea este ușor de văzut aici că numărul liniilor frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} este de două ori mai mare decît numărul liniilor frînte care unesc A_0' cu A_{n+m}. Continuînd același raționament, vom demonstra că pentru orice k numărul celor mai scurte drumuri care unesc A_0 cu A_{n+m} și care întîlnesc pentru prima oară dreapta $\widetilde{l_1}$ în punctul D_k este de două ori mai mare decît numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0' cu A_{n+m} și care întîlnesc pentru prima oară dreapta $\widetilde{l_1}$ în același punct.

Astfel, numărul total al celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} și care au vîrfurile pe dreapta $\widetilde{l_1}$ este de două ori mai mare decît numărul celor mai scurte drumuri care unesc A_0' cu A_{n+m} și care au vîrfurile pe aceeași dreaptă. Dar orice cea mai scurtă linie frîntă care unește A_0' cu A_{n+m} va avea neapărat cel puțin un vîrf pe dreapta $\widetilde{l_1}$ (pentru $n \geqslant 2m$ punctul A_0' este situat de partea stîngă a dreptei $\widetilde{l_1}$, iar punctul A_{n+m} de partea dreaptă). Deci, pentru $n \geqslant 2m$ numărul celor mai scurte drumuri care unesc A_0 cu A_{n+m} și care au vîrfurile pe dreapta $\widetilde{l_1}$ este egal cu $2N_{A_0'A_{n+m}}$.

Acum a devenit ușor să găsim răspunsul la problema pusă. Pentru $n < 2m$, nu există cazuri favorabile ale experimentului; deci, în acest caz, probabilitatea căutată este egală cu zero (desigur, acest rezultat a fost evident dinainte). Pentru $n \geqslant 2m$ numărul cazurilor nefavorabile este egal cu

$$2N_{A_0'A_{n+m}} = 2C_{n+m}^{m-1};$$

deoarece numărul total al cazurilor egal posibile ale experimentului este egal cu C_{n+m}^{m}, numărul cazurilor favorabile pentru $n \geqslant 2m$ se determină astfel;

$$C_{n+m}^{m} - 2C_{n+m}^{m-1} = \frac{(n+m)!}{m!\,n!} - 2\frac{(n+m)}{(m-1)!\,(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+m)!}{(m-1)!\,n!}\left\{\frac{1}{m} - \frac{2}{n+1}\right\} = \frac{(n+m)!\,(n-2m+1)}{m!(n+1)!},$$

deci probabilitatea căutată este aici egală cu

$$\frac{(n+m)!\,(n-2m+1)}{m!(n+1)!} : \frac{(n+m)!}{m!\,n!} = \frac{n-2m+1}{n+1}.$$

A treia rezolvare. Dacă am ghicit răspunsul la problema noastră, valabilitatea lui poate fi demonstrată foarte simplu ca în problemele a) şi b) prin metoda inducţiei complete. Într-adevăr, fie $0 < 2m \leqslant n$ şi vom presupune că s-a demonstrat că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu $A^{(1)}_{n+m-1}$ [v. a doua rezolvare a problemei a)] şi care nu au vîrfuri pe dreapta $\tilde{l}_1$ este egal cu $\frac{n-2(m-1)+1}{n+1} C^{m-1}_{n+m-1}$ şi că numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu $A^{(2)}_{n+m-1}$ şi care nu au vîrfuri pe aceeaşi dreaptă este egal cu $\frac{(n-1)-2m+1}{(n-1)+1} C^{m}_{n+m-1}$. În acest caz, numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care nu au vîrfuri pe $\tilde{l}_1$ va fi egal cu

$$\frac{n-2(m-1)+1}{n+1} C^{m-1}_{n+m-1} + \frac{(n-1)-2m+1}{(n-1)+1} C^{m}_{n+m-1} =$$

$$= \frac{n-2m+3}{n+1} \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} + \frac{n-2m}{n} \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} =$$

$$= \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \left[\frac{n-2m+3}{n+1} + \frac{n-2m}{m}\right] =$$

$$= \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \frac{(n+m)(n-2m+1)}{(n+1)m} = \frac{n-2m+1}{n+1} \frac{(n+m)!}{n!m!} =$$

$$= \frac{n-2m+1}{n+1} C^{m}_{n+m}.$$

De aici rezultă că această expresie va da numărul celor mai scurte linii frînte care unesc A_0 cu A_{n+m} şi care nu au vîrfuri pe $\tilde{l}_1$, pentru orice n şi m, $0 \leqslant 2m \leqslant n+1$ [compară cu partea finală a rezolvării a doua a problemei a)].

Observaţie. Problema c) poate fi formulată şi în modul următor: n obiecte care au o anumită proprietate X şi m obiecte care au proprietatea Y se aşază într-un şir într-o ordine întîmplătoare (astfel că probabilitatea de a apărea oricare din cele C^m_{n+m} moduri posibile de aşezare a acestor $n+m$ obiecte este aceeaşi). Care este probabilitatea ca în faţa fiecăruia din obiectele din şir să se găsească cel puţin de două ori mai multe obiecte care au proprietatea X decît obiecte care au proprietatea Y?

Sub această formă, problema considerată admite o generalizare firească: se poate pune întrebarea care va fi probabilitatea ca în faţa fiecărui obiect din şir să se afle cel puţin de r ori mai multe obiecte care au proprietatea X decît obiecte care au proprietatea Y. Este uşor de văzut că toate cele trei soluţii date pentru cazul $r = 2$ se transpun în cazul mult mai general al unui întreg oarecare r [această transpunere se face în modul cel mai simplu pentru prima soluţie a problemei c), unde este cu totul evidentă]. În acest caz, se demonstrează că, pentru un întreg oarecare r, probabilitatea căutată este egală cu zero pentru $n < rm$ (ceea ce este evident) şi egală cu $\frac{n-rm+1}{n+1}$ pentru $n \geqslant rm$. În cazul particular $r = 1$, obţinem o problemă echivalentă cu problema a); prima şi a treia rezolvări ale problemei c) se transpun, în acest caz, respectiv în rezolvările a treia şi a doua a problemei a), în rezolvarea a doua a lui c) într-o rezolvare care diferă numai ca formă de prima rezolvare a lui a).

82. a) Trebuie să calculăm numărul Φ_n al modurilor în care $2n$ puncte, situate pe un cerc, pot fi împărțite în n perechi astfel ca n coarde cu extremitățile în aceste perechi de puncte să nu se intersecteze. Vom nota cele $2n$ puncte în ordinea succesiunii lor prin $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$. Punctul A_i îl vom numi o r i g i n e a c o a r d e i, dacă el face parte din perechea (A_i, A_j), unde $j > i$, și îl vom numi c a p ă t u l c o a r d e i, dacă el face parte din perechea (A_i, A_j), unde $j < i$. Pentru ca cele n coarde să nu se intersecteze, este necesar ca printre perechile de puncte să nu existe nici un grup de două care să se întrepătrundă: dacă (A_i, A_j) și (A_k, A_l) sînt două perechi și $i < j$, $k < l$, $i < k$, atunci trebuie ca sau $i < j < k < l$ sau $i < k < < l < j$, însă nu este admis ca $i < k < j < l$.

Fie $A_{j_1}, A_{j_2}, A_{j_3}, \ldots, A_{j_n}$ $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n \leqslant 2n)$ capetele coardelor într-una dintre descompunerile a $2n$ puncte în perechi care verifică condițiile date. Deoarece A_{j_1} este primul capăt al coardei, iar perechile nu se întrepătrund, originea A_{i_1} a coardei cu capătul în A_{j_1} nu poate fi decît punctul A_{j_1-1} vecin cu A_{j_1}; deoarece un astfel de punct există, rezultă că $j_1 \geqslant 2$. Acum vom lăsa de o parte perechea (A_{j_1-1}, A_{j_1}) și vom considera punctul A_{j_2} primul din celelalte $n - 1$ capete ale coardelor. Pentru ca perechile să nu se întrepătrundă, originea A_{j_2} a coardei cu capătul în punctul A_{j_2} trebuie să fie un punct din totalitatea celorlalte $2n - 2$ puncte rămase, care este mai apropiat de A_{j_2} și care-l precede (acest punct poate fi punctul A_{j_2-1} sau punctul A_{j_2-3}, dacă $A_{j_2-1} = = A_{j_1}$); pentru ca un astfel de punct să existe, trebuie ca în fața lui A_{j_2} să se găsească încă cel puțin trei puncte (punctele $A_{i_2}, A_{j_1}, A_{i_1}$), adică trebuie ca $j_2 \geqslant 4$. Vom lăsa de o parte acum și perechea (A_{i_2}, A_{j_2}) și vom considera punctul A_{j_3} primul dintre celelalte $n - 2$ capete ale coardelor. Originea A_{i_3} a coardei cu capătul în punctul A_{j_3} trebuie, evident, să fie un punct dintre cele $2n - 4$ puncte rămase, care este cel mai apropiat de A_{j_3} și care-l precede (acest punct A_{i_3} poate fi sau A_{j_3-1} sau A_{j_3-3} sau A_{j_3-5}). Deoarece cele patru puncte $A_{i_1} = A_{j_1-1}$, A_{j_1}, A_{i_2} și A_{j_2} se află, evident, în fața lui A_{j_3}, atunci pentru ca printre celelalte $2n - 4$ puncte să existe punctul A_{i_3} care precede pe A_{j_3}, trebuie ca în fața lui A_{j_3} să se afle nu mai puțin de cinci puncte, adică trebuie ca $j_3 \geqslant 6$. Vom lăsa apoi de o parte perechea (A_{i_3}, A_{j_3}) și vom considera capătul A_{j_4} și vom continua mereu să lăsăm la o parte perechile formate și să considerăm primul dintre capetele coardei care a mai rămas după aceasta; vom găsi, astfel, pe rînd, pentru fiecare dintre aceste capete A_{j_k} cîte un punct A_{i_k}, din care începe coarda, cu capătul în A_{j_k}, adică vom parcurge, pe rînd, toate perechile (A_{i_k}, A_{j_k}) în care pot fi împărțite cele $2n$ puncte. Pentru ca să putem forma n perechi cu ajutorul a n capete $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}$ este necesar numai ca, pentru orice k de la 1 la n, în fața capătului de rang k, A_{j_k}, să se afle cel puțin $2k - 1$ puncte (adică să avem $j_k \geqslant 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Deci împărțirea a $2n$ puncte în n perechi, astfel ca cele n coarde corespunzătoare să nu se intersecteze, este complet determinată, dacă sînt date n capete ale coardelor în această împărțire; în acest caz, pentru ca n puncte date să poată fi capetele coardelor într-o astfel de descompunere, este necesar numai ca în fața punctului de rang k să se afle cel puțin $2k - 1$ puncte.

Această ultimă condiție poate fi formulată și în modul următor: în fața fiecăruia dintre cele $2n$ puncte trebuie să se afle nu mai puține origini ale

coardelor (adică puncte care nu sînt capete ale coardelor) decît capetele lor. Astfel, numărul modurilor diferite de împărțire a $2n$ puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$ în perechi, astfel ca cele n coarde corespunzătoare să nu se intersecteze (adică numărul Φ_n) este egal cu numărul descompunerilor diferite a $2n$ puncte în două grupuri de cîte n puncte (capetele și originile coardelor), astfel ca în fața fiecăruia dintre punctele existente să se afle nu mai puține puncte din grupul al doilea decît puncte din primul (cuvîntul „în față" înseamnă aici: „la începutul șirului $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}$"). Însă numărul unor astfel de moduri de împărțiri a $2n$ puncte în două grupuri de cîte n puncte este egal, evident, cu numărul modurilor diferite de așezare a $2n$ cumpărători, dintre care n au monede de cinci lei, iar n au numai monede de zece lei, într-un rînd, astfel ca în fața fiecărui cumpărător să se afle nu mai puțini cumpărători care au monede de cinci lei, decît cei care nu le au (în calculul numărului modurilor diferite de așezare este cu totul indiferent dacă considerăm punctele din primul și al doilea grup sau cumpărători care au și care nu au monede de cinci lei). Deoarece, conform rezultatului problemei 81, a), numărul modurilor de așezare, considerate aici, a $2n$ cumpărători este egal cu $\frac{1}{n+1}C_{2n}^n$ $\left(\text{pentru } m = n\right.$ fracția $\frac{n-m+1}{n+1}$ devine $\left.\frac{1}{n+1}\right)$, rezultă că și

$$\Phi_n = 1\,\frac{1}{n+1}\,C_{2n}^n.$$

Cu aceasta am obținut o nouă soluție a problemei 52, b).

De aici rezultă imediat și o nouă rezolvare a problemei 51, b). Într-adevăr, în rezolvarea problemei 52, b) s-a demonstrat că numărul T_n al descompunerilor diferite ale poligonului convex cu n laturi în triunghiuri, prin diagonalele care nu se intersectează în interiorul poligonului, depinde de numărul Φ_n datorită relației $\Phi_n = T_{n+2}$. Deci

$$T_n = \Phi_{n-2} = \frac{1}{n-1}\,C_{2n-4}^{n-2},$$

rezultat care coincide cu răspunsul la problema 51, b), obținut mai înainte pe altă cale.

Observație. Raționamentul făcut aici poate fi folosit și în sens invers: considerînd cunoscut răspunsul problemei 52,b), din soluția dată la pag. 147, de aici obținem o nouă (a patra) rezolvare a problemei 81,a) în cazul particular $m = n$.

b) Trebuie să calculăm numărul ψ_n al modurilor de împărțire a $3n$ puncte situate pe un cerc în grupuri de trei, astfel ca laturile celor n triunghiuri înscrise, avînd vîrfurile în aceste n grupuri de trei puncte, să nu se intersecteze. Rezolvarea acestei probleme este foarte asemănătoare cu aceea a problemei a) dată mai sus; numai că ea se bazează nu pe rezolvarea problemei 81, a), ci pe rezolvarea problemei 81, *c*).

Vom nota cele $3n$ pu ncte în ordinea succesiunii lor pe cerc prin $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{3n-1}, A_{3n}$. Punctul A_i îl vom numi „originea triunghiului", dacă el

face parte din grupul de trei (A_i, A_j, A_k), unde $i < j < k$; îl vom numi „mijlocul triunghiului“, dacă el face parte din grupul de trei (A_i, A_j, A_k), unde $j < i < k$ și „capătul triunghiului“, dacă el face parte din grupul de trei (A_i, A_j, A_k), unde $j < k < i$. Pentru ca laturile triunghiurilor cu vîrfurile în grupurile de trei puncte să nu se intersecteze, este necesar numai ca toate aceste grupuri de trei să nu se întrepătrundă: dacă (A_i, A_j, A_k) și (A_l, A_m, A_n) sînt două dintre aceste grupuri de trei și $i < j < k$, $l < m < n$, $i < l$, toate cele trei numere l, m și n trebuie să fie în același timp sau mai mari decît i, însă mai mici decît j; sau mai mari decît j, însă mai mici decît k; sau mai mari decît k.

Vom considera acum mulțimea „capetelor triunghiurilor“ într-una din descompunerile a $3n$ puncte în grupuri de trei, astfel ca laturile celor n triunghiuri corespunzătoare să nu se intersecteze; acestea vor fi anumite n puncte A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_n} din totalitatea celor $3n$ puncte existente (aceste puncte le vom numerota în ordinea succesiunii lor pe cerc, astfel încît $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$ $\ldots < k_n \leqslant 3n$). Deoarece A_{k_1} este primul „capăt de triunghi“, este clar că primele două vîrfuri ale triunghiului pentru care A_{k_1} este vîrful al treilea trebuie să fie punctele A_{k_1-1} și A_{k_1-2}, care preced imediat pe A_{k_1}; de aici, în particular, rezultă în mod necesar $k_1 \geqslant 3$. Mai departe, vom lăsa de o parte grupul de trei (A_{k_1-2}, A_{k_1-1}, A_{k_1}) și vom considera primul punct A_{k_2}, din celelalte $n - 1$ „capete ale triunghiurilor“. Celelalte două vîrfuri ale triunghiului care are al treilea vîrf în acest punct trebuie să fie punctele A_{i_2} și A_{j_2}, care preced imediat punctul A_{k_2} în șirul celorlalte $3n - 3$ puncte.

Astfel, cunoscînd toate „capetele triunghiurilor“, putem determina în care grup de trei intră al doilea „capăt“ A_{k_2}, iar k_2 trebuie să nu fie mai mic decît 6 (deoarece toate celelalte cinci puncte A_{k_1-2}, A_{k_1-1}, A_{k_1}, A_{i_2}, A_{j_2} preced pe A_{k_2}).

Continuînd să lăsăm de o parte grupurile de trei puncte formate și să considerăm primul dintre „capetele triunghiurilor“ care mai rămîn după aceasta, în mod analog ca în soluția problemei a) vom putea să parcurgem pe rînd toate cele n grupuri de trei (A_{i_l}, A_{j_l}, A_{k_l}), în care pot fi descompuse cele $3n$ puncte; în acest caz, pentru ca formarea celor n grupuri de trei pînă la al n-lea „capăt al triunghiului“ să fie posibilă, este necesar ca, pentru orice l de la 1 la n, în fața celui de-al l-lea „capăt al triunghiului“ A_{k_l} să se afle cel puțin $3l - 1$ puncte, adică $k_l \geqslant 3l$, $l = 1, 2, \ldots, n$. De aici, în mod analog cu felul cum s-a procedat în soluția problemei a), se poate trage concluzia că numărul descompunerilor diferite a $3n$ puncte în n grupuri de cîte trei, astfel ca laturile celor n triunghiuri corespunzătoare să nu se intersecteze (adică numărul ψ_n), este egal cu numărul descompunerilor a $3n$ puncte în două grupuri de cîte n și $2n$ puncte, astfel ca în fața fiecărui punct să se afle cel puțin de două ori mai multe puncte din grupul al doilea decît puncte din primul grup.

Acest rezultat poate fi formulat și altfel: numărul căutat ψ_n este egal cu numărul modurilor de așezare în rînd a $3n$ cumpărători, dintre care $2n$ au monede de un leu, iar ceilalți n au numai monede de trei lei, astfel ca în fața fiecărui cumpărător să se afle cel puțin de două ori mai mulți cumpărători

care au monede de un leu, decît cumpărători care au doar monede de cîte trei lei. Conform rezultatului problemei 81, c), de aici rezultă imediat

$$\psi_n = \frac{1}{2n+1} C_{3n}^n.$$

Acest răspuns poate fi pus într-una din următoarele forme:

$$\psi_n = \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} = \frac{1}{3n+1} \cdot \frac{(3n+1)!}{n!(2n+1)!} = \frac{1}{3n+1} C_{3n+1}^n =$$

$$= \frac{1}{n} C_{3n}^{n-1} = \frac{3}{2n+1} C_{3n-1}^{n-1} = \frac{3}{n-1} C_{3n-1}^{n-2}.$$

c) Vom nota cu S_n numărul modurilor diferite de descompunere a poligonului convex cu $2n$ laturi în patrulatere, prin diagonale care nu se intersectează în interiorul acestui poligon [1]. Mai jos vom demonstra că $S_{n+1} = \psi_n$; de aici, conform rezultatului problemei b), va rezulta imediat și soluția problemei considerate.

Egalitatea $S_{n+1} = \psi_n$ se demonstrează în același mod ca egalitatea $T_{n+2} = \Phi_n$ [v. rezolvarea problemei 52, b)]. Vom stabili mai întîi o relație care permite să determinăm pe ψ_n cu ajutorul valorilor cunoscute $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n-1}$ [această relație este asemănătoare cu cea obținută în rezolvarea problemei 52, a) și poate fi stabilită pe o cale asemănătoare], apoi vom arăta că o astfel de relație este verificată și de numerele $Q_n = S_{n+1}$ [această parte a rezolvării va fi asemănătoare cu rezolvarea problemei 52, b)], după care egalitatea căutată va deveni cu totul evidentă.

Trecem la stabilirea relației dintre ψ_n și numerele $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_{n+1}$. Vom nota cele 3 n puncte, despre care este vorba în enunțul problemei 82, b), în ordinea succesiunii lor pe cerc, prin $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{3n-1}, A_{3n}$. Dintre cele n triunghiuri înscrise, cu vîrfurile în aceste puncte, vom considera pe cel căruia îi aparține vîrful A_1. Este clar că al doilea vîrf (în sensul ordinii de succesiune în șirul $A_1, A_2, \ldots, A_{3n}$) al acestui triunghi trebuie să fie unul din punctele $A_2, A_5, A_8, \ldots, A_{3k-1}, \ldots, A_{3n-1}$ (altfel, prima latură a triunghiului considerat ar separa un arc conținînd un număr de puncte care nu este multimplu de trei și, deci, ar trebui să se intersecteze cel puțin cu una dintre laturile celorlalte triunghiuri). Să presupunem, de exemplu, că al doilea vîrf ar fi punctul A_2; atunci al treilea vîrf trebuie să fie unul dintre punctele $A_3, A_6, A_9, \ldots, A_{3l}, \ldots, A_{3n}$. Dacă al treilea vîrf va fi punctul A_{3l} (fig. 76, *a*), latura A_2A_{3l} a triunghiului considerat va separa un arc pe care sînt situate $3(l-1)$ dintre punctele considerate (punctele $A_3, A_4, A_5, \ldots, A_{3l-1}$), iar latura $A_{3l}A_1$ va separa un arc pe care se află $3(n-l)$ puncte (punctele $A_{3l+1}, A_{3l+2}, \ldots, A_{3n}$). Obținem toate modurile de descompunere posibile a $3n$ puncte în n grupuri de trei, care

---

[1] Urmărind soluția problemei 50, este ușor de demonstrat că fiecare descompunere de acest fel va conține $n-1$ patrulatere și că numărul diagonalelor care fac parte din fiecare descompunere este constant și egal cu $n-2$. Din aceste considerații rezultă că poligonul convex cu $2n+1$ laturi nu poate fi descompus în patrulatere prin diagonale care nu se intersectează în interiorul său.

verifică condițiile problemei și în care punctul A_1 intră în grupul de trei (A_1, A_2, A_{3l}), asociind toate cele ψ_{l-1} descompuneri a $3(l-1)$ puncte $A_3, A_4, \ldots, A_{3l-1}$ în grupuri de trei cu toate cele ψ_{n-l} descompuneri în grupuri de trei a $3(n-l)$ puncte $A_{3l+1}, A_{3l+2}, \ldots, A_{3n}$; deci numărul total al acestor moduri de descom-

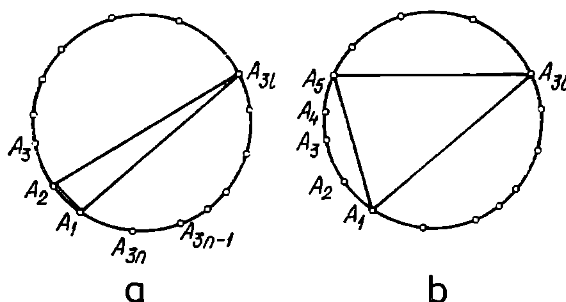


Fig. 76

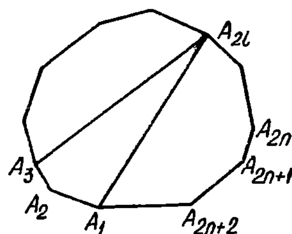


Fig. 77

punere este egal cu $\psi_{l-1}\psi_{n-l}$. Deoarece l poate lua aici valorile 1, 2, 3, ..., n, numărul total al modurilor de descompunere în care punctul A_1 intră în același grup de trei cu punctul A_2 este egal cu suma

$$\psi_{n-1} + \psi_1\psi_{n-2} + \psi_2\psi_{n-3} + \cdots + \psi_{n-2}\psi_1 + \psi_{n-1}$$

(primul și ultimul termen corespund aici la $l = 1$ și $l = n$; acești termeni sînt evident pur și simplu egali cu ψ_{n-1}). Dacă al doilea vîrf al triunghiului care conține pe A_1 va fi A_5, atunci al treilea vîrf trebuie să fie unul dintre punctele $A_6, A_9, \ldots, A_{3l}, \ldots, A_{3n}$; toate descompunerile posibile în care al doilea vîrf al acestui triunghi va fi A_5, iar al treilea A_{3l} (fig. 76, *b*), le vom obține asociind $\psi_1 = 1$ moduri de descompunere în grupuri de trei a punctelor A_2, A_3, A_4, separate de latură A_1A_5, cu ψ_{l-2} descompuneri a $3(l-2)$ puncte $A_6, A_7, \ldots, A_{3l-1}$ separate de latura A_5A_{3l} și cu ψ_{n-l} descompuneri a $3(n-l)$ puncte $A_{3l+1}, A_{3l+2}, \ldots, A_{3n}$ separate de latura $A_{3l}A_1$, astfel că numărul total al descompunerilor care conțin grupul de trei (A_1, A_5, A_{3l}) va fi egal cu $\psi_1\, \psi_{l-2}\, \psi_{n-l}$. Făcînd pe l să parcurgă valorile 2, 3, 4, ..., n, numărul total al modurilor de descompunere în care al doilea vîrf al triunghiuui care conține vîrful A_1 este A_5, vom obține suma

$$\psi_1(\psi_{n-2} + \psi_1\psi_{n-3} + \psi_2\psi_{n-4} + \cdots + \psi_{n-3}\psi_1 + \psi_{n-2}).$$

Continuînd același raționament, vom găsi că numărul descompunerilor în care al doilea vîrf al triunghiului cu „originea" în A_1 va fi A_8 este egal cu

$$\psi_2(\psi_{n-3} + \psi_1\psi_{n-4} + \cdots + \psi_{n-4}\psi_1 + \psi_{n-3})$$

etc.; numărul descompunerilor în care al doilea vîrf al triunghiului considerat este A_{3n-7} este egal cu

$$\psi_{n-3}\ (\psi_2 + \psi_1 \cdot \psi_1 + \psi_2);$$

numărul descompunerilor în care al doilea vîrf va fi A_{3n-4} este egal cu

$$\psi_{n-2}(\psi_1 + \psi_1)$$

și, în sfîrșit, numărul descompunerilor în care acest vîrf este A_{3n-1} este

$$\psi_{n-1}.$$

Astfel, vom obține pentru ψ_n următoarea formulă [1] generală:

$$\begin{aligned}\psi_n = \psi_{n-1} + \psi_1\psi_{n-2} + \psi_2\psi_{n-3} + \dots + \psi_{n-2}\psi_1 + \psi_{n-1} + \\ + \psi_1(\psi_{n-2} + \psi_1\psi_{n-3} + \dots + \psi_{n-3}\psi_1 + \psi_{n-2}) + \\ + \psi_2(\psi_{n-3} + \psi_1\psi_{n-4} + \dots + \psi_{n-4}\psi_1 + \psi_{n-3}) + \dots \\ \dots + \psi_{n-3}(\psi_2 + \psi_1\psi_1 + \psi_2) + \psi_{n-2}(\psi_1 + \psi_1) + \psi_{n-1}.\end{aligned}$$

Aceasta este relația căutată. Utilizînd această relație și ținînd seama de faptul că $\psi_1 = 1$ (ψ_1 este numărul modurilor de descompunere a trei puncte în grupuri de trei), putem să calculăm pe rînd toate valorile lui ψ_n; în particular, de aici rezultă

$$\psi_2 = \psi_1 + \psi_1 + \psi_1 = 3,$$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \psi_2 + \psi_1\psi_1 + \psi_2 + \psi_1(\psi_1 + \psi_1) + \psi_2 = \\ &= 3 + 1 \cdot 1 + 3 + 1 \cdot (1 + 1) + 3 = 12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_4 &= \psi_3 + \psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1 + \psi_3 + \psi_1(\psi_2 + \psi_1\psi_1 + \psi_2) + \psi_2(\psi_1 + \psi_1) + \psi_3 = \\ &= 12 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 12 + 1 \cdot (3 + 1 \cdot 1 + 3) + 3 \cdot (1 + 1) + 12 = 55\end{aligned}$$

etc. [toate aceste valori pot fi obținute și din formula pentru ψ_n, stabilită la rezolvarea problemei 82, b)].

Vom deduce acum o relație analoagă între S_{n+1} și S_n, S_{n-1}, S_{n-2}, ..., S_2. Fie $A_1A_2 \dots A_{2n}A_{2n+1}A_{2n+2}$ un poligon convex cu $2n + 2$ laturi (fig. 77); dintre patrulaterele în care acest poligon poate fi descompuns cu ajutorul diagonalelor care nu se intersectează vom considera pe acelea în care intră latura A_1A_2. Al treilea vîrf (în ordinea succesiunii din șirul A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n+2}) al acestui patrulater poate fi sau A_3, sau A_5, sau A_7, ..., sau A_{2n+1} (al treilea vîrf nu poate fi un vîrf par al poligonului cu $2n + 2$ laturi, deoarece, în caz contrar, diagonala corespunzătoare ar separa din poligonul dat un poligon cu un număr impar de laturi, care nu poate fi descompuns în patrulatere prin diagonalele sale; (v. trimiterea de la p. 216). Dacă acest al treilea vîrf va fi A_3, al patulea vîrf poate fi sau A_4, sau A_6, sau A_8 etc. sau A_{2n+2}; numărul total al acestor moduri de descompunere în care intră patrulaterul $A_1A_2A_3A_{2l}$ este

[1] Admițînd, prin convenție, $\psi_0 = 1$ și utilizînd semnul sumă, această formulă lungă poate fi scrisă concis în modul următor:

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} \psi_i\psi_j\psi_{n-i-j-1} = \sum_{i+j+k=n-1} \psi_i\psi_j\psi_k.$$

egal, evident, cu $S_{l-1}S_{n-l+2}$ [deoarece laturile A_1A_{2l} şi A_3A_{2l} separă din poligonul cu $2n+2$ laturi un poligon cu $2l-1$ laturi şi un poligon cu $2(n-l+2)$ laturi; v. fig. 77]. De aici rezultă că numărul total al modurilor de descompunere în care al treilea vîrf al patrulaterului care conţine pe A_1A_2 va fi A_3, este egal cu

$$S_n + S_2S_{n-1} + S_3S_{n-2} + \dots + S_{n-1}S_2 + S_n.$$

La fel se demonstrează cu numărul modurilor de descompunere, în care acest al treilea vîrf va fi A_5, este egal cu

$$S_2(S_{n-1} + S_2S_{n-2} + S_3S_{n-3} + \dots + S_{n-2}S_2 + S_{n-1});$$

numărul total al modurilor de descompuneri, în care acest vîrf este A_7, este egal cu

$$S_3(S_{n-2} + S_2S_{n-3} + \dots + S_{n-3}S_2 + S_{n-2})$$

etc., numărul total al modurilor de descompuneri, în care acest al treilea vîrf este A_{2n-3}, este egal cu

$$S_{n-2}(S_3 + S_2S_2 + S_3);$$

numărul descompunerilor, în care acest vîrf va fi A_{2n-1}, este egal cu

$$S_{n-1}(S_2 + S_2)$$

şi, în sfîrşit, numărul de descompunere, în care acest vîrf este A_{2n+1}, este S_n.

De aici se obţine pentru S_{n+1} următoarea formulă [1] generală:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n &+ S_2S_{n-1} + S_3S_{n-2} + \dots + S_{n-1}S_2 + S_n + \\ &+ S_2(S_{n-1} + S_2S_{n-2} + \dots + S_{n-2}S_2 + S_{n-1}) + \\ &+ S_3(S_{n-2} + S_2S_{n-3} + \dots + S_{n-2}) + \dots \\ &\dots + S_{n-2}\,(S_3 + S_2S_2 + S_3) + S_{n-1}\,(S_2 + S_2) + S_n. \end{aligned}$$

Aceasta este relaţia căutată. Utilizînd această formulă şi ţinînd seama de faptul că $S_2 = 1$, putem calcula succesiv pe S pentru toate valorile lui n; în particular, pentru $n = 3, 4, 5$, rezultă

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2 + S_2 + S_2 = 3, \\ S_4 &= S_3 + S_2S_2 + S_3 + S_2(S_2 + S_2) + S_3 = \\ &= 3 + 1\cdot 1 + 3 + 1\cdot(1 + 1) + 3 = 12, \\ S_5 &= S_4 + S_2S_3 + S_3S_2 + S_4 + S_2(S_3 + S_2S_2 + S_3) + S_3(S_2 + S_2) + S_4 = \\ &= 12 + 3 + 3 + 12 + (3 + 1 + 3) + 3\cdot(1 + 1) + 12 = 55. \end{aligned}$$

---

[1] Admiţînd prin convenţie că $S_1 = 1$ şi utilizînd semnul sumă, putem scrie concis această relaţie sub forma următoare:

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-i-1} S_iS_jS_{n-i-j+2} = \sum_{i+j+k=n+2} S_iS_jS_k.$$

Să mai observăm că, dacă vom nota $S_{n+1} = Q_n$, relaţia stabilită aici va lua următoarea formă:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_1Q_{n-2} + Q_2Q_{n-3} + \dots + Q_{n-2}Q_1 + Q_{n-1} +$$
$$+ Q_1(Q_{n-2} + Q_1Q_{n-3} + \dots + Q_{n-3}Q_1 + Q_{n-2}) +$$
$$+ Q_2(Q_{n-3} + Q_1Q_{n-4} + \dots + Q_{n-3}) + \dots$$
$$\dots + Q_{n-3}(Q_2 + Q_1Q_1 + Q_2) + Q_{n-2}(Q_1 + Q_1) + Q_{n-1}.$$

Această relaţie coincide întocmai cu cea obţinută mai înainte pentru numerele ψ_n (v. p. 218). Deoarece în afară de aceasta avem şi $Q_1 = S_2 = 1 = \psi_1$, calculul succesiv al valorilor Q_n cu această formulă pentru $n = 2, 3, 4, \dots$ va da acelaşi rezultat ca şi calculul succesiv al valorilor ψ_n, cu alte cuvinte

$$Q_n = \psi_n, \text{ adică } S_n = Q_{n-1} = \psi_{n-1}$$

(am văzut mai sus că $S_3 = \psi_2$, $S_4 = \psi_3$ şi $S_5 = \psi_4$). De aici, conform rezultatului problemei b), rezultă

$$S_n = \frac{1}{2n-1} C_{3n-3}^{n-1} = \frac{(3n-3)!}{(n-1)!(2n-1)!}.$$

Acesta este răspunsul la problema noastră.

Observaţie. Problemele 52, b) şi 82, b) sînt cazuri particulare ale următoarei probleme mult mai generale.

Pe un cerc sînt dispuse kn puncte. În cîte moduri diferite pot fi ele împărţite în n grupuri de cîte k puncte, astfel încît laturile celor n poligoane înscrise, convexe cu k laturi, care au ca vîrfuri aceste grupuri de k puncte, să nu se intersecteze?

Rezolvarea acestei probleme generale poate fi dată în modul cu totul analog celui din rezolvarea problemei 82, b); în acest caz, trebuie să ne bazăm însă nu pe rezultatul problemei 81, c), ci pe generalizarea acestei probleme dată în observaţia de la sfîrşitul rezolvării problemei 81, c). Este uşor de văzut că, în acest caz, vom ajunge la următorul răspuns al problemei: numărul căutat al modurilor de descompunere este egal cu

$$\frac{1}{(k-1)n+1} C_{kn}^{n} = \frac{1}{kn+1} C_{kn+1}^{n} = \frac{(kn)!}{n![(k-1)n+1]!}.$$

La fel, problema lui Euler 51, b) şi problema 82, c) sînt cazuri particulare ale unei probleme ca cea următoare:

În cîte moduri diferite poate fi descompus poligonul[1] convex cu $(k-2)n+2$ laturi în poligoane cu k laturi ducînd diagonale care nu se intersectează în interiorul poligonului cu $(k-2)n+2$ laturi?

---

[1] Nu este greu de văzut că, pentru $m \neq (k-2)n+2$, poligonul convex cu m laturi nu poate fi împărţit prin diagonale care nu se intersectează în poligoane cu k laturi [aceasta rezultă, de exemplu, din faptul că în cazul poligonului cu m laturi care poate fi împărţit în poligoane cu k laturi, suma unghiurilor poligonului cu m laturi trebuie să fie egală cu suma unghiurilor poligonului cu k laturi înmulţită cu un număr întreg, adică trebuie ca $(m-2)\cdot 180° = n(k-2)\cdot 180°$, $m = (k-2)n+2$].

În mod analog cu rezolvarea problemelor 51, b) și 82, c), rezolvarea acestei probleme generale poate fi redusă fără dificultate la rezolvarea problemei precedente. Utilizînd răspunsu dat mai sus; vom obține că numărul căutat de moduri este aici egal cu

$$\frac{1}{kn+1} C^{n}_{(k+1)n} = \frac{[(k+1)n]!}{n!\,(kn+1)!};$$

acest rezultat este generalizarea rezultatelor găsite în rezolvarea problemelor 51, b) și 82, c).

83. În orice grup de șase numere întregi consecutive, un număr se divide cu 6 și cîte unul din acestea dă, prin împărțire la 6, restul 1, 2, 3, 4 și 5. Astfel, printre oricare șase numere întregi consecutive există două care sînt prime cu 6 (și anume acelea care dau prin împărțire la 6 resturile 1 și 5). Deci probabilitatea ca un număr dat dinainte să fie prim cu 6 va fi egală cu $2/6 = 1/3$.

Din faptul că din oricare trei numere consecutive unul este prim cu 6 nu este greu de dedus că probabilitatea ca cel puțin unul din două numere date dinainte să fie prim cu 6 este egală cu 5/9 [compară cu rezolvarea problemei 73, a)].

84. a) Pătratul unui număr întreg se termină cu cifra 1 dacă numărul se termină cu cifra 1 sau 9. Aceasta înseamnă că printre fiecare 10 numere întregi consecutive vor exista două, al căror pătrat se termină cu unu. De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu 0,2.

Cubul unui număr întreg, cum este ușor de verificat, se termină cu cifra 1 numai în cazul în care numărul se termină cu cifra 1. Ultimele două cifre ale numărului n (aceasta este ușor de văzut, de exemplu, din regula de înmulțire a numerelor de mai multe cifre „puse unele sub altele"). Luînd ultimele două cifre ale cuburilor numerelor 01, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 și 91, este ușor de verificat că, dintre toate numerele de două cifre, numai numărul 71 are cubul terminat cu cifrele 11. Astfel, problema determinării probabilității ca cubul numărului n să se termine cu 11 este echivalentă cu următoarea: care este probabilitatea ca numărul n să se termine cu 71? Este evident că această probabilitate este egală cu 0,01.

b) Evident că ultima cifră a puterii a 10-a a numărului întreg n depinde numai de ultima cifră a numărului n. Mai departe, ne convingem ușor că 4^{10} și 6^{10} se termină cu cifra 6, iar celelalte cifre dau prin ridicare la puterea a 10-a numere care nu se termină cu 6 (2^{10} și 8^{10} se termină cu 4, $0^{10} = 0$, iar cifrele impare prin ridicare la puterea a 10-a dau numere impare). De aceea, printre fiecare 10 numere întregi consecutive există două care prin ridicarea la puterea a 10-a dau numere ce se termină cu cifra 6, iar celelalte opt conduc la numere care nu se termină cu cifra 6. Deci, probabilitatea ca puterea a 10-a a unui număr întreg luat la întîmplare să se termine cu cifra 6 este egală cu 0,2.

Deoarece puterea a 10-a a oricărui număr par, care nu se divide cu 10, se termină cu cifra 4 sau 6, rezultă că puterea a 20-a a oricărui astfel de număr se termină cu cifra 6. Toate celelalte numere întregi, prin ridicare la puterea a 20-a, evident, nu conduc la numere care se termină cu 6. De aici rezultă că probabilitatea ca n^{20} să se termine cu 6 este egală cu 0,4.

Observație. Se poate demonstra de asemenea că probabilitatea ca puterea a 20-a a unui număr întreg să se termine cu 76 este egală tot cu 0,4 (la fel, că probabilitatea ca puterea a 200-a a unui număr întreg să se termine cu 376 este egală cu 0,4). V. în această privință soluția problemei 34 din [56]. ♦

85. $C_n^7 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$; deci probabilitatea ca C_n^7 să se dividă cu 7 este egală cu probabilitatea ca produsul $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ să se dividă cu 49. Însă aceasta va avea loc, evident, atunci și numai atunci cînd prin împărțire la 49 numărul n dă unul dintre resturile 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6. Printre oricare 49 numere întregi consecutive există 7 care satisfac această condiție. De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $7/49 = 1/7$.

Probabilitatea ca C_n^7 să se dividă cu 12 este, evident, aceeași cu probabilitatea ca produsul de la numărător $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ să se dividă cu $64\cdot 27$. Printre fiecare șapte numere consecutive există neapărat două care se divid cu 3; dacă, în acest caz, unul dintre ele se divide cu 9, atunci întregul produs se divide neapărat cu 27. Deci, dacă n are forma $9k + r$, unde $r = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6, atunci produsul $n(n-1) \times \times (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ se divide cu 27. (Cazul în care trei din factorii produsului considerat se divid cu 3 face parte din cel precedent, deoarece din trei numere consecutive, multiplii de trei, unul se divide neapărat cu 9.)

Mai departe, într-un șir de șapte numere întregi consecutive, numerele $n-1$, $n-3$ și $n-5$ sau n, $n-2$, $n-4$ și $n-6$ se divid cu 2. În primul caz, din trei numere întregi pare consecutive $n-1$, $n-3$ și $n-5$, sînt divizibile cu 4 sau $n-3$, sau $n-1$ și $n-5$. Dacă numerele divizibile cu 4 sînt $n-1$ și $n-5$, atunci, din aceste două numere consectuive multipli de 4, cel puțin unul se divide cu 8; deci, dacă $n-1$ se divide cu 4, adică n este de forma $4l + 1$, produsul considerat se divide cu $2\cdot 4\cdot 8 = = 64$. Dacă numărul divizibil cu 4 este $n-3$, atunci, pentru ca produsul să se dividă cu 64 este necesar ca $n-3$ să se dividă cu 16, adică ca n să fie de forma $16l + 3$. În sfîrșit, dacă n, $n-2$, $n-4$ și $n-6$ se divid cu 2 (dacă $n = 2l$ este par), atunci, din aceste patru numere întregi consecutive două trebuie să se dividă cu 4 și, deci, în acest caz, produsul considerat se divide neapărat cu $2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 = 64$ (nu este greu de văzut că, în acest caz, el trebuie să se dividă chiar cu 128).

Deci, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ se divide cu 64 atunci cînd n are sau forma $4l + 1$ sau $16l + 3$ sau $2l$ și numai în aceste cazuri, cu alte cuvinte, cînd n este de forma $16l + s$, unde $s = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13 sau 14.

Deci C_n^7 se divide cu 12 dacă n este de forma $9k + r$, unde r are una din cele șapte valori de mai sus și în același timp este de forma $16l + s$, unde s are una din cele 13 valori de mai sus. Datorită acestui fapt orice n pentru care C_n^7 se divide cu 12 trebuie să dea prin împărțirea cu $9\cdot 16 = 144$ unul din cele $7\cdot 13 = 91$ resturi (astfel, dacă n dă prin împărțirea cu 16 restul 8 și prin împărțirea cu 9 restul 5, atunci n este neapărat de forma $144m + 104$; dintre numerele de forma $144m + t$, unde $t=8$, 24, 40, 56,

72, 88, 104, 120, 136, numai numerele de forma $144m+104$ dau restul 5 prin împărțirea cu 9). De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $91/144 \approx 0,63$.

86. Scriind toate puterile consecutive ale lui doi, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, 4 096,..., ne vom convinge că ultima cifră a acestor numere se repetă periodic, cu perioada 4. Prin urmare, din patru puteri consecutive ale lui doi, una se va termina cu 2, deci probabilitatea ca 2^n să se termine cu 2 este egală cu $\frac{1}{4} = 0,25$.

Vom calcula, acum, succesiv, ultimele două cifre ale puterilor lui doi:

$$02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96,$$

$$92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04, 08, \ldots$$

(aceasta nu este greu, deoarece nu avem decît să dublăm de fiecare dată numărul precedent de două cifre ale șirului și, dacă obținem un rezultat din trei cifre, să lăsăm de o parte prima cifră). Astfel, vedem că 2^{22} se termină cu aceleași cifre 04 ca și 2^2; 2^{23} se termină cu aceleași cifre 08 ca și 2^3 etc,. adică ultimele două cifre ale numărului 2^n, începînd cu numărul $2^2 = 04$, se repetă și ele periodic, cu perioada 20. Astfel, din 20 puteri consecutive ale lui doi de la 2^2 la 2^{21} numai 2^9 se termină cu cifrele 12. Deci, din fiecare 20 puteri consecutive ale lui doi, începînd de la 2^k, unde $k \geqslant 2$, una și numai una se termină cu 12. Deci, probabilitatea ca 2^n să se termine cu 12 este egală cu $1/20 = 0,05$.

O b s e r v a ț i e. Se poate arăta că ultimele k cifre ale numerelor 2^n, începînd cu numărul 2^k, se repetă cu perioada $4 \cdot 5^{k-1}$ (v. [56], problema 243)].

87. Fie $q(N)$ numărul acelora dintre primele N puteri ale lui doi, care încep cu cifra 1. Trebuie să stabilim cu ce este egală $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{q(N)}{N}$.

Să observăm că nu pot exista două puteri diferite ale lui doi, care să aibă un număr egal de cifre și să înceapă cu cifra 1. Într-adevăr, dacă ar exista două numere care încep cu cifra 1 și care au același număr de cifre, atunci cel mai mare dintre ele ar fi totdeauna mai mic decît dublul celui de-al doilea; prin urmare ele nu pot fi puteri ale lui doi. Pe de altă parte, c e a m a i m i c ă dintre toate puterile lui doi care au un număr dat de cifre mai mare decît 1 trebuie neapărat să înceapă cu cifra 1: în caz contrar, împărțind acest număr cu 2, am obține o putere mai mică a lui doi care are același număr de cifre (astfel, cea mai mică putere a lui doi cu două cifre este 16, cea mai mică cu trei cifre este 128, cea mai mică cu patru cifre este 1 024 etc.). Este esențial să mai observăm, că există puteri ale lui doi care au orice număr de cifre: într-adevăr, dacă 2^k e s t e c e a m a i m a r e dintre puterile lui doi care are p cifre, puterea următoare 2^{k+1} va avea $p+1$ cifre; deci pentru orice p există puteri ale lui doi cu p cifre.

Fie 2^N un număr de n cifre. Atunci, printre primele N puteri ale lui doi se va găsi un număr de n cifre care începe cu 1, un număr de $n-1$

cifre care începe cu 1, un număr de $n-2$ cifre care începe cu 1 etc. pînă la un număr de două cifre care începe cu 1 (anume numărul 16). Astfel $q(N) = n-1$.

Dacă n este numărul de cifre ale numărului 2^N, atunci $n-1$ este caracteristica logaritmului în baza zece a numărului 2^N, adică este partea întreagă a numărului $\lg(2^N) = N \lg 2$. Cu alte cuvinte, $N \lg 2 = n - 1 + \alpha$, unde $0 \leqslant \alpha < 1$ și $q(N) = n - 1 = N \lg 2 - \alpha$. Deci,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{q(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N \lg 2 - \alpha}{N} = \lg 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha}{N} = \lg 2,$$

adică probabilitatea ca o putere a lui doi să înceapă cu cifra 1 este egală cu $\lg 2 \approx 0{,}30103$.

88. a) Problema poate fi formulată în modul următor: trebuie demonstrat că pentru orice număr întreg M există un număr n, astfel încît 2^n să înceapă cu o combinație de cifre care reprezintă scrierea în baza zece a numărului M. Cu alte cuvinte, trebuie să demonstrăm că pentru orice număr întreg M pot fi determinate două numere pozitive întregi n și k, astfel încît

$$10^k \cdot M \leqslant 2^n < 10^k(M+1).$$

Luînd logaritmii acestor inegalități, obținem inegalitățile echivalente

$$\lg M + k \leqslant n \lg 2 < \lg(M+1) + k.$$

Vom demonstra acum existența numerelor n și k care verifică aceste ultime inegalități.

Să însemnăm pe axa numerelor toate segmentele cuprinse între numerele $\lg M + k$ și $\lg(M+1) + k$, unde k parcurge toate numerele întregi pozitive. Toate aceste segmente au aceeași lungime, egală cu $\lg(M+1) - \lg M = \lg \frac{M+1}{M} = \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$, și toate se obțin din primul segment $[\lg M, \lg(M+1)]$ prin translații de distanțe întregi 1, 2, 3, ... Numerele $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2, \ldots, n \lg 2, \ldots$, formează o progresie aritmetică; trebuie să demonstrăm că termenii acestei progresii vor fi conținuți în cele din urmă într-unul din segmentele considerate.

Este comod să presupunem că axa numerelor este înfășurată pe un cerc de rază $1/(2\pi)$ (adică pe un cerc de lungime 1). În acest caz, toate punctele a căror distanță este exprimată printr-un număr întreg vor coincide și, în particular, vor coincide toate segmentele considerate (fig. 78). În ce privește punctele $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2, \ldots$, rezultă că nu există două dintre ele care să coincidă: dacă punctele $p \lg 2$ și $q \lg 2$ ar coincide, aceasta ar însemna că diferența $p \lg 2 - q \lg 2$ ar fi egală cu lungimea cercului luată de r ori, adică ar fi egală cu numărul întreg r; în acest caz, ar fi valabilă egalitatea $\lg 2 = r/(p-q)$, unde r, p și q sînt numere întregi, ceea ce contrazice faptul că $\lg 2$ este un număr irațional [1]. Deci valorile $\lg 2$, $2 \lg 2$, $3 \lg 2, \ldots$ formează

[1] Faptul că $\lg 2$ este irațional este cu totul evident: în caz contrar ar avea loc egalitatea $2 = 10^{m/n}$, cu m și n numere întregi, adică $2^n = 10^m$. Dar 2 la nici o putere întreagă nu poate fi o putere a lui 10, deoarece orice putere a lui 10 conține factorul prim 5.

pe un cerc un şir infinit de puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (v. fig. 78, unde sînt reprezentate pe un cerc primele 15 puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{15}$). Trebuie să arătăm că unele puncte din şirul $A_1, A_2, A_3, \ldots$ cu numere suficient de mari (astfel încît puterea respectivă a lui 2 are mai multe semne decît M) vor fi cuprinse în intervalul tăiat pe cerc de punctele $\lg M$, $\lg(M+1)$.

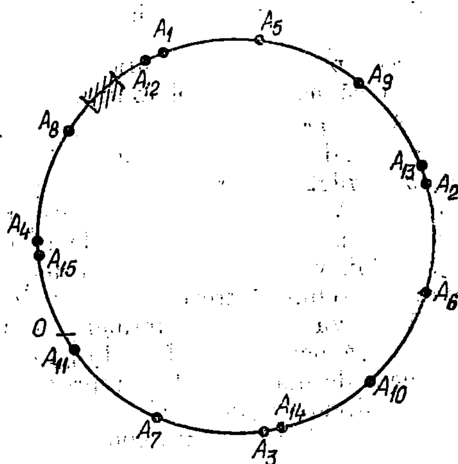


Fig. 78.

Deoarece pe cerc au fost dispuse o infinitate de puncte din şirul nostru, rezultă că printre ele se pot găsi două puncte a căror distanţă (adică lungimea arcului de cerc ale cărui extremităţi sînt aceste puncte) să fie mai mică decît orice număr dat — dacă distanţa dintre oricare două puncte ale şirului ar fi mai mare decît un număr dat α, atunci pe cerc nu s-ar putea afla decît un număr finit de termeni ai şirului. Fie A_p şi A_{p+q} două puncte din şirul considerat, a căror distanţă este mai mică decît lungimea intervalului tăiat pe cerc $\left[\text{egală cu } \lg\left(1+\frac{1}{M}\right)\right]$. Să observăm că distanţa dintre punctele A_p şi A_{p+q} este egală cu distanţa dintre punctele A_{p+q} şi A_{p+2q}, A_{p+2q} şi A_{p+3q}, A_{p+3q} şi A_{p+4q} etc. (aceasta rezultă din faptul că $(p+q)\lg 2 - p\lg 2 = q\lg 2 = (p+2q)\lg 2 - (p+q)\lg 2 = (p+3q)\lg 2 - (p+2q)\lg 2 = \ldots$). Astfel, punctele $A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, A_{p+3q}, \ldots$ se succed pe cerc la aceeaşi distanţă. Dar, deoarece distanţa dintre aceste puncte vecine este mai mică decît lungimea intervalului considerat tăiat pe cerc, atunci din oricare k puncte consecuvtive, unde k este un număr întreg suficient de mare pentru ca produsul lui k cu distanţa dintre punctele A_p şi A_{p+q} să fie mai mare decît unu, cel puţin unul dintre ele trebuie să fie cuprins în intervalul tăiat pe cerc (compară cu fig. 78, unde ca şir de puncte $A_p, A_{p+q}, A_{p+2q}, \ldots$ poate fi considerat, de exemplu, şirul $A_1, A_{12}, A_{23}, A_{34}, \ldots$, din care numai primele două puncte sînt notate pe figură). Cu aceasta se încheie demonstraţia.

b) Folosind consideraţiile geometrice din soluţia problemei a), putem formula problema pusă în modul următor: care este probabilitatea ca un punct luat la întîmplare din şirul $A_1, A_2, A_3, \ldots$ să fie cuprins în intervalul de lungime $a = \lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ tăiat pe cerc. Vom demonstra că probabilitatea căutată este egală chiar cu lungimea a a acestui segment.

Vom alege un număr întreg m astfel, încît să existe două puncte A_p şi A_{p+q} ale şirului $A_1, A_2, A_3, \ldots$, a căror distanţă α să fie cuprinsă între $\frac{1}{m}$ şi $\frac{1}{m+1}$. În soluţia problemei a) s-a arătat că pot fi totdeauna alese

două puncte A_p și A_{p+q} astfel, încît distanța dintre ele să fie cît de mică posibil; aceasta înseamnă că, printr-o alegere convenabilă a punctelor A_p și A_{p+q}, putem găsi un număr m oricît de mare. Vom demonstra acum că probabilitatea căutată aici diferă de $a = \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$ cu nu mai mult de $\frac{2}{m}$; deoarece pentru un m suficient de mare, fracția $2/m$ va fi oricît de mică, rezultă că această probabilitate este egală cu a.

Să observăm că pentru orice k distanța dintre punctele A_k și A_{k+q} va fi egală cu distanța dintre punctele A_p și A_{p+q} (deoarece $(k + q)\lg 2 - k\lg 2 = (p + q)\lg 2 - p\lg 2$), adică va fi egală cu α. Vom alege acum un număr oarecare N și vom arăta cîți dintre primii N termeni ai șirului $A_1, A_2, A_3, \ldots$ vor fi cuprinși în intervalul de lungime a tăiat pe cerc. Pentru simplificarea calculului, vom presupune mai departe că N este multiplu de qm; deoarece apoi va trebui să trecem la limită pentru $N \to \infty$, această restricție impusă lui N nu va avea vreo influență asupra rezultatului final (putem face pe N să crească nemărginit, lăsîndu-l tot timpul multiplu de qm; orice alt număr suficient de mare îl putem reprezenta sub forma unei sume dintre un număr care se divide cu qm și restul care nu este mai mare decît qm și care nu are nici un rol cînd $N \to \infty$; compară cu exemplul studiat la p. 30. Punctele

$$A_1, A_{1+q}, A_{1+2q}, \ldots, A_{1+(m-1)q}$$

sînt dispuse pe cerc la distanța α unul de altul $\Big($unde α este cuprins între $\frac{1}{m}$ și $\frac{1}{m+1}\Big)$; excepție fac punctele marginale A_1 și $A_{1+(m-1)q}$, a căror distanță este mai mare decît $1 - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$, însă mai mică decît $1 - \frac{m-1}{m+1} = \frac{2}{m+1}$ $\Big($deoarece fiecare dintre cele $m - 1$ segmente $A_1, A_{1+q}, A_{1+q}A_{1+2q}, \ldots, A_{1+(m-2)q}A_{1+(m-1)q}$ are lungimea α, unde $\frac{1}{m} > \alpha \geqslant \frac{1}{m+1}\Big)$. Să presupunem acum că numărul $a = \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$ este cuprins între $\frac{n}{m}$ și $\frac{n+1}{m}$ (unde $n < m$); atunci în interiorul intervalului considerat de lungime a vor fi cuprinse nu mai mult de $n + 2$ puncte, însă nici mai puțin de $n - 1$ puncte din totalul celor m puncte considerate.

Într-adevăr, dacă k este numărul punctelor considerate cuprinse în segmentul de lungime a, atunci în acest segment se vor introrduce $k - 1$ segmente de lungime α; deci,

$$(k-1)\alpha \leqslant a < \frac{n+1}{m}; \quad k - 1 < \frac{n+1}{m} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

sau, deoarece $\alpha \geqslant \frac{1}{m+1}$, $\frac{1}{\alpha} \leqslant m+1$,

$$k-1 < \frac{n+1}{m}(m+1) = (n+1)\left(1+\frac{1}{m}\right) = n+1+\frac{n+1}{m}.$$

Însă $k-1$ este număr întreg, iar $\frac{n+1}{m} < 1$; deci

$$k-1 \leqslant n+1, \quad k \leqslant n+2.$$

Mai departe, $k+2$ intervale de lungime α vor acoperi întregul interval dat de lungimea a; deci

$$(k+2)\alpha \geqslant a \geqslant \frac{n}{m}, \quad k+2 \geqslant \frac{n}{m}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Deoarece $\alpha < 1/m$, $1/\alpha > m$, din ultima inegalitate rezultă

$$k+2 > n, \quad k > n-2 \geqslant n-1.$$

La fel se demonstrează că din fiecare din următoarele $q-1$ grupuri de cîte m puncte

$$A_2, A_{2+q}, A_{2+2q}, \ldots, A_{2+(m-1)q};$$
$$A_3, A_{3+q}, A_{3+2q}, \ldots, A_{3+(m-1)q};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_q, A_{2q}, A_{3q}, \ldots, A_{mq}$$

în interiorul intervalului de lungime a sînt cuprinse nu mai mult de $n+2$ puncte, dar nici mai puțin de $n-1$ puncte. Deci, prin primele mq puncte ale șirului nostru, în interiorul intervalului considerat se vor introduce nu mai mult de $(n+2)q$ puncte și nu mai puțin de $(n-1)q$ puncte.

În același mod se arată că din orice mq puncte consecutive din șirul $A_1, A_2, A_3, \ldots$, în interiorul intervalului considerat se vor introduce nu mai mult de $(n+2)q$ puncte și nu mai puțin de $(n-1)q$ puncte. De aici rezultă că, pentru N multiplu de mq, probabilitatea ca un punct luat la întîmplare din totalul primelor N puncte ale șirului să se afle în interiorul intervalului de lungime a este cuprinsă între $(n-1)/m$ și $(n+2)/m$. Deoarece aceste limite nu depind de N, tot între aceleași limite se va afla probabilitatea și în cazul unui punct luat la întîmplare din î n t r e g șirul $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Am demonstrat deci că, dacă $a = \lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ este cuprins între $\frac{n}{m}$ și $\frac{n+1}{m}$, probabilitatea căutată să află între $(n-1)/m$ și $(n+2)/m$, adică diferă de a cu nu mai mult de $2/m$. De aici, după cum am mai observat, rezultă că această probabilitate este egală cu a.

Astfel, probabilitatea ca o putere a lui doi să înceapă cu numărul M este egală cu $\lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$. [În particular, dacă $M = 1$, obţinem din nou rezultatul problemei 87: probabilitatea ca 2^n să înceapă cu 1 este egală cu $\lg\left(1+\frac{1}{1}\right)=\lg 2$.]

Este interesant de observat că cu aceeaşi expresie este egală probabilitatea ca o putere a oricărui număr întreg al unui logaritm în baza zece este iraţional (adică a oricărui număr întreg diferit de o putere a lui 10) să înceapă cu numărul M. Demonstraţia acestei afirmaţii nu diferă cu nimic de demonstraţia dată pentru puterile lui doi.

89. a) Trebuie să determinăm probabilitatea ca două numere întregi n şi m, luate la întîmplare, să nu aibă nici un divizor prim comun. Vom începe cu cercetarea următoarei probleme mult mai simple: care este probabilitatea ca două numere întregi n şi m, luate la întîmplare, să nu aibă pe 2 ca divizor comun (adică să nu fie amîndouă pare). Ţinînd seamă de definiţia probabilităţii pentru asemenea cazuri, trebuie să examinăm mai întîi această problemă pentru numerele n şi m luate din primii N termeni ai şirului natural şi apoi să facem pe N să tindă către infinit. Pentru simplificarea calculului, vom presupune că numărul considerat N este par. Este uşor de văzut că această presupunere nu va modifica rezultatul final: într-adevăr, nu este greu de demonstrat că, pentru valori mari ale lui N, diferenţa dintre probabilitatea căutată pentru primii N termeni ai şirului natural şi aceeaşi probabilitate pentru $N+1$ termeni este o mărime a cărei limită este egală cu zero pentru $N \to \infty$ (deoarece în cazul al doilea probabilitatea ca cel puţin unul dintre numerele n şi m să fie egal cu $N + 1$, adică să nu se afle printre primii N termeni ai şirului natural, este egală cu

$$\frac{2N+1}{(N+1)^2}=\left(\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{N}\right)^2,$$

adică tinde către zero pentru $N \to \infty$); deci limita acestei probabilităţi cînd $N \to \infty$, pentru N impar, coincide cu aceeaşi limită pentru N par.

Vom calcula acum numărul total al cazurilor egal posibile şi numărul cazurilor favorabile, pentru N par. Deoarece atît n cît şi m pot lua N valori diferite, rezultă că numărul total al cazurilor egal posibile este aici egal cu $N N = N^2$. Nefavorabile vor fi acele cazuri în care atît n cît şi m iau cîte una dintre cele $N/2$ valori pare posibile $2, 4, \ldots, N$; numărul unor astfel de cazuri este egal cu $\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2}=\frac{N^2}{4}$. Celelalte $N^2-\frac{N^2}{4}$ cazuri vor fi favorabile; deci probabilitatea căutată este egală cu

$$\left(N^2-\frac{N^2}{4}\right)\Big|N^2 = 1-\frac{1}{4}.$$

Deoarece această expresie nu depinde de N, limita ei pentru $N \to \infty$ are aceeaşi valoare $1-\frac{1}{4}$.

Vom calcula acum valoarea probabilității ca d o u ă n u m e r e î n t r e g i n ș i m, l u a t e l a î n t î m p l a r e, s ă n u a i b ă c a d i v i z o r c o m u n n i c i p e 2 n i c i p e 3. Aici trebuie iarăși să începem cu cazul în care n și m sînt luați dintre primii N termeni ai șirului natural. Pentru simplificarea calculelor este comod să considerăm că N este divizibil cu 6. Este clar că nici această presupunere nu va avea vreo influență asupra rezultatului final: orice număr N poate fi pus sub forma $N = N_1 + k$, unde N_1 se divide cu 6, iar k nu este mai mare decît 5; în acest caz, diferența dintre probabilitatea care ne interesează pentru primii N_1 termeni ai șirului și aceeași probabilitate pentru primii N termeni va fi o mărime, a cărei limită este egală cu zero, cînd $N \to \infty$ (probabilitatea ca în cazul al doilea cel puțin unul dintre numerele n și m să fie mai mare decît N_1 este, aici, egală cu

$$\frac{2kN + k^2}{(N + k)^2} = \left(\frac{2k}{N} + \frac{k^2}{N^2}\right) \Big/ \left(1 + \frac{k}{N}\right)^2,$$

adică tinde către zero cînd $N \to \infty$). Numărul total al cazurilor egal posibile ale experimentului este, aici, din nou egal cu N^2. Din aceste N^2 cazuri, un număr de $\frac{N}{3} \cdot \frac{N}{3} = \frac{N^2}{9}$ corespund cazurilor în care și n și m sînt divizibili cu 3. Să cercetăm mai amănunțit aceste $\frac{N^2}{9}$ cazuri: este clar că $\frac{N}{6} \cdot \frac{N}{6} = \frac{N^2}{36}$ dintre ele corespund perechilor de numere pare, iar celelalte $\frac{N^2}{9} - \frac{N^2}{36} = \frac{N^2}{9}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ perechilor în care cel puțin unul dintre numerele n sau m este impar. Deci vom obține numărul total al cazurilor favorabile, dacă din $N^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ cazuri pentru care nici n și nici m nu se divid cu 2 vom scădea $\frac{N^2}{9}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ cazuri în care n și m se divid ambii cu 3.

Astfel, pentru N divizibil cu 6, din numărul total N^2 de cazuri vor fi favorabile $N^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)$; deci, probabilitatea ca n și m să nu aibă ca divizor comun nici pe 2 nici pe 3 este egală, aici, cu

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right).$$

Deoarece această expresie nu depinde de N, tot aceasta va fi probabilitatea respectivă și pentru cazul numerelor n și m luate din întreg șirul numerelor naturale.

La fel se determină probabilitatea ca n u m e r e l e n ș i m s ă n u a i b ă c a d i v i z o r c o m u n n i c i p e 2, n i c i p e 3, n i c i p e 5. Vom considera mai întîi că n și m sînt luați dintre primii N termeni ai șirului numerelor naturale; pentru simplificarea calculului, este comod să considerăm, că

N se divide cu $2 \cdot 3 \cdot 5=30$. Din N^2 cazuri egal posibile ale experienței care constă în extragerea la întîmplare a două numere n și m dintre primele N numere naturale, $\frac{N}{5} \cdot \frac{N}{5} = \frac{N^2}{25}$ corespund cazurilor în care n și m se divid cu 5. În mod analog cu cele spuse mai înainte se arată că, dintre aceste $\frac{N^2}{25}$ cazuri, $\frac{N^2}{25}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)$ sînt cazurile în care n și m nu au ca divizor comun nici pe 2, nici pe 3. Deci, numărul cazurilor în care n și m nu admit ca divizor comun nici pe 2, nici pe 3, nici pe 5 este egal cu

$$N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)-\frac{N^2}{25}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=$$
$$=N^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right).$$

De aici rezultă că probabilitatea ca n și m să nu aibă ca divizor comun nici pe 2, nici pe 3, nici pe 5 este egală cu

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right).$$

Deoarece ultima expresie nu depinde de N, tot aceasta va fi probabilitatea corespunzătoare și în cazul numerelor m și n luate din întregul șir al numerelor naturale.

La fel se demonstrează că *probabilitatea ca două numere luate la întîmplare să nu aibă ca divizor comun nici pe* 2, *nici pe* 3, *nici pe* 5, ..., *nici pe* p_k, *unde* p_k *este numărul prim de rang* k, *este egală cu*

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right) \qquad (*)$$

[expresia (*) pentru orice k poate fi ușor dedusă prin metoda inducției complete]. De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu limita către care tinde expresia (*) cînd numărul factorilor crește nemărginit; dacă această limită nu există, înseamnă că nu există nici probabilitatea căutată.

Pentru a arăta că limita (*) există și a da totodată un mijloc comod de calcul cu orice grad de precizie, vom transforma această expresie într-o oarecare măsură. Să examinăm în primul rînd expresia inversă lui (*)

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}.$$

Vom reprezenta acum fiecare factor din ultima expresie sub forma unei sume de termeni ai unei progresii geometrice infinite:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = 1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{27}\right)^2+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}} = 1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{25}\right)^2+\left(\frac{1}{125}\right)^2+\cdots,$$

....

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}} = 1+\left(\frac{1}{p_k}\right)^2+\left(\frac{1}{p_k^2}\right)^2+\left(\frac{1}{p_k^3}\right)^2+\cdots$$

Înmulțind toate aceste expresii, vom obține

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5^2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}} =$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots,$$

unde în membrul al doilea avem suma pătratelor inverselor tuturor numerelor întregi care nu admit alți divizori primi în afară de 2, 3, 5, ..., p. Acum, făcînd să crească nemărginit numărul k al numerelor prime care figurează în expresia (*), ne vom convinge că *probabilitatea căutată este egală cu unu împărțit la suma seriei*

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots \qquad (**)$$

a inverselor pătratelor tuturor numerelor întregi. Luînd un număr suficient de mare de termeni ai seriei (**), putem determina suma acestei serii și, deci, probabilitatea căutată, cu orice grad de precizie.

Pentru a determina probabilitatea căutată cu o eroare mai mică decît 0,1, vom observa că suma seriei (**) este mai mică decît

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n} = 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=1\frac{3}{4}-\frac{1}{n}<1\frac{3}{4};$$

de aici rezultă că probabilitatea căutată este mai mare decît $1:\frac{7}{4}=0{,}571\ldots$ Pe de altă parte, suma seriei (**) este mai mare decît

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1\frac{7}{12}-\frac{1}{n+1}=1\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{n+1}\right),$$

adică este mai mare decît 3/2, dacă $n \geqslant 12$. De aici rezultă că probabilitatea căutată este mai mică decît $1:\frac{3}{2}=0{,}666\ldots$

Deci probabilitatea ca două numere luate la întîmplare să fie prime între ele este egală cu 0,6 cu o eroare mai mică decît 0,1 (v., de asemenea, problema 90).

b) Ca şi în soluţia problemei a), să demonstrează că probabilitatea ca patru numere luate la întîmplare să nu se dividă toate cu 2 este egală cu $1-\frac{1}{2^4}$; probabilitatea ca să nu se dividă toate cu 2 şi să nu se dividă toate cu 3 este egală cu $\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)$; probabilitatea ca să nu se dividă toate nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5 este egală cu $\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)$ etc. Probabilitatea ca patru numere luate la întîmplare să nu se dividă toate cu 2, nici cu 3, nici cu 5, ..., nici cu p_k, unde p_k este numărul prim de rang k, este egală cu

$$\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^4}\right).$$

Deci probabilitatea căutată, ca patru numere luate la întîmplare să aibă un factor comun, este egală cu

$$1-\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\cdots,$$

unde punctele înseamnă că produsul este extins la toate numerele prime din şirul numerelor naturale.

Pentru calculul produsului infinit vom folosi faptul că

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\cdots}=$$
$$=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots,$$

unde în membrul al doilea figurează suma inverselor puterii a patra a tuturor numerelor întregi pozitive; demonstrația acestei relații este în totul analoagă cu demonstrația relației asemănătoare utilizată în soluția problemei a). Însă

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+$$
$$+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}\right)+\left(\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}\right)+\ldots<1+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)+\left(\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}\right)+\ldots=1+\frac{2}{2^4}+\frac{4}{4^4}+\frac{8}{8^4}+\cdots=$$
$$=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}.$$

Pe de altă parte,

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+$$
$$+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{16^4}+\cdots=1+\frac{1}{2^4}+$$
$$+\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}\right)+\left(\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}\right)+\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{11^4}+\frac{1}{12^4}+\frac{1}{13^4}+\frac{1}{14^4}+\frac{1}{15^4}+\frac{1}{16^4}\right)+\cdots>$$

De aici rezultă că produsul infinit

$$\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\cdots$$

este mai mare decît $7/8 = 0{,}875$, însă este mai mic decît $14/15 = 0{,}933$. Deci, probabilitatea căutată este mai mică decît $1/8 = 0{,}125$, însă mai mare decît $1/15 = 0{,}0666$. Deci, cu o eroare mai mică decît 0,05 această probabilitate este egală cu 0,1.

90. a) În rezolvarea problemei 89, a) s-a arătat că probabilitatea ca două numere luate la întîmplare să fie prime între ele este egală cu unu împărțit la suma seriei

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Dar suma acestei serii este egală cu $\pi^2/6$ [v. problema 143, a)]. De aici rezultă că probabilitatea care ne interesează este egală cu $6/\pi^2 = 0{,}608\ldots$

b) În rezolvarea problemei 89, b) s-a arătat că probabilitatea ca patru numere luate la întîmplare să aibă un factor comun este egală cu

$$1-\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots}.$$

Însă suma seriei $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$ este efgală cu $\pi^4/90$ [v. problema 143,b)].

De aici rezultă că probabilitatea căutată este egală cu $1-\frac{90}{\pi^4}=0{,}075\ldots$

91. Pentru rezolvarea acestei probleme trebuie, în primul rînd, să calculăm cîte numere întregi, nu mai mari decît un anumit număr întreg N, au un divizor prim mai mare decît rădăcina pătrată a numărului dat.

Orice număr poate avea cel mult un astfel de divizor prim. Fie 2, 3, 5, 7, 11,..,p_k toate numerele prime nu mai mari decît numărul N. Vom împărți aceste numere prime în două grupuri: în primul grup vom trece numerele prime 2, 3, 5, ..., p_i nu mai mari decît $\sqrt{N}$, iar în al doilea grup numerele prime $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k$ mai mari decît $\sqrt{N}$, însă nu mai mari decît N. Fie p un anumit număr prim din primul grup; este ușor de înțeles că acesta va fi un divizor mai mare decît rădăcina pătrată a numărului considerat, pentru următoarele $p - 1$ numere: p, $2p$, $3p$, ..., $(p - 1)p$. Astfel, vor exista în total

$$(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)$$

numere întregi care au ca divizor prim, mai mare decît rădăcina pătrată a numărului considerat, unul dintre numerele prime 2, 3, 5, .., p_i; taote aceste numere, bineînțeles, vor fi mai mici decît numărul N.

Să cercetăm acum un anumit număr prim q din grupul al doilea. Deoarece q^2 este mai mare decît N, rezultă că pentru orice număr întreg care nu este mai mare decît N divizorul q, dacă există, va fi mai mare decît rădăcina pătrată a numărului însuși considerat; de aceea, pentru a ști cîte numere cuprinse între 1 și N conțin ca divizor pe q, care este mai mare decît rădăcina pătrată a numărului dat, rămîne numai să determinăm cîte dintre aceste numere sînt divizibile cu q. Numărul unor astfel de numere este, evident, egal cu $\left[\frac{N}{q}\right]$[1] (acestea vor fi numerele q, $2q$, $3q$,..., $\left[\frac{N}{q}\right]q$). Astfel, numărul numerelor de la 1 la N, pentru care unul dintre numerele prime $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k$ este un divizor mai mare decît rădăcina pătrată a numărului considerat, este egal cu

$$\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{p_k}\right],$$

iar numărul total al numerelor de la 1 la N, care au divizori primi mai mari decît rădăcina pătrată a numărului respectiv, este egal cu

$$(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)+\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{p_k}\right].$$

Deci probabilitatea ca un număr întreg care nu este mai mare decît N să aibă un divizor prim mai mare decît rădăcina sa pătrată este egală cu

$$\frac{(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)+\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{p_k}\right]}{N};$$

aici 2, 3, 5, ..., p_i sînt toate numerele prime nu mai mari decît $\sqrt{N}$, iar $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k$ sînt toate numerele prime nu mai mari decît N, însă sînt

[1] $\left[\frac{N}{q}\right]$ înseamnă partea întreagă a numărului $\frac{N}{q}$.

mai mari decît $\sqrt{N}$. Problema constă în găsirea limitei acestei expresii cînd $N \to \infty$.

Să considerăm în primul rînd expresia

$$\frac{(2-1)+(3-1)+(5-1)+\ldots+(p_i-1)}{N}.$$

Deoarece fiecare dintre termenii numărătorului este mai mic decît $\sqrt{N}$, rezultă că această expresie este mai mică decît

$$\frac{\overbrace{\sqrt{N}+\sqrt{N}+\ldots+\sqrt{N}}^{\text{de } i \text{ ori}}}{N}=\frac{i\sqrt{N}}{N}=\frac{i}{\sqrt{N}}.$$

Aici i este numărul numerelor prime nu mai mari decît $\sqrt{N}$ sau, cu notațiile indicate la p. 61, $i=\pi(\sqrt{N})$. Însă, conform problemei 165, $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0$ acest rezultat se deduce de asemenea din problema 166). De aici rezultă că $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{}{\sqrt{N}}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\pi\sqrt{N}}{\sqrt{N}}=0$, deci cu atît mai mult

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(2-1)+(3-1)+\ldots+(p_i-1)}{N}=0.$$

Acum vom considera expresia

$$\frac{\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]+\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]+\cdots\left[\frac{N}{p_k}\right]}{N}.$$

Vom observa, mai întîi, că dacă suprimăm peste tot la numărător semnul părții întregi, admitem o eroare nu mai mare decît $\frac{k-i}{N}$ (deoarece $\left[\frac{N}{p_{i+1}}\right]$ diferă de $\frac{N}{p_{i+1}}$ cu mai puțin decît 1, $\left[\frac{N}{p_{i+2}}\right]$ diferă de $\frac{N}{p_{i+2}}$ cu mai puțin decît 1 etc. pentru fiecare dintre cei $k-i$ termeni ai numărătorului fracției). Însă chiar fracția k/N tinde către zero pentru $N\to\infty$ [deoarece $k=\pi(N)$ este numărul numerelor prime nu mai mari decît N și putem iarăși să folosim rezultatul problemeu 165]. De aceea, este suficient să determinăm limita către care tinde, pentru $N\to\infty$, expresia

$$\frac{\frac{N}{p_{i+1}}\;\frac{N}{p_{i+2}}+\cdots+\frac{N}{p_k}}{N}=\frac{1}{p_{i+1}}+\frac{1}{p_{i+2}}+\cdots+\frac{1}{p_k};$$

valoarea acestei limite este egală cu probabilitatea care ne interesează.

Să scriem acum ultima expresie sub forma

$$\frac{1}{p_{i+1}}+\frac{1}{p_{i+2}}+\cdots+\frac{1}{p_k}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_i}\right).$$

Dar conform teoremei a doua a lui Mertens [v. problema 169, b)], sumele

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k} \quad \text{și} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_i}$$

sînt egale respectiv cu $\ln\ln N+\beta+\varepsilon_1$ și $\ln\ln(\sqrt{N})+\beta+\varepsilon_2$, unde numerele ε_1 și ε_2, care depind, desigur, de N, tind către zero pentru $N\to\infty$. De aici, rezultă că limita căutată este egală cu

$$(\ln\ln N+\beta)-(\ln\ln(\sqrt{N})+\beta)=\ln\ln N-\ln\left(\frac{1}{2}\ln N\right)=$$

$$=\ln\ln N-(\ln\ln N-\ln 2)=\ln 2.$$

Astfel, probabilitatea ca un număr întreg n luat la întîmplare să admită un divizor prim mai mare decît rădăcina pătrată a acelui număr este egală cu $\ln 2=0{,}693...$

92. Toate cazurile posibile ale experimentului considerat în această problemă constau în sosirea primei persoane într-un moment oarecare x dintre orele 12 și 13 și în sosirea celei de-a doua persoane într-un al doilea moment y din același interval. Astfel, aceste cazuri sînt definite de două numere x, y, unde $0\leqslant x\leqslant 1$ și $0\leqslant y\leqslant 1$. Considerînd aceste numere drept coordonatele punctelor din plan, vom reprezenta mulțimea tuturor cazurilor sub forma

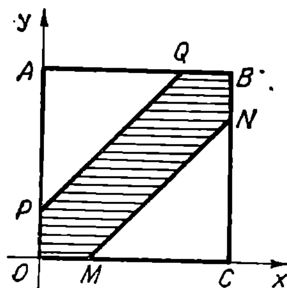
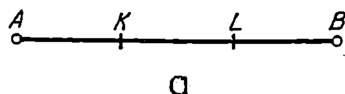


Fig. 79



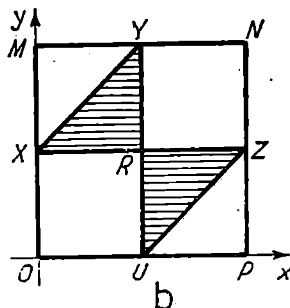


Fig. 80

mulțimii de puncte din pătratul $OABC$ cu latura 1 (fig. 79). Deoarece x și y sînt luați la întîmplare între orele 12 și 13, probabilitatea ca x (respectiv y) să se situeze în interiorul unui anumit interval de pe axa absciselor (respectiv

a ordonatelor) este egală cu lungimea acestui interval (amintim că în cazul nostru $OA = OC = 1$). De aici rezultă că probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unui anumit dreptunghi din interiorul lui $OABC$ este egală cu aria acestui dreptunghi. Deoarece orice domeniu poate fi acoperit cu oricîtă precizie de o rețea de dreptunghiuri mici, rezultă că probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul oricărui domeniu este egală cu aria acestui domeniu (această proprietate poate fi luată, dacă este util, ca definiția expresiei „la întîmplare" care figurează în enunțul problemei). Cazurilor favorabile din problema noastră le vor corespunde, evident, acele puncte (x, y) pentru care $|x - y| \leqslant 1/4$. Toate punctele de acest fel se află în domeniul hașurat din fig. 79. mărginit de dreptele MN și PQ, pentru care $x - y = 1/4$ și respectiv $y - x = 1/4$. Aici $OM = BN = OP = BQ = 1/4$; deci, aria $MCN =$ aria $PAQ = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$ și probabilitatea căutată este egală cu

$$\text{aria } PQBNMO = 1 - \text{aria } MCN - \text{aria } PAQ = 1 - \frac{18}{32} = \frac{7}{16}.$$

93. P r i m a   r e z o l v a r e. Să presupunem că bara considerată este AB, iar K și L două puncte de frîngere ale acestei bare (fig. 80, *a*). Vom nota lungimea AB cu l. Toate cazurile posibile ale experienței considerate în această problemă se determină prin poziția punctelor K și L; cu alte cuvinte, prin două numere $AK = x$ și $AL = y$, fiecare dintre ele fiind luat la întîmplare între O și l. Considerînd aceste numere drept coordonate ale punctelor în plan, vom reprezenta mulțimea acestor cazuri sub forma unei mulțimi de puncte din pătratul $OMNP$ cu latura l (fig. 80, *b*). Ca și în problema 92, probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unei părți oarecare a acestui pătrat va fi egală cu raportul dintre aria acestei părți și aria pătratului întreg. Astfel, mai rămîne să determinăm care parte a pătratului $OMNP$ va fi umplută de punctele corespunzătoare cazurilor favorabile ale experimentului.

Pentru ca din cele trei segmente în care se rupe bara să poată fi format un triunghi, trebuie numai ca fiecare dintre ele să fie mai mic decît suma celorlalte două. Deoarece suma celor trei segmente este egală cu l, rezultă că această condiție este echivalentă cu următoarea: fiecare dintre cele trei segmente trebuie să fie mai mic decît $l/2$. Să cercetăm, acum, în ce cazuri această condiție nu este îndeplinită.

1°. Segmentul din stînga va fi mai mare decît $l/2$, dacă atît x cît și y vor fi mai mari decît $l/2$. Acestor cazuri le vor corespunde punctele situate în interiorul pătratului mic $YRZN$ cu latura $l/2$, care ocupă sfertul de sus din dreapta al pătratului $OMNP$ (fig. 80, *b*).

2°. Segmentul din dreapta va fi mai mare decît $l/2$, dacă atît x cît și y vor fi mai mici decît $l/2$. Acestor cazuri le vor corespunde punctele situate în interiorul pătratului mic $XRUO$ cu latura $l/2$, care ocupă sfertul de jos din stînga al pătratului $OMNP$ (fig. 80, *b*).

3°. Segmentul din mijloc va fi mai mare decît $l/2$, dacă x și y verifică inegalitățile $y - x > l/2$ sau $x - y > l/2$. Mulțimea punctelor (x, y) pentru care $y - x = l/2$ este reprezentată în figura noastră prin dreapta XY, iar mulțimea punctelor pentru care $x - y = l/2$, prin dreapta ZU. Nu este greu

de văzut că punctele pentru care $y - x > l/2$ vor umple în figura considerată triunghiul XMY, iar punctele pentru care $x - y > l/2$ triunghiul UPZ. Astfel, cazurilor nefavorabile de tipul al treilea le vor corespunde punctele situate în interiorul triunghiurilor XMY și UPZ.

În sfîrșit, cazurilor favorabile le vor corespunde punctele care umplu partea din pătratul $OMNP$ hașurată în fig. 80, *b*. Deoarece aria acestei părți este egală cu 1/4 din aria întregului pătrat mare, rezultă că probabilitatea cătată este egală cu 1/4.

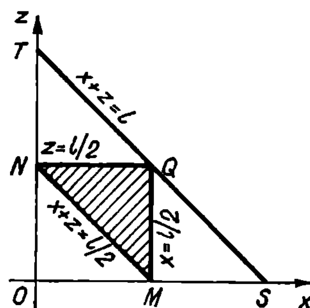


Fig. 81

R e z o l v a r e a a d o u a. În prima rezolvare am caracterizat un caz al experimentului prin numerele $x = AK$ și $y = AL$. În locul acestora putem folosi, de asemenea, numerele $x = AK$ și $z = KL$, unde K este cel mai la stînga dintre cele două puncte de frîngere (v. fig. 80, *a*). Este clar că $x + z \leqslant l$ (deoarece l este lungimea întregii bare, iar $x + z$ este lungimea a două dintre cele trei părți obținute); astfel, mulțimea tuturor cazurilor va fi reprezentată aici prin punctele triunghiului OST, mărginit de axele de coordonate și de dreapta $x + z = l$ (fig. 81).

Este ușor de văzut că și cu o astfel de alegere a coordonatelor probabilitatea este proporțională cu aria. Mulțimea cazurilor favorabile este definită prin inegalitățile $x < l/2$, $z < l/2$, $x + z > l/2$. Ducînd în fig. 81 dreptele $x = l/2$, $z = l/2$, $x + z = l/2$ (acestea vor fi dreptele QM, QN și MN), ne convingem că punctele triunghiului hașurat în fig. 81 corespund cazurilor favorabile. Deoarece aria acestui triunghi este egală cu 1/4 din aria întregului triunghi OST, obținem, încă o dată, că probabilitatea căutată este egală cu 1/4.

Să observăm că problema considerată este foarte asemănătoare cu problema 27; în particular, fig. 81 este cu totul asemănătoare cu fig. 36. Diferența constă în faptul că atunci ne-au interesat doar punctele cu coordonate întregi, iar acum toate punctele. Este clar că pentru $n \to \infty$ (sau, altfel, micșorînd unitatea de măsură) rezultatele problemei 27 nu dau ceva nou în comparație cu rezultatul problemei noastre: pentru n mare, în răspunsurile la problema 27 sînt esențiali doar termenii cu cea mai mare putere în raport cu n (partea introdusă de ceilalți termeni devine foarte mică), iar acești termeni arată că pentru n mare inegalitățile din enunțul problemei 27 sînt verificate de aproximativ 1/4 din toate soluțiile ecuației nedeterminate corespunzătoare. În același timp, soluția problemei noastre este mult mai simplă decît soluția problemei 27: în locul calculelor complicate de analiză combinatorie din problema 27, aici nu avem decît să determinăm raportul dintre ariile celor două triunghiuri asemenea. Un caz asemănător se întîlnește și în multe probleme mult mai profunde: în teoria modernă a calculului probabilităților trecerea de la cazurile finite la scheme continue joacă un rol important și permit deseori să se simplifice teoria într-o însemnată măsură (mai ales prin înlocuirea calculelor și evaluărilor complicate de analiză combinatorie, aproximativ valabile pentru valori mari ale lui n, prin formule exacte mult mai simple).

94. Această problemă este o generalizare a celei precedente. Într-adevăr, problema 93 poate fi formulată astfel: care este probabilitatea ca nici una din cele trei părți ale barei frînte în două puncte luate la întîmplare să nu fie mai mare decît jumătate din lungimea totală a barei? În problema de față lungimea $l/2$ este înlocuită cu o lungime oarecare a.

Ca și în prima soluție a problemei 93, vom caracteriza toate cazurile posibile ale experimentului, considerate prin două numere: $AK = x$ și $AL = y$, unde K și L sînt puncte de frîngere, A — capătul din stînga al barei. În acest caz, mulțimea tuturor cazurilor poate fi reprezentată sub forma mulțimii

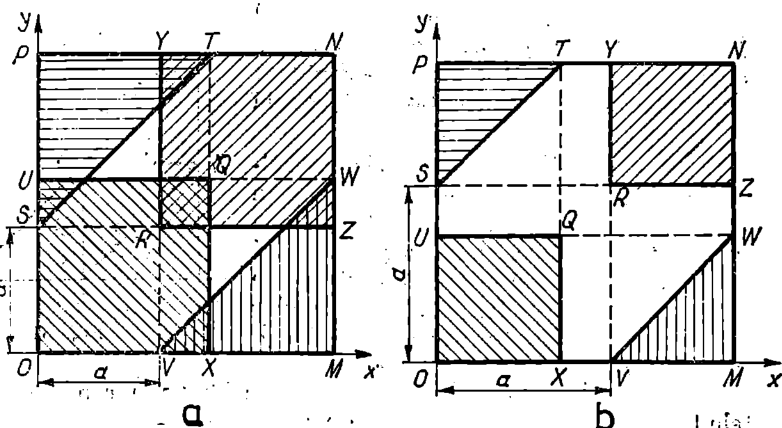


Fig. 82

de puncte ale pătratului $OMNP$ de latură l; probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unei anumite părți a acestui pătrat va fi egală cu raportul dintre aria acestei părți și aria întregului pătrat.

Vom considera acea parte a pătratului care este umplută de punctele corespunzătoare cazurilor nefavorabile ale experimentului. Este evident, mai întîi, că pentru $a \leqslant l/3$ toate cazurile vor fi nefavorabile: din cele trei părți ale barei cel puțin una nu va fi mai mică decît $l/3$. Vom cerceta acum separat cazul $l/3 \leqslant a \leqslant l/2$ (fig. 82, *a*) și $a \geqslant l/2$ (fig. 82, *b*).

Pentru ca bucata din stînga a barei să fie mai mare decît a, este necesar să avem $x > a$, $y > a$; punctele care verifică aceste condiții umplu în fig. 82, *a* și *b* pătratul $YRZN$ de latură $l - a$. La fel, pentru ca partea din dreapta a barei să fie mai mare decît a, este necesar să avem $x < l - a$, $y < l - a$; aceste puncte umplu pătratul $XQUO$ de latură $l - a$. În sfîrșit, partea din mijloc a barei va fi mai mare decît a, dacă $x - y > a$ sau $y - x > a$; prima condiție este verificată de punctele din triunghiul VMW, iar a doua de punctele din triunghiul SPT.

Acum, ne-a mai rămas să calculăm aria rămasă nehașurată în fig. 82, *a* și *b*. În primul caz (fig. 82, *a*), aceasta va fi formată din două triunghiuri dreptunghice isoscele, ale căror catete, evident, sînt egale cu $PS - US - YT = l - a - 2(l - 2a) = 3a - l$; astfel, aria nehașurată este egală cu $(3a - l)^2$. În al doilea caz (fig. 82, *b*), din aria întregului pătrat trebuie să scoatem ariile a două pătrate cu latura $l - a$ și a două triunghiuri dreptunghice isoscele cu catetele $l - a$; astfel, aria nehașurată este egală cu $l^2 - 3(l - a)^2$. Împărțind această arie cu l^2 (aria întregului pătrat), vom obține

că probabilitatea ca nici una din cele trei bucăți ale barei să nu fie mai mare decît a este egală cu

$$0, \text{ dacă } 0 \leqslant a \leqslant l/3,$$

$$\left(3\frac{a}{l}-1\right)^2, \text{ dacă } l/3 \leqslant a \leqslant l/2,$$

$$1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2, \text{ dacă } l/2 \leqslant a \leqslant l.$$

95. Deoarece toate punctele cercului sînt în condiții egale, putem considera că primul dintre aceste trei puncte (punctul A) este fixat într-un anumit mod. În acest caz, pozițiile punctelor B și C vor fi date de lungimea arcelor AB și AC, măsurate într-un sens anumit (de exemplu, în sensul opus mișcării acelor ceasornicului). Vom tăia acum cercul în punctul A și-l vom desfășura pe segmentul AA' (fig. 83); faptul că cele două extremități ale segmentului reprezintă un același punct al cercului nu este esențial). Prezența unui unghi obtuz în triunghiul ABC înseamnă, evident, că unul din cele trei arce în care vîrfurile lui împart segmentul este mai mare decît o jumătate de cerc. De acesea, după trecerea de la cerc la segmentul AA' problema considerată capătă următoarea formă: pe segmentul AA' sînt luate la întîmplare două puncte B și C; care este probabilitatea ca nici una din cele trei părți în care aceste puncte împart cercul să nu fie mai mare decît jumătate din lungimea segmentului? Calculul acestei ultime probabilități a făcut obiectul problemei 93 (v. rezolvarea problemei indicate); deci, răspunsul la această problemă este același cu răspunsul la problema 93: probabilitatea căutată este egală cu 1/4.

96. Aici cazurile posibile ale experimentului se determină printr-un grup de trei numere x, y, z, fiecare din acestea fiind luat la întîmplare între 0 și l, unde l este lungimea comună a barelor. Considerînd aceste numere drept

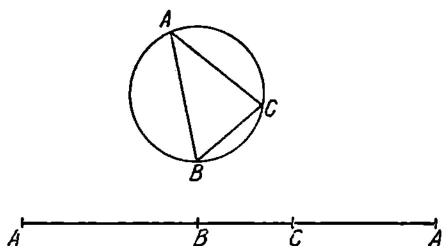


Fig. 83

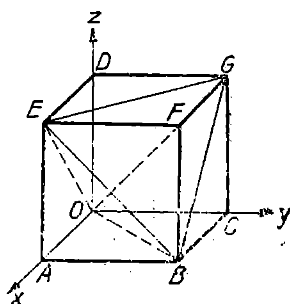


Fig. 84

coordonatele unui punct din spațiu, vom reprezenta mulțimea tuturor cazurilor sub forma mulțimii de puncte ale cubului $OABCDEFG$ cu latura l (fig. 84). În acest caz, probabilitatea ca punctul (x, y, z) să fie situat în interiorul unei

anumite părți a acestui cub se definește ca raportul dintre volumul părții considerate și volumul întregului cub.

Vom determina poziția punctelor corespunzătoare cazurilor favorabile ale experimentului. Pentru ca din trei segmente x, y și z să se poată forma un triunghi, trebuie numai ca aceste segmente să verifice inegalitățile cunoscute

$$x + y > z, \quad x + z > y, \quad y + z > x. \qquad (*)$$

Este însă ușor de verificat că mulțimea punctelor care satisfac egalitatea $x + y = z$ umple planul determinat de punctele O, E și G, iar toate punctele pentru care $x + y > z$ sînt situate de aceeași parte a acestui plan ca și punctul F. La fel, toate punctele pentru care $x + z = y$ umplu planul determinat de punctele O, B și G; toate punctele pentru care $y + z = x$ umplu planul determinat de punctele O, B și E. Astfel, toate punctele care corespund cazurilor favorabile [care verifică toate cele trei inegalități (*)] sînt situate în interiorul domeniului $OBGEF$, mărginit de cele trei plane și de trei fețe ale cubului. Să observăm că volumul cubului diferă de volumul corpului $OBGEF$ cu de trei ori volumul tetraedrului $EOBA$ (deoarece piramidele $EOBA$, $GOED$ și $GOBC$ sînt egale). Însă volumul piramidei $EOBA$ este egal cu

$$\frac{1}{3} EA \cdot \text{aria } OAB = \frac{1}{3} l \cdot \frac{1}{2} l^2 = \frac{l^3}{6}$$

deci volumul corpului $OBGEF$ este egal cu

$$l^3 - 3\frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$$

și probabilitatea căutată este egală cu

$$\frac{l^3}{2} : l^3 = \frac{1}{2}.$$

97. În această problemă se consideră același experiment ca și în cea precedentă. În același mod, vom reprezenta mulțimea tuturor cazurilor posibile ale experiențelor prin mulțimea punctelor cubului $OABCDEFG$ de latură l; în acest caz, probabilitatea evenimentului va fi egală cu raportul dintre volumul părții cubului corespunzătoare cazurilor favorabile ale experiențelor și volumul întregului cub. Astfel, ne mai rămîne să stabilim care puncte ale cubului corespund cazurilor favorabile ale experiențelor.

Conform teoremei cosinusului într-un triunghi ascuțitunghic, pătratul fiecărei laturi este mai mic decît suma pătratelor celorlalte două, în timp ce într-un triunghi obtuzunghic pătratul laturii opuse unghiului obtuz este mai mare decît suma pătratelor celorlalte două laturi, iar într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor. Deci, pentru ca din trei segmente să poată fi format un triunghi ascuțitunghic, pătratul fiecăruia dintre aceste segmente trebuie să fie mai mic decît suma

pătratelor celorlalte două [1]. Astfel, deosebirea dintre soluția problemei de față și a celei precedente se reduce doar la faptul că acum cazurile favorabile ale experiențelor vor fi determinate nu de inegalitățile (*) (v. rezolvarea problemei 96), ci de inegalitățile

$$x^2 + y^2 > z^2, \quad x^2 + z^2 > y^2, \quad y^2 + z^2 > x^2. \qquad (**)$$

Egalitatea $x^2 + y^2 = z^2$ înseamnă că distanța $MQ = \sqrt{x^2 + y^2}$ de la punctul M de coordonate x, y, z la axa OZ este egală cu segmentul OQ de pe axa OZ (fig. 85, *a*). De aici este clar că toate punctele pentru care $x^2 + y^2 = z^2$ vor fi situate pe suprafața conului care are ca axă dreapta OD, iar unghiul dintre axă și generatoare este de 45°; punctele pentru care $z^2 > x^2 + y^2$ (acestor puncte le corespund cazurile n e f a v o r a b i l e ale experimentului) vor fi situate în interiorul acestui con. În mod analog, inegalitățile $y^2 > x^2 + z^2$ și $x^2 > y^2 + z^2$ determină două conuri avînd ca axe dreptele OC și OA (fig. 85, *b*). În interiorul cubului $OABCDEFG$ se introduce cîte un sfert din fiecare din aceste trei conuri; ele nu se intersectează, iar înălțimea fiecăruia este egală cu lungimea muchiei l a cubului, raza bazei fiind, de asemenea, egală cu l (deoarece unghiul ω dintre axă și generatoare este egal cu 45°). Volumul unui sfert dintr-un astfel de con este, evident, egal cu

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi l^2 \cdot l = \frac{\pi l^3}{12};$$

deci, volumul părții cubului corespuntător cazurilor nefavorabile ale experiențe i este egal cu $3 \cdot \frac{\pi l^3}{12} = \frac{\pi l^3}{4}$, iar volumul părții cubului corespunzătoare cazu-

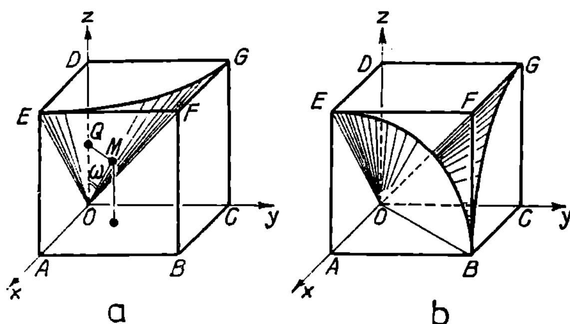


Fig. 85

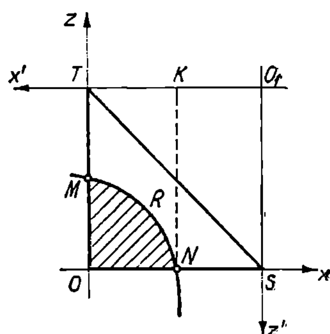


Fig. 86

[1] Această condiție garantează în același timp că nici unul din cele trei segmente nu-va fi mai mare decît suma celorlalte două (adică faptul că din aceste segmente se poate forma în general un triunghi). Într-adevăr, dacă, de exemplu, $x^2 < y^2 + z^2$, atunci, cu atît mai mult, $x^2 < y^2 + 2yz + z^2 = (y + z)^2$ și deci $x < y + z$.

rilor favorabile ale experienţei este egal cu $l^3 - \frac{\pi l^3}{4}$. Rezultă deci că probabilitatea căutată este egală cu

$$\left(l^3 - \frac{\pi l^3}{4}\right)\Big/ l^3 = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}2146\ldots$$

98. În această problemă se cercetează acelaşi experiment ca şi în problema 93. Ca şi în a doua rezolvare a problemei 93, toate cazurile posibile ale acestui experiment pot fi caracterizate prin două numere: $AK = x$ şi $KL = z$ (v. fig. 80, *a*). În acest caz, mulţimea tuturor cazurilor va fi reprezentată prin mulţimea punctelor din triunghiul OST, mărginit de axele de coordonate şi de dreapta $x + z = l$ (fig. 86; compară, de asemenea, cu fig. 81), iar probabilitatea unui eveniment va fi egală cu raportul dintre aria unei părţi a triunghiului corespunzătoare cazurilor favorabile pentru acest eveniment şi aria întregului triunghi.

Trebuie să determinăm care sînt valorile x şi z pentru care, din trei segmente de lungime x, z şi $l - x - z$, poate fi format un triunghi ascuţitunghic. Cum s-a arătat în soluţia problemei precedente, pentru aceasta trebuie numai ca pătratul lungimii fiecăruia dintre aceste segmente să fie mai mic decît suma pătratelor lungimilor celorlalte două. Astfel, cazurilor nefavorabile ale experimentului le vor corespunde punctele triunghiului OST, care verifică una din următoarele trei inegalităţi:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 \geqslant z^2 + (l - x - z)^2, \quad z^2 \geqslant x^2 + (l - x - z)^2, \\ (l - x - z)^2 \geqslant x^2 + z^2. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

În acest caz, este clar că nici un grup de două dintre inegalităţile scrise nu pot să fie verificate simultan (deoarece din fiecare dintre ele rezultă că ungimea segmentului care figurează în partea stîngă a inegalităţii este mai mare decît suma celorlalte două lungimi; v. trimiterea de la p. 243); deci, nici un grup de două dintre cele trei domenii definite de aceste inegalităţi nu se vor intersecta. Mai departe, prin împărţirea barei la întîmplare în trei bucăţi probabilitatea ca pătratul lungimii unei anumite bucăţi să fie mai mare decît suma pătratelor lungimilor celorlalte două va fi aceeaşi pentru toate cele trei bucăţi ale barei [1]; de aici rezultă că ariile celor trei domenii ale triunghiului OST, definite de cele trei inegalităţi (*), trebuie să fie identice. Deci, pentru a găsi aria domeniului corespunzător tuturor cazurilor nefavorabile ale experienţei este suficient să calculăm aria domeniului determinat de una oarecare dintre inegalităţile (*) şi să o înmulţim cu 3.

Vom determina aria acelei părţi a triunghiului OST pentru care este verificată inegalitatea

$$(l - x - z)^2 \geqslant x^2 + z^2.$$

[1] Cum am văzut din rezolvarea problemei 95, problema împărţirii barei în trei părţi este echivalentă cu problema împărţirii în trei părţi a cercului, iar în împărţirea cercului cele trei părţi obţinute se găsesc, evident, în condiţii egale.

Desfăcînd parantezele, această inegalitate poate fi scrisă sub forma

$$l^2 + 2xz - 2lx - 2lz \geqslant 0.$$

Adăugînd la ambele părţi ale inegalităţii termenul l^2 şi împărţind cu 2, obţinem

$$(l - x)(l - z) \geqslant l^2/2.$$

Dar ecuaţia $(l - x)(l - z) = l^2/2$ defineşte, evident, o hiperbolă (graficul funcţiei invers proporţionale) care trece prin punctele $x = l/2$, $y = 0$ (punctul N) şi $x = 0$, $z = l/2$ (punctul M); numai că drept axe de coordonate trebuie luate, în acest caz, dreptele O_1T şi O_1S (adică dreptele $l - z = 0$ şi $l - x = 0$; v. fig. 86), Inegalitatea $(l - x)(l - z) \geqslant l^2/2$ va fi verificată pentru toate punctele figurii curbe $ONRM$, haşurată în fig. 86 şi numai pentru acestea.

Rămîne să determinăm aria figurii $ONRM$. Vom lua ca noi axe de coordonate dreptele O_1T (axa O_1x') şi O_1S (axa O_1z'); în acest sistem de coordonate hiperbola va avea ecuaţia $x'z' = l^2/2$. Vom lua, acum, ca nouă unitate de lungime, lungimea $l/\sqrt{2}$; atunci această ecuaţie se scrie $x'z' = 1$. În acest caz, abscisa O_1K a punctului N în noile unităţi va fi egală cu $\frac{l/2}{l/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, iar abscisa O_1T a punctului M va fi egală cu $\frac{l}{l/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Conform rezultatului la problema 152, rezultă de aici că aria trapezului curbiliniu $KNMT$, în noile unităţi pătratice, va fi egală cu $\ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = \ln 2$, adică va fi egală cu logaritmul natural al numărului 2 (logaritmul în baza $e = 2{,}718 \ldots$). Revenind acum la vechile unităţi ale ariei, vom găsi că aria trapezului curbiliniu $KNMT$ este egală cu $\ln 2 \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{l^2 \ln 2}{2}$. De aici, pentru aria figurii $ONRM$, haşurată în fig. 86, obţinem expresia

$$\frac{l^2}{2} - \frac{l^2 \ln 2}{2} = \frac{l^2}{2}(1 - \ln 2).$$

Aria totală a părţii triunghiului OST corespunzătoare cazurilor nefavorabile ale experienţelor va fi de trei ori mai mare decît această expresie, iar aria părţii corespunzătoare cazurilor favorabile va fi egală cu

$$\frac{l^2}{2} - 3\frac{l^2}{2}(1 - \ln 2) = \frac{l^2}{2}(3 \ln 2 - 2).$$

Astfel, probabilitatea căutată în problemă are următoarea valoare:

$$\frac{l^2}{2}(3 \ln 2 - 2) : \frac{l^2}{2} = 3 \ln 2 - 2 = 0{,}082 \ldots$$

99. Vom considera, pentru simplitate, că lungimea barei noastre este egală cu 2 (aceasta este posibil, deoarece se poate lua totdeauna ca unitate

de lungime jumătate din lungimea barei). Fie AB bara noastră, K şi L punctele primului, respectiv al celui de-al doilea loc de frîngere. Rezultatul experimentului în problema de faţă este complet determinat de numerele $x = AK$ şi $z = KL$, unde x este luat la întîmplare între 0 şi 1 (x este lungimea celei

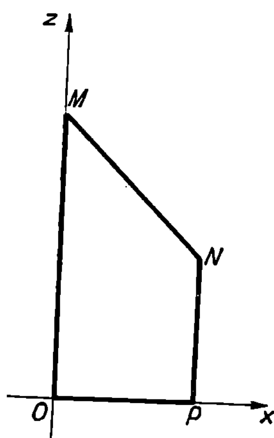


Fig. 87

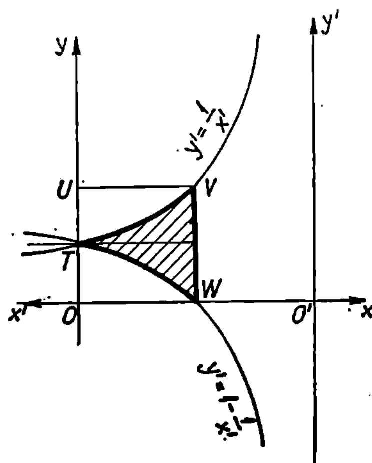


Fig. 88

mai mici din cele două părţi obţinute după prima frîngere, deci $x < 1$), iar z este luat la întîmplare între 0 şi $2 - x$. Dacă vom considera că x şi z sînt coordonatele unui punct în plan, atunci mulţimea tuturor cazurilor va fi reprezentată prin mulţimea punctelor din trapezul dreptunghic $OMNP$ (fig. 87). În acest caz, însă, probabilitatea ca punctul (x, z) să se afle în interiorul unui dreptunghi mic, situat în interiorul trapezului, nu va depinde numai de aria acestui dreptunghi: probabilitatea ca x să se afle în interiorul unui segment oarecare de pe axa absciselor este egală cu lungimea acestui segment, însă probabilitatea ca z să se afle în interiorul unui anumit segment de pe axa ordonatelor, pentru un x dat, va fi egală cu raportul dintre lungimea acestui segment şi $2 - x$, adică depinde de x. Astfel, probabilitatea ca punctul (x, z) să se afle în interiorul unei anumite părţi a trapezului $OMNP$ depinde nu numai de aria acestei părţi a trapezului, ci şi de forma ei şi de poziţia ei în interiorul lui $OMNP$; din această cauză, reprezentarea tuturor cazurilor posibile ale experimentului prin puncte ale trapezului $OMNP$ nu este comodă pentru calculul probabilităţilor.

Este mult mai comod să caracterizăm toate cazurile posibile ale experimentului prin două numere x şi $y = z/(2 - x)$. Este clar că atît x cît şi y sînt luaţi la întîmplare între 0 şi 1; deci, dacă vom considera pe x şi y drept coordonate ale unui punct în plan, toate cazurile posibile vor fi reprezentate prin punctele pătratului $OUVW$ de latură egală cu unu (fig. 88) şi probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unei anumite părţi a acestui pătrat va fi egală cu aria acestei părţi (aria întregului pătrat $OUVW$ este egală cu 1). Astfel, rămîne numai să determinăm aria acelei părţi a pătratului $OUVW$ care corespunde cazurilor favorabile ale experimentului.

În problema noastră vor fi favorabile acele cazuri în care se poate forma un triunghi din segmentele x, z şi $2 - x - z$. Pentru ca acest lucru să fie posibil, trebuie doar ca lungimea fiecăruia dintre aceste segmente să nu fie mai mare decît 1 (v. rezolvarea problemei 93). Deoarece conform condiţiei impuse segmentul x nu este mai mare decît 1, rezultă că vor fi favorabile toate cazurile în care $z < 1$ şi $2 - x - z < 1$, adică $z < 1$ şi $z > 1 - x$. Deoarece $y = z/(2 - x)$, rezultă că, împărţind inegalităţile scrise cu $2 - x$, vom obţine că pentru cazurile favorabile vor corespunde perechile de numere (x, y), astfel încît $y < 1/(2 - x)$ şi $y > (1 - x)/(2 - x)$, adică

$$y < \frac{1}{2 - x}, \qquad y > 1 - \frac{1}{2 - x}. \tag{*}$$

Să reprezentăm în fig. 88 domeniul determinat de aceste inegalităţi. Vom introduce în locul coordonatelor (x, y) coordonatele (x', y'), unde $y' = y$, iar $x' = 2 - x$. O astfel de schimbare a coordonatelor este echivalentă cu o translaţie a originii coordonatelor în punctul O' situat pe axa absciselor la o distanţă egală cu 2 de vechea origine şi schimbarea sensului axei absciselor (v. fig. 88). În noile coordonate inegalităţile (*) se vor scrie astfel:

$$y' < \frac{1}{x'}, \qquad y' > 1 - \frac{1}{x'}. \tag{**}$$

Prima dintre aceste inegalităţi arată că toate punctele corespunzătoare cazurilor favorabile sînt situate sub hiperbola $y' = 1/x'$.

Vom mai construi curba

$$y' = 1 - \frac{1}{x'} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{2}\right); \quad y' - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{2}\right);$$

această curbă va fi, evident, simetrica curbei $y' = 1/x'$ faţă de dreapta $y' = 1/2$ (v. fig. 88). A doua dintre inegalităţile (**) arată că toate punctele corespunzătoare cazurilor favorabile sînt situate deasupra curbei $y' = 1 - \frac{1}{x'}$. Astfel, cazurilor favorabile le corespund punctele care umplu domeniul haşurat în fig. 88. Rămîne să determinăm aria acestui domeniu.

În primul rînd, vom observa că, datorită simetriei curbelor

$$y' = \frac{1}{x'} \quad \text{şi} \quad y' = 1 - \frac{1}{x'}$$

faţă de dreapta $y' = 1/2$, aria triunghiului curbiliniu OTW este egală cu aria triunghiului curbiliniu TUV; astfel, aria căutată este egală cu 1 — 2 aria TUV. Dar, conform problemei 152, aria trapezului curbiliniu $OTVW$ este egală cu ln 2 (ln înseamnă logaritmul natural, adică logaritmul în baza $e = 2{,}718\ldots$). De aici rezultă că aria $TUV = 1 - \ln 2$, deci aria căutată a triunghiului curbiliniu TVW este egală cu

$$1 - 2\,(1 - \ln 2) = 2 \ln 2 - 1 = 0{,}388\ldots$$

Cu această expresie este egală probabilitatea ca din segmentele x, z şi $2 - x - z$ să se poată forma un triunghi.

100. Poziţia acului după căderea lui pe plan se determină prin distanţa y de la centrul acului AB pînă la cea mai apropiată dintre dreptele paralele

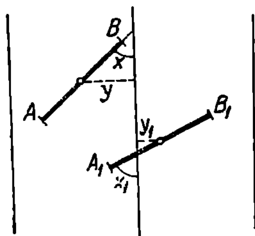


Fig. 89

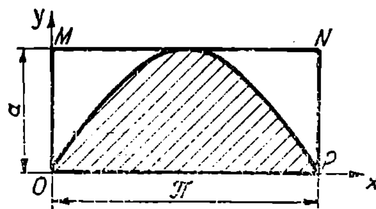


Fig. 90

şi prin unghiul x format de direcţia acului şi direcţia dreptei (fig. 89). Este clar că $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; astfel, toate cazurile posibile se determină prin perechile de numere (x, y), unde x este luat la întîmplare între 0 şi π, iar y la întîmplare între 0 şi a. Mulţimea tuturor cazurilor poate fi reprezentată aici prin totalitatea punctelor care umplu dreptunghiul $OMNP$ cu laturile $OM = a$ şi $OP = \pi$ (fig. 90); în acest caz, probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unei anumite părţi a acestui dreptunghi va fi egală cu raportul dintre aria acestei părţi şi aria întregului dreptunghi $OMNP$. Astfel, rămîne numai să determinăm aria părţii $OMNP$ corespunzătoare cazurilor favorabile ale experimentului.

Din fig. 89 se vede că pentru ca acul AB să intersecteze una din dreptele paralele, trebuie numai să fie satisfăcută inegalitatea $y \leqslant a \sin x$. Curba $y = a \sin x$ este o sinusoidă (v. fig. 90); inegalitatea $y \leqslant a \sin x$ arată că pentru cazurile favorabile ale experimentului vor corespunde puncte situate sub această sinusoidă. Conform problemei 147, b), aria de sub sinusoidă este egală cu $2a$. Deoarece aria întregului dreptunghi $OMNP$ este egală cu $a\pi$, probabilitatea căutată va fi

$$\frac{2a}{a\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637.$$

PROBLEME DIN DIFERITE DOMENII ALE MATEMATICII

101. Este posibil. Să considerăm, de exemplu, 10 drepte într-un plan, astfel situate, încît nu sînt paralele două cîte două și nu se intersectează trei cîte trei în același punct; vom admite că aceste drepte sînt trasee de autobuze, iar punctele de intersecție — stații. În acest caz, din fiecare stație se poate călători în oricare alta; dacă stațiile se află pe o aceeași dreaptă — fără schimbarea autobuzului, iar dacă nu — cu o schimbare de autobuz. Mai departe, chiar dacă din această schemă se suprimă o dreaptă, mai rămîne totuși posibilitatea de a călători din fiecare stație în oricare alta făcînd pe drum nu mai mult de o singură schimbare de autobuz. Dacă însă se suprimă două drepte, atunci o stație — punctul de intersecție a acestor drepte — nu va mai fi deservită de celelalte trasee și din această stație va fi imposibil să se călătorească spre oricare alta.

102. Un exemplu de astfel de rețea, formată din șapte trasee, este reprezentat în fig. 91.

103. a) Fie n numărul de stații ale unui traseu de autobuz. Trebuie să demonstrăm că, în acest caz, fiecare traseu va avea exact n stații și prin fiecare stație vor trece exact n trasee.

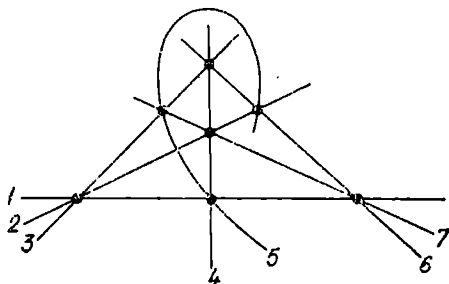


Fig. 91

Să notăm cu a traseul cu n stații, iar stațiile acestui traseu să le notăm cu literele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și să considerăm o stație oarecare B de autobuze, situată în afara traseului a (fig. 92). Conform condiției 2°, din stația B se poate ajunge, urmînd unul dintre trasee, în oricare din cele n stații $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Conform condiției 3°, fiecare dintre traseele care trec prin B trece printr-una din stațiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (în caz contrar, de pe acest traseu nu ar fi posibil să se ia autobuzul de pe traseul a) și numai prin una din acestea (în caz contrar, de pe acest traseu ar fi posibil să se ia autobuzul de pe traseul a în două stații) și

nici un grup de două trasee care trec prin B nu trece printr-una şi aceeaşi staţie a traseului (în caz contrar, de pe unul dintre aceste trasee s-ar putea lua autobuzul pentru un alt traseu în două staţii: în staţia B şi în staţia în care ele întîlnesc traseul a). De aici rezultă că prin staţia B trec tot atîtea trasee cîte staţii există pe traseul a, adică exact n staţii.

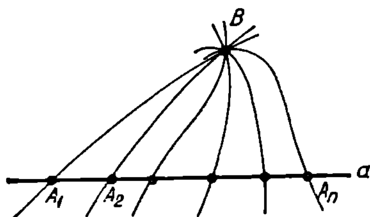


Fig. 92

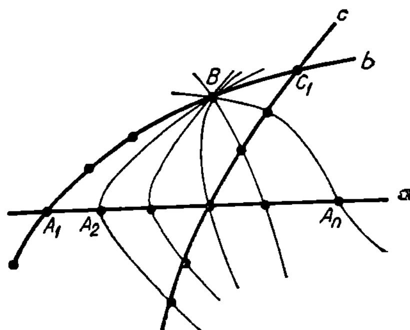


Fig. 93

Să considerăm acum un traseu oarecare c, diferit de a (fig. 93). Conform condiţiei 1°, pe c sînt situate nu mai puţin de trei staţii, iar conform lui 3°, numai una dintre aceste staţii este în acelaşi timp staţie şi pe traseul a. În afara traseului c se află, evident, n — 1 staţii ale traseului a; vom arăta că, pe lîngă aceasta, în afara lui c mai este situată cel puţin încă o staţie care nu se află pe a. Într-adevăr, fie A_1 una din cele n — 1 staţii ale traseului a, situate în afara lui c, iar C_1 una din staţiile traseului c, aflate în afara lui a (există cel puţin 2 astfel de staţii). Conform condiţiei 2°, există un traseu b de autobuze care trece prin staţiile A_1 şi C_1, iar conform condiţiei 3°, pe acest traseu, în afară de A_1 şi C_1, există încă cel puţin o staţie B, care va fi situată în afara lui c şi în afara lui a.

După cum se ştie, prin fiecare staţie de autobuze, situată în afara lui a, trec n trasee; aceasta se referă, în particular, şi la staţia B. Conform condiţiei 3°, fiecare dintre cele n trasee care trec prin B se intersectează cu traseul c într-o singură staţie; mai departe, conform condiţiei 2°, prin fiecare staţie a traseului c trece cel puţin un traseu care trece, de asemenea, şi prin B. De aici rezultă că numărul de staţii ale traseului c este egal cu numărul de trasee care trec prin B, adică este egal cu n. Am demonstrat, deci, că fiecare traseu de autobuze al oraşului are acelaşi număr n de staţii.

Ne mai rămîne să demonstrăm că prin fiecare dintre staţiile $A_1, A_2, \ldots, A_n$, situate pe a, trec, de asemenea, cîte n trasee. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că, pentru oricare dintre staţii, există un traseu care nu trece prin aceasta; într-adevăr, acest traseu, ca oricare altul, va avea n staţii, iar se ştie că prin oricare staţie, situată în afara traseului care are n staţii, trec neapărat cîte n trasee (v. la începutul rezolvării acestei probleme demonstraţia faptului că prin B trec n trasee). Însă, deoarece numărul traseelor nu este mai mic decît două, atunci, în afară de a mai există un traseu b, care se intersectează cu traseul a într-o singură staţie, conform condiţiei 3°. Fie A_1

această stație; atunci stațiile A_2, A_3, ..., A_n vor fi situate în afara lui b și deci, prin ele vor trece cîte n trasee. Mai departe, pe b mai sînt situate, în afară de A_1, și alte stații (nu mai puțin de două); fie B una dintre acestea. În acest caz, traseul care trece prin B și prin A_2 (un astfel de traseu există conform condiției 2°) nu va trece prin stația A_1; deci, în afară de A_1, mai există cel puțin un traseu, iar prin A_1 trec exact n trasee. Cu aceasta, problema este în întregime rezolvată.

b) Conform rezultatului problemei a), în cazul considerat fiecare traseu are un același număr n de stații și prin fiecare stație trec cîte n trasee. Fie a unul dintre trasee; prin fiecare din cele n stații ale acestui traseu, în afară de a, trec încă $n - 1$ trasee. Din condiția 3° rezultă ușor că nici unul din cele $n(n - 1)$ trasee obținute în acest mod nu coincide cu altul și că fiecare dintre trasee, diferit de a, face parte din numărul acestor $n(n - 1)$ trasee [compară cu problema a)]. Astfel, numărul total al traseelor de autobuze ale orașului (inclusiv a) este egal cu $n(n - 1) + 1$. De aici pentru determinarea lui n obținem ecuația de gradul al doilea

$$n(n-1)+1=57; \quad n^2-n-56=0; \quad n=8$$

(a doua rădăcină a ecuației, $n = -7$, bineînțeles, nu convine).

104. a) Vom așeza două dreptunghiuri egale $ABCD$ și $BEFC$ astfel, încît ele să fie adiacente pe latura BC (fig. 94). Vom duce diagonalele în fiecare dintre aceste dreptunghiuri și în dreptunghiul $AEFD$ de două ori mai mare, format din primele două. Fiecare pereche din aceste trei perechi de diagonale se intersectează într-un anumit punct, situat pe dreapta MN, care trece prin mijlocul înălțimilor dreptunghiurilor; obținem astfel trei puncte situate pe dreapta MN (în fig. 94 acestea vor fi punctele X, Y, Z). La aceste trei puncte vom adăuga încă șase puncte A, B, E, D, C, F, vîrfurile dreptunghiurilor; obținem astfel nouă puncte. Cele nouă drepte vor fi cele șase diagonale, bazele de sus și de jos ale dreptunghiurilor și dreapta MN situată la jumătatea distanței dintre baze. Este ușor de văzut că aceste nouă puncte și nouă drepte satisfac condițiile problemei.

b) Vom presupune că cele șapte puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 și cele șapte drepte p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 sînt așezate astfel, cum s-a arătat în enunțul problemei. Vom arăta, în primul rînd, că, în acest caz, în mulțimea de drepte p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 se vor afla toate dreptele care unesc oricare două din punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, iar în mulțimea punctelor A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 se vor afla toate punctele de intersecție ale oricăror două din dreptele p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7. Într-adevăr, fie, de exemplu p_1, p_2 și p_3 acele trei drepte ale noastre, care trec prin punctul A_1. Conform enunțului problemei, pe fiecare din dreptele p_1, p_2 și p_3 trebuie să se mai afle, în afară de A_1, cîte două puncte din mulțimea de puncte A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7; deci, toate aceste șase puncte sînt situate pe dreptele p_1, p_2 și p_3. Aceasta înseamnă că dreapta care unește A_1 cu oricare din celelalte șase puncte este p_1, p_2 sau p_3, adică una din cele șapte drepte.

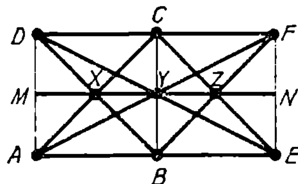


Fig. 94

La fel se demonstrează că acestei mulțimi de șapte drepte îi aparține și dreapta care unește oricare din cele șapte puncte cu oricare din celelalte puncte. În mod analog, se demonstrează ca punctul de intersecție al oricăror două dintre cele șapte drepte este A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 sau A_7: pentru aceasta este suficient numai să observăm că prin cele trei puncte (din cele șapte considerate), situate pe o dreaptă oarecare, trebuie să treacă, conform enunțului problemei, toate celelalte șase drepte considerate (cîte două drepte prin fiecare punct).

Să considerăm trei puncte A_1, A_2, A_3 și trei drepte care unesc aceste puncte; să presupunem că acestea sînt, de exemplu, dreptele p_1, p_2 și p_3 (fig. 95). Conform enunțului problemei, prin fiecare dintre vîrfurile A_1, A_2 și A_3 ale triunghiului $A_1A_2A_3$ trebuie să mai treacă, în afară de laturile triunghiului, o a treia dreaptă dintre cele șapte drepte; să presupunem, de exemplu, că prin A_1 trece dreapta p_4, prin A_2 — dreapta p_5 și prin A_3 — dreapta p_6 și că p_4 intersectează pe p_3 în punctul A_4, p_5 intersectează pe p_2 în punctul A_5 și p_6 intersectează pe p_1 în punctul A_6. Pentru ca toate condițiile din problemă să fie verificate, mai trebuie ca dreptele p_4, p_5 și p_6 să se intersecteze într-un punct A_7, iar punctele A_4, A_5, A_6 să se afle pe o aceeași dreaptă p_7. Vom arăta că nu pot fi satisfăcute amîndouă aceste condiții: dacă dreptele p_4, p_5 și p_6 se vor intersecta într-un același punct A_7, atunci punctele A_4, A_5 și A_6 nu se vor afla niciodată pe o aceeași dreaptă.

Într-adevăr, o dreaptă care nu trece prin vîrfurile triunghiului poate sau să intersecteze două laturi ale acestui triunghi (fig. 96, *a*) sau să nu intersecteze nici una (fig. 96, *b*), însă nu poate niciodată să intersecteze numai o latură sau toate cele trei laturi. Dacă punctul A_7 este situat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$ (fig. 95, *a*), atunci toate punctele A_4, A_5 și A_5 vor fi situate pe laturile acestui triunghi, iar dacă el este situat în afara triunghiului $A_1A_2A_3$

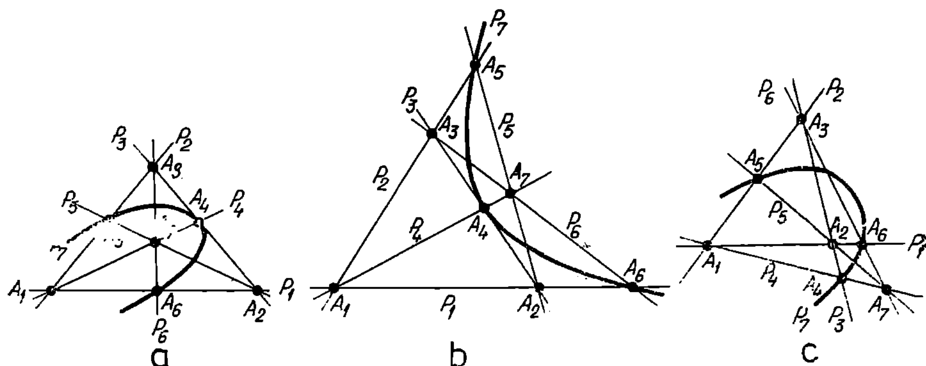


Fig. 95

(fig. 95, *b* și *c*), atunci numai unul din aceste puncte va fi situat pe o latură a triunghiului $A_1A_2A_3$, iar celelalte două — pe prelungirile celorlalte două laturi. În primul caz, dreapta p_7 ar fi trebuit să intersecteze toate cele trei laturi ale triunghiului $A_1A_2A_3$, iar în al doilea caz numai una din laturile lui (și prelungirile celorlalte două). Deoarece nici una din aceste situații nu

este posibilă, rezultă că şapte puncte şi şapte drepte nu pot fi dispuse aşa cum se cere în enunţul problemei.

105. Vom demonstra teorema prin reducere la absurd. Vom presupune că nu toate cele n drepte se intersectează într-un acelaşi punct, adică printr-un punct A de intersecţie a două din dreptele noastre nu trece cel puţin una

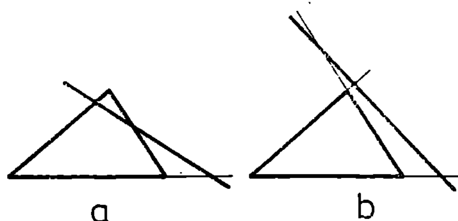


Fig. 96

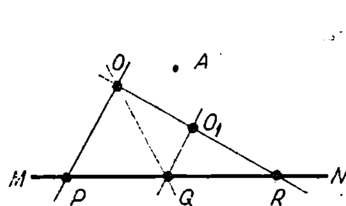


Fig. 97

din cele n drepte. Vom nota prin MN dreapta care nu trece prin punctul A. În afară de A, mai pot exista o serie de puncte de intersecţie a celor n drepte, care să nu fie situate pe MN, fie O acela dintre aceste puncte care este situat cel m a i a p r o a p e de dreapta MN (fig. 97) (dacă printre punctele de intersecţie a dreptelor considerate, nesituate pe MN, există mai multe puncte la aceeaşi distanţă de MN, mai mică decît distanţa celorlalte puncte la această dreaptă, atunci vom lua drept O oricare din aceste puncte). Prin punctul O trec cel puţin trei drepte diferite OP, OQ şi OR din mulţimea considerată; aici sînt notate cu literele P, Q şi R punctele de intersecţie a dreptelor OP, OQ şi OR cu dreapta MN. Să presupunem că punctul Q este situat î n t r e punctele R şi P. Prin punctul Q, în afară de dreptele MN şi OQ, trebuie să mai treacă cel puţin o dreaptă din mulţimea noastră de drepte. Însă această dreaptă va intersecta neapărat sau segmentul OP sau segmentul OR, iar punctul de intersecţie O_1 va fi situat m a i a p r o a p e de dreapta MN decît punctul O. Cu aceasta am ajuns la o contradicţie (deoarece am presupus că din toate punctele de intersecţie a dreptelor noastre, nesituate pe MN, punctul O este situat cel mai aproape de MN).

Astfel se constată că presupunerea noastră iniţială, că nu toate dreptele se intersectează în acelaşi punct, este falsă.

106. Rezolvarea este asemănătoare cu aceea a problemei 105, dar ea apare ceva mai greu de lămurit. Vom presupune că enunţul problemei este fals, adică există trei puncte A, B şi C din mulţimea celor n puncte date, care nu se află pe o aceeaşi dreaptă. Vom duce prin punctul A dreapta MN, care în afară de A nu mai conţine alte puncte din mulţimea punctelor considerate şi care nu este paralelă cu dreapta BC (fig. 98). Vom duce, apoi, toate dreptele care unesc două cîte două cele n puncte date. Aceste drepte vor intersecta dreapta MN într-un şir de puncte, printre care se va afla şi punctul A (acesta este punctul de intersecţie a dreptelor AB sau AC cu MN); dar vor mai exista şi alte puncte (de exemplu, punctul de intersecţie a dreptei MN cu dreapta BC).

Fie P unul din punctele de intersecţie a dreptelor, pe care le-am dus, cu dreapta MN, situat cel mai aproape de punctul A (sau unul din două astfel de puncte); fie, mai departe, p aceea din dreptele duse care intersectează dreapta MN în punctul P. Conform enunţului problemei, pe dreapta p trebuie să fie dispuse cel puţin trei din punctele noastre. Vom nota aceste

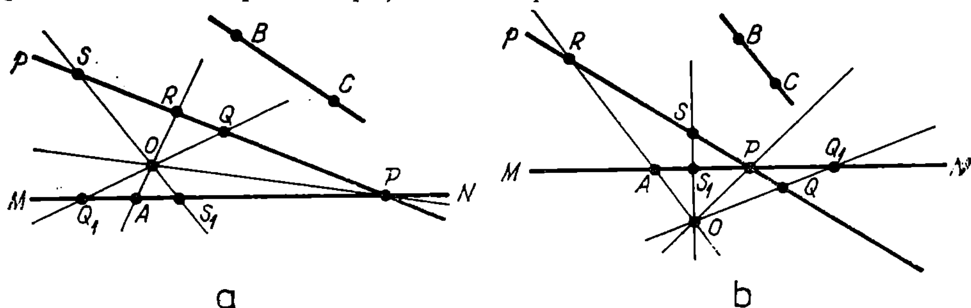


Fig. 98

puncte prin Q, R şi S. Patru puncte P, Q, R şi S pe o dreaptă totdeauna pot fi împărţite în două perechi care se separă (primul şi al treilea punct, al doilea şi al patrulea, dacă aceste puncte se numerotează în ordinea în care ele sînt dispuse pe dreaptă); fie P, R şi Q, S două astfel de perechi care se separă între ele (două variante posibile ale unei astfel de configuraţii a acestor puncte sînt reprezentate în fig. 98). Vom utiliza acum faptul că pe dreapta AR, în afară de punctele A şi R, trebuie neapărat să mai fie situat încă cel puţin un punct O din cele n puncte. Vom considera dreptele OP, OQ, OR şi OS; aceste patru drepte vor intersecta dreapta MN în patru puncte P, Q_1, A şi S_1. Din faptul că perechile de puncte P, R şi Q, S se separă, rezultă că perechile de puncte P, A şi Q_1, S_1 se vor separa şi ele (deoarece, în acest caz, perechile de drepte OP, OR şi OQ, OS se separă). Deci, unul din cele două puncte Q_1 şi S_1 este situat între punctele A şi P, adică mai aproape de punctul A decît punctul P. Cu aceasta am ajuns la o contradicţie, deoarece am presupus că P este acela din punctele de intersecţie a dreptelor considerate cu MN, care este situat cel mai aproape de A. Această contradicţie arată că presupunerea iniţială a fost falsă: punctele mulţimii noastre nu pot să nu fie coliniare.

107. Punctul n trebuie să nu fie mai mic decît trei (deoarece nu toate cele n puncte se află pe o aceeaşi dreaptă), Dacă $n=3$, teorema este evidentă: trei puncte care nu se află pe o aceeaşi dreaptă pot fi unite două cîte două prin trei drepte. Vom aplica, acum, metoda inducţiei complete: vom presupune că pentru n puncte teorema a fost demonstrată şi vom arăta că, în acest caz, ea este adevărată şi pentru $n+1$ puncte. Vom considera toate dreptele care unesc două cîte două cele $n+1$ puncte. Conform rezultatului problemei 106, cel puţin pe una din aceste drepte trebuie să fie situate numai două puncte A_n şi A_{n+1} din mulţimea noastră (în caz contrar, toate cele $n+1$ puncte trebuie să se afle pe o aceeaşi dreaptă). Vom suprima acum punctul A_{n+1}. Dacă celelalte n puncte A_1, A_2, ..., A_n sînt situate pe o aceeaşi

dreaptă, numărul total de drepte, evident, va fi egal cu $n+1$: acestea vor fi cele n drepte care unesc punctul A_{n+1} cu punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ împreună cu dreapta pe care sînt situate aceste ultime n puncte. Dacă însă cele n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nu se află pe o aceeaşi dreaptă, atunci, conform principiului inducţiei complete, printre dreptele care unesc două cîte două punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, vor exista cel puţin n drepte diferite. Vom adăuga aici toate dreptele care unesc punctul A_{n+1} cu punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Deoarece pe dreapta A_nA_{n+1} nu se află nici unul din punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, această dreaptă în orice caz, nu se află printre dreptele care unesc două cîte două punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Astfel, am adăugat cel puţin o nouă drepată şi deci, după această adăugare, numărul dreptelor diferite a devenit cel puţin egal cu $n+1$. Cu aceasta, am demonstrat în întregime că, dacă teorema este adevărată pentru n puncte, ea este adevărată şi pentru $n+1$ puncte. Conform principiului inducţiei complete, rezultă de aici că această teoremă este adevărată pentru orice număr de puncte.

108. a) Între patru puncte A, B, C şi D există în total şase distanţe: AB, AC, AD, BC, BD şi CD. Conform enunţului, acestea trebuie să ia una din două valori: a sau b; în aceste condiţii se pot ivi următoarele cazuri:

1° Toate cele şase distanţe sînt egale cu a.

2° Cinci distanţe sînt egale cu a şi o distanţă este egală cu b.

3° Patru distanţe sînt egale cu a şi două distanţe sînt egale cu b.

4° Trei distanţe sînt egale cu a şi trei distanţe sînt egale cu b.

Vom cerceta separat fiecare dintre aceste cazuri.

C a z u l 1°, evident, este imposibil. Într-adevăr, în acest caz, punctele A, B şi C trebuie să fie vîrfurile unui triunghi echilateral; însă, singurul punct egal depărtat de toate vîrfurile unui astfel de triunghi va fi centrul cercului circumscris triunghiului, iar distanţa dintre acest punct şi vîrfuri este diferită de distanţa dintre două vîrfuri.

C a z u l 2°. Trei dintre cele patru puncte date (de exemplu, A, B şi C) trebuie să fie vîrfurile unui triunghi echilateral de latură a. Cel de-al patrulea punct D trebuie să fie situat la distanţa a de două vîrfuri ale triunghiului ABC, de exemplu, de A şi de C, şi la distanţa b de vîrful B.

Deci punctele A, B, C şi D vor fi vîrfurile unui romb, în care una dintre diagonale, AC este egală cu latura (fig. 99, *a*). De aici deducem uşor că, în acest caz, $b = BD = a = a\sqrt{3}$.

C a z u l 3° prezintă două posibilităţi.

A. C e l e d o u ă s e g m e n t e d e l u n g i m e b a u o e x t r e m i t a t e c o m u n ă (o vom nota cu D). În acest caz, celelalte trei puncte A, B şi C formează un triunghi echilateral de latură a. Punctul D este situat la distanţa b de două vîrfuri ale acestui triunghi, de exemplu, de A şi de C, şi la distanţa a de-al treilea vîrf B. Conform egalităţilor $AD = CD$ şi $BD = a$, punctul D trebuie să se afle pe perpendiculara ridicată în mijlocul segmentului AC la distanţa a de punctul B; în acest caz, punctul D poate fi situat de aceeaşi parte sau de partea opusă faţă de punctul B (fig. 99, *b* şi *c*). Astfel, punctele A, B, C şi D se află în vîrfurile deltoidului [1] cu două laturi AB şi BC

[1] **D e l t o i d** se numeşte patrulaterul care are două perechi de laturi vecine egale.

egale cu a, două laturi AD şi CD egale cu b şi diagonalele AC şi BD egale cu a. Din fig. 99, b şi c rezultă uşor că

$$b^2 = AP^2 + PD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a \mp \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2 \mp \sqrt{3})\, a^2,$$

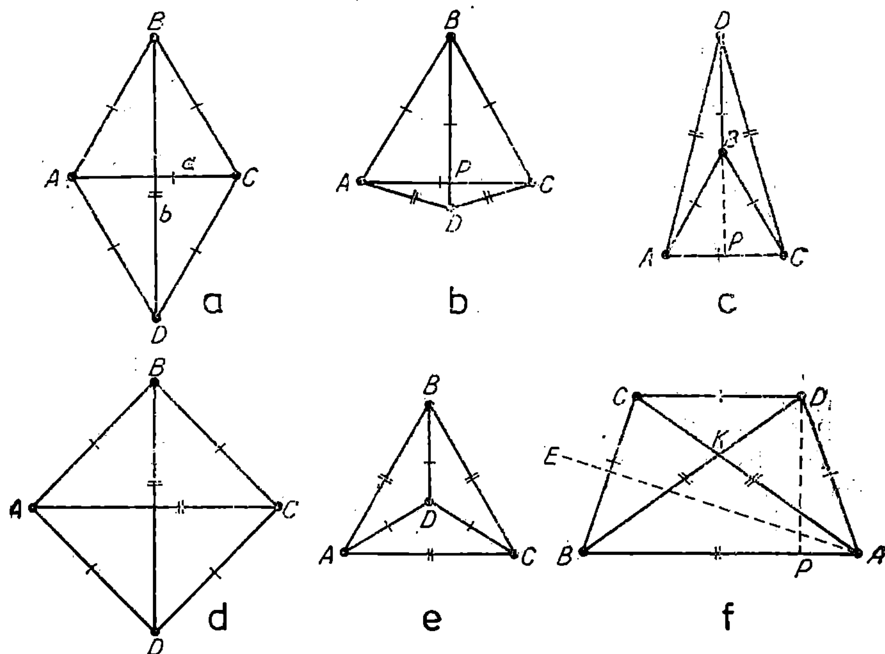


Fig. 99

adică

$$b = a\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{sau} \quad b = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

(cele două semne de sub radical corespund celor două posibilităţi, reprezentate în fig. 99, b şi c).

B. Cele două segmente de lungime b nu au o extremitate comună. Fie $AC = BD = b$, $AB = AD = BC = CD = a$. Potrivit egalităţilor $AB = BC$, $AD = DC$ şi $AB = AD$, punctele B şi D trebuie să se afle pe perpendiculara ridicată pe segmentul AC în mijlocul său, la distanţe egale de piciorul acestei perpendiculare; evident, ele pot să se afle numai de părţi diferite ale segmentului AC. Astfel, punctele A, B, C şi D sînt aici vîrfuri ale unui romb; deoarece diagonalele AC şi BD ale acestui romb sînt egale, rombul este un pătrat (fig. 99, d). În acest caz, $b = AC = a\sqrt{2}$.

Cazul 4° prezintă de asemeneam două posibilităţi.

A. Trei din cele patru puncte date (de exemplu, A, B şi C) sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. Deoarece punctul

D trebuie să fie egal depărtat de punctele A, B şi C, el trebuie să coincidă cu centrul cercului, circumscris triunghiului ABC (fig. 99, e). În acest caz evident, $b = AD = a\sqrt{3}/3$.

B. Nici un grup de trei puncte din cele patru nu este format din vîrfuri ale unui triunghi echilateral. Vom admite că b este cea mai mare din cele două distanţe considerate în condiţii egale b şi a.

Printre cele trei segmente de lungime b există două care au o extremitate comună (cele şase extremităţi ale acestor trei segmente nu pot fi toate diferite, deoarece ele trebuie să coincidă cu unul dintre cele patru puncte A, B, C şi D); fie, de exemplu, punctul A o astfel de extremitate comună şi respectiv $AB = AC = b$. Deoarece, conform presupunerii făcute, triunghiul ABC nu trebuie să fie echilateral, rezultă că $BC = a$. Vom observa, acum, că punctul D nu poate fi egal depărtat de punctele B şi C (adică nu poate fi situat pe perpendiculara AE, ridicată pe dreapta BC): într-adevăr, dacă am avea $BD = CD = a$, triunghiul BCD ar fi echilateral, iar dacă am avea $BD = CD = b$, distanţa AD ar fi mai mare decît b, în timp ce, conform presupunerii făcute, $a < b$ (punctul D, în acest caz, trebuie să fie simetricul punctului A faţă de dreapta BC).

Astfel, punctul D nu poate fi situat pe dreapta AE; vom considera că el se află de aceeaşi parte a acestei drepte ca şi punctul C (în caz contrar, putem totdeauna schimba denumirile punctelor B şi C). De aici rezultă că $DB > DC$ şi deoarece aceste două segmente nu pot lua decît valorile a şi b, rezultă că $DB = b$, $DC = a$. Însă trebuie să avem, în total, trei segmente de lungime a şi trei segmente de lungime b; deci, ultimul segment AD, încă nedeterminat, trebuie să fie egal cu a. Acum, din egalitatea triunghiurilor ABD şi BCA tragem concluzia că punctele D şi C sînt egal depărtate de AB, adică $DC \parallel AB$; deci cele patru puncte A, B, C şi D sînt, în acest caz, vîrfurile unui trapez isoscel, avînd baza mică egală cu laturile sale laterale, iar baza mare egală cu diagonalele (fig. 99, f). Din fig. 99, f avem

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AP \quad \text{sau} \quad b^2 = b^2 + a^2 - 2b\frac{b-a}{2}.$$

Împărţind ambii membri ai acestei egalităţi cu a^2, obţinem

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0,$$

de unde $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\text{a doua rădăcină a ecuaţiei } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ este negativă}\right)$.

Deci, toate configuraţiile posibile ale celor patru puncte în plan, în care distanţele dintre două puncte pot lua numai două valori posibile a şi b, sînt date în fig. 99, a—f. Astfel de configuraţii sînt posibile numai dacă

$$b = a\sqrt{3},\quad b = a\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad b = a\sqrt{2-\sqrt{3}},\quad b = a\sqrt{2},\quad b = \frac{a\sqrt{3}}{3},\quad b = a\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

aici b este lungimea care apare mai rar decît a, iar în cazul în care ambele lungimi apar tot atît de des (adică de trei ori) este cea mai mare dintre cele două lungimi. Este mai comod, însă, ca rezultatul obținut să-l formulăm considerînd pe b, în toate cazurile, drept cea mai mare dintre cele două lungimi a, b; deoarece $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ și $\frac{1}{\sqrt{3}/3} = \sqrt{3}$, atunci, în aceste condiții, rămîn doar următoarele posibilități:

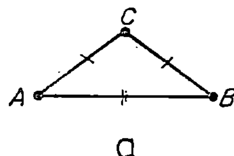


Fig. 100

$$b = a\sqrt{3},\quad b = a\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad b = a\sqrt{2}$$
$$\text{și}\quad b = a(1+\sqrt{5})/2.$$

b) Să considerăm succesiv diferite valori ale lui n.

I. $n=2$. În acest caz, există o singură distanță; în orice configurație a celor două puncte, această distanță ia numai o singură valoare a.

II. $n=3$. În acest caz, există trei distanțe. Pentru ca aceste trei distanțe să ia numai două valori diferite a și b (să zicem de două ori a și o dată b), trebuie ca cele trei puncte să fie situate în vîrfurile unui triunghi isoscel cu baza b și cu latura a (fig. 100, a și b; a doua din aceste figuri reprezintă un caz degenerat, cînd triunghiul se transformă într-un segment, iar cel de-al treilea vîrf al său — în mijlocul acestui segment). Este clar că aici a și b trebuie numai să verifice inegalitatea $a \geqslant b/2$; în particular, este posibil ca $a=b$.

III. $n=4$. Acest caz a fost examinat în rezolvarea problemei a).

IV. $n=5$. În acest caz, distanțele a două cîte două din patru puncte oarecare A, B, C, D din cele cinci puncte A, B, C, D, E, trebuie, de asemenea, să ia numai două valori b și a; de aici rezultă că aceste puncte trebuie să formeze una din cele șase configurații reprezentate în fig. 99, a—f.

Să presupunem că patru puncte A, B, C, D sînt dispuse ca în fig. 99, a. Distanțele dintre cele patru puncte A, B, C, E trebuie să ia aceleași două valori a și $b = a\sqrt{3}$; deci punctele A, B, C, E trebuie să fie situate ca în fig. 99, a sau ca în fig. 99, e. În acest caz, deoarece trei dintre aceste patru puncte (anume A, B și C) sînt vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura $a < b$, iar în configurația din fig. 99, e există doar triunghiul echilateral cu latura egală cu cea mai mare dintre cele două distanțe, rezultă că punctele A, B, C, E trebuie să fie dispuse ca în fig. 99, a. Și deoarece punctul E nu coincide cu punctul D, rezultă de aici că toate cele cinci puncte A, B, C, D, E trebuie să fie dispuse ca în fig. 101, a; însă, în acest caz, distanța $DE = 2a$ este diferită atît de a cît și de b. Cu aceasta se încheie demonstrația faptului că punctele A, B, C, D nu pot să fie dispuse în modul reprezentat în fig. 99, a.

La fel se arată că punctele A, B, C, D nu pot fi dispuse ca în fig. 99, b și c; pe baza uneia dintre aceste presupuneri vom ajunge în mod necesar la concluzia că configurația punctelor A, B, C, D, E are forma reprezentată în fig. 101, b sau c și în amîndouă cazurile distanța DE ia o valoare diferită de cele două existente. Dacă configurația celor patru puncte A, B, C, D are

forma reprezentată în fig. 99, *e*, atunci, analog cu primul caz examinat, se arată că tot această formă trebuie să o aibă și configurația punctelor A, B, C, E, ceea ce este imposibil dacă E este diferit de D. În mod analog, dacă patru puncte A, B, C, D sînt dispuse ca în fig. 99, *f*, atunci punctul E trebuie să coincidă cu D (deoarece cele patru puncte A, B, C și E trebuie, de asemenea, să fie dispuse în vîrfurile pătratului).

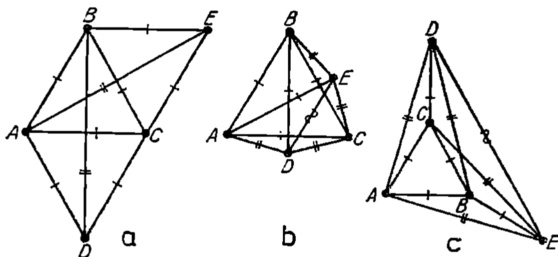


Fig. 101

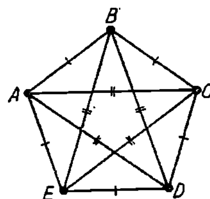


Fig. 102

Ne-a mai rămas, deci, să cercetăm doar cazul în care punctele A, B, C și D sînt dispuse în vîrfurile trapezului, reprezentat în fig. 99, *f*. În acest caz, punctele A, B, C și E trebuie să fie și ele vîrfurile unui astfel de trapez. De aici se deduce ușor că punctele A, B, C, D și E vor fi vîrfurile unui pentagon regulat (fig. 102)[1]. Această configurație a cinci puncte este singura care satisface enunțul problemei; în acest caz, toate cele 10 distanțe dintre cele cinci puncte luate două cîte două iau numai două valori diferite a și $b = a(1+\sqrt{5})/2$.

V. $n \geqslant 6$. Conform rezultatului obținut pentru $n=5$, în acest caz fiecare cinci puncte dintre cele n puncte considerate trebuie să se afle în vîrfurile unui pentagon regulat. Însă, dacă cele $n \geqslant 6$ puncte sînt toate diferite, atunci o astfel de configurație este, evident, imposibilă. Deci pentru $n \geqslant 6$ nu există configurații de n puncte care să satisfacă enunțul problemei.

Astfel problema este posibilă numai pentru $n = 3$, 4 sau 5.

109. a) Trebuie să indicăm o configurație de N puncte în plan (unde N este un număr întreg oarecare, mai mare decît 2), astfel încît aceste puncte să nu fie toate situate pe aceeași dreaptă, iar distanțele a două cîte două dintre ele să fie exprimate prin numere întregi.

Vom da chiar două astfel de configurații.

P r i m a r e z o l v a r e. Nu este greu de verificat direct că, dacă

$$x = 2uv; \quad y = |u^2 - v^2|, \quad z = u^2 + v^2, \tag{*}$$

[1] Să observăm că, dacă se circumscrie un cerc trapezului $ABCD$, reprezentat în fig. 99, *f*, atunci patru puncte A, B, C și D vor fi patru vîrfuri ale pentagonului regulat, înscris în acest cerc. Pentru demonstrație, este suficient să observăm că, dacă $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB = \alpha$, atunci $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CDA - \sphericalangle BDA = (180° - \alpha) - \alpha = 180° - 2\alpha = \sphericalangle ABD$ și $\sphericalangle BCD = 180° - 2(180° - 2\alpha) = 4\alpha - 180°$. Deoarece $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CBA = 180°$, avem $5\alpha - 180° = 180°$, $\alpha = 2\cdot\frac{180°}{5} = 72°$. Dar, deoarece $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \frac{180°}{5}$, rezultă că AB, BC și CD sînt laturi ale pentagonului regulat, înscris în cercul circumscris trapezului.

atunci

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (**)$$

Utilizînd aceste formule[1], nu va fi greu să găsim $N-2$ grupuri de cîte trei numere întregi

$$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_{N-2}, y_{N-2}, z_{N-2},$$

care verifică condiţia (**) şi care sînt astfel încît $x_1 = x_2 = \ldots = x_{N-2}$. Într-adevăr, fie k un multiplu oarecare de $N-2$ numere întregi 1, 2, 3, ..., $N-2$. Vom face succesiv în formulele (*)

$$u=1,\ u=k;\ u=2,\ v=\frac{k}{2};\ u=3,\ v=\frac{k}{3};\ \ldots;\ u=N-2,\ v=\frac{k}{N-2};$$

în acest caz, vom obţine $N-2$ grupuri de cîte trei numere întregi x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; $x_{N-2}, y_{N-2}, z_{N-2}$, care satisfac (**) şi pentru care $x_1 = x_2 = \ldots = x_{N-2} = 2k$.

Vom însemna, acum, pe o dreaptă oarecare RS din plan un punct arbitrar O şi încă $n = N-2$ puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, situate faţă de punctul O la distanţele $y_1, y_2, \ldots, y_n = y_{N-2}$, iar pe perpendiculară OP la dreapta RS în punctul O vom însemna punctul P, depărtat cu $x=2k$ unităţi de lungime de O (fig. 103, *a*). Nu este greu de văzut că, în acest caz, cele N puncte P, O, $A_1, A_2, \ldots, A_{N-2}$ vor avea proprietatea că toate distanţele dintre aceste puncte luate două cîte două se exprimă în numere întregi.

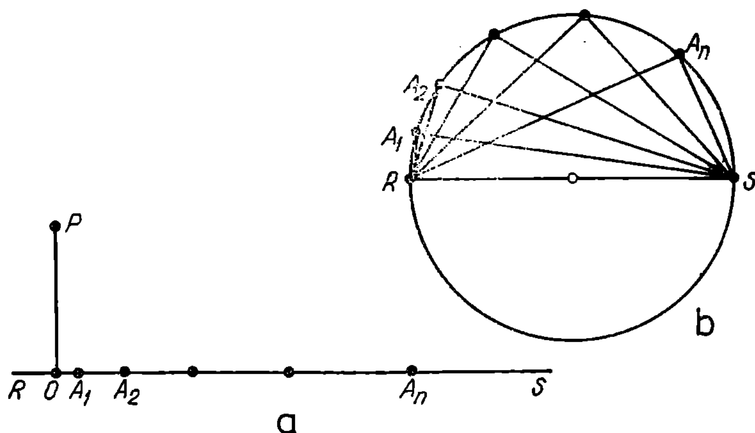


Fig. 103

Observaţie. În loc de a situa $N-1$ puncte $O, A_1, A_2, \ldots, A_{N-2}$ pe dreapta RS şi un singur punct P pe perpendiculara la această dreaptă, pot fi dispuse pe dreapta RS numai $N-2$ puncte, iar ca al N-lea punct se poate lua punctul P' situat pe dreapta OP simetric cu punctul P faţă de O. Se poate, de asemenea, aşeza pe dreapta RS de aceeaşi parte a lui O doar jumătate din numărul total de puncte, celelalte putînd fi luate simetrice faţă de punctul O.

[1] Formulele (*) sînt formule cunoscute, care dau lungimile laturilor în numere întregi ale triunghiurilor dreptunghice (v., de exemplu, problema 128, a) din [56].

R e z o l v a r e a a d o u a. Conform formulelor (*) și (**), avem

$$\left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2=1. \qquad (***)$$

Utilizînd (***), putem găsi fără dificultate N puncte R, S, A_1, A_2, ..., $A_{N-2} = A_n$, situate pe cercul de diametru $RS = 1$, astfel încît toate distanțele A_1R, A_2R, ..., A_nR; A_1S, A_2S, ..., A_nS să fie exprimate prin numere raționale: în acest scop este suficient să alegem $n = N-2$ perechi de numere raționale (de exemplu, întregi) u_1, v_1; u_2, v_2; ...; u_n, v_n ($u_1>v_1$, $u_2>v_2$, ..., $u_n>v_n$) și să luăm pe cerc punctele A_1, A_2, ..., A_n în așa fel, încît

$$A_iR = 2u_iv_i/(u_i^2+v_i^2); \quad i = 1, 2, ..., n;$$

în acest caz, vom avea (fig. 103, *b*)

$$A_iS = (u_i^2-v_i^2)/(u_i^2+v_i^2).$$

Vom demonstra, acum, că toate distanțele dintre două puncte oarecare din cele considerate vor fi, de asemenea, exprimate prin numere raționale. Într-adevăr, deoarece diametrul cercului este egal cu 1, avem, conform teoremei sinusurilor,

$$A_1A_2 = \sin A_1RA_2 = \sin(A_1RS - A_2RS) =$$
$$= \sin A_1RS \cos A_2RS - \sin A_2RS \cos A_1RS,$$

de unde rezultă imediat că A_1A_2 este un număr rațional (deoarece lungimile segmentelor A_1R, A_1S, A_2R, A_2S, deci și $\sin A_1RS = A_1S$, $\cos A_1RS = A_1R$, $\sin A_2RS = A_2S$ și $\cos A_2RS = A_2R$ sînt raționale). În mod cu totul analog se arată că și fiecare dintre distanțele A_iA_j ($i, j = 1, 2, ..., n$) sînt exprimate prin numere raționale.

Fie k un multiplu oarecare (de exemplu, cel mai mic multiplu comun) al numitorilor tuturor fracțiilor care exprimă distanțele dintre două puncte oarecare R, S, A_1, A_2, ..., A_n. Atunci, mărind de k ori figura care reprezintă configurația celor N puncte R, S, A_1, A_2, ..., A_n, vom ajunge la un sistem de N puncte pentru care toate distanțele dintre aceste puncte luate două cîte două se exprimă în numere î n t r e g i. Toate aceste puncte se află pe un același cerc (de diametru k) și, deci, nu se află pe o aceeași dreaptă.

b) Vom arăta, acum, că un număr i n f i n i t de puncte, care nu sînt toate situate pe o aceeași dreaptă, nu poate avea proprietatea ca toate distanțele dintre două puncte oarecare se exprimă în numere întregi. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că există un număr f i n i t de puncte situate la distanțe exprimate în numere întregi de trei puncte date, O, P și Q care nu se află pe o aceeași dreaptă.

Fie $PO = m$ și $QO = n$; m și n, conform ipotezei, sînt numere întregi. Vom nota cu A un punct arbitrar, situat față de punctele O, P și Q la distanțe exprimate în numere întregi (fig. 104). Deoarece diferența dintre două laturi ale triunghiului nu este mai mare decît a treia latură, avem

$$|AP - AO| \leqslant PO = m$$

şi

$$|AQ - AO| \leqslant QO = n$$

(semnul egalității corespunde aici cazului în care triunghiul APO, respectiv AQO, degenerează într-un segment de dreaptă). Deoarece toate distanțele AO, AP și AQ se exprimă în numere întregi, diferențele $AP-AO$ și $AQ-AO$ se vor exprima și ele prin numere întregi. Conform inegalităților demonstrate, rezultă de aici că diferența $AP - AO$ poate lua în total $2m+1$ valori diferite (și anume $m, m-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -m+1, -m$), iar diferența $AQ - AO$ poate lua în total $2n+1$ valori ($n, n-1, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -n+1, -n$).

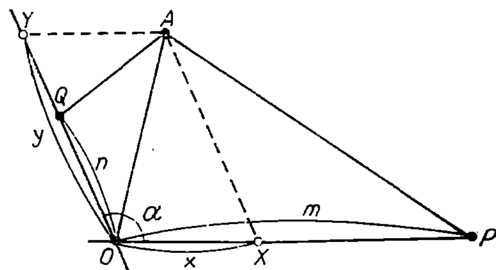


Fig. 104

Vom arăta că pentru valori date ale ambelor diferențe $AP - AO = k$ și $AQ - AO = l$ există pentru punctul A numai două poziții diferite; de aici rezultă, imediat, că nu pot exista mai mult decît $2(2m+1)(2n+1)$ puncte diferite A, situate față de toate cele trei puncte O, P și Q la distanțe exprimate în numere întregi; cu aceasta problema considerată este rezolvată.

Deci, fie $AP - AO = k$ și $AQ - AO = l$. Vom duce prin punctul A dreptele AX și AY, paralele respectiv la OQ și OP; vom nota cu X și Y punctele de intersecție a acestor drepte respectiv cu dreptele OP și OQ, cu x și y — lungimile segmentelor $OX = YA$ și $OY = XA$, iar cu α — unghiul QOP; deoarece O, P și Q nu se află pe o aceeași dreaptă, avem $\alpha \neq 0$ și $\alpha \neq 180°$. Aplicînd teorema cosinusului la triunghiurile OAX, PAX și QAY, obținem

$$OA = \sqrt{OX^2 + XA^2 - 2OX\cdot XA \cos \widehat{OXA}} = \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha},$$

$$PA = \sqrt{PX^2 + XA^2 - 2PX\cdot XY \cos \widehat{PXA}} = \sqrt{(y-m)^2+y^2+2(x-m)y\cos\alpha},$$

$$QA = \sqrt{QY^2 + YA^2 - 2QY\cdot YA \cos \widehat{QXA}} = \sqrt{(y-n)^2+x^2+2(y-n)x\cos\alpha}.$$

Deoarece $AP - AO = k$ și $AQ - AO = l$, atunci

$$\sqrt{(y-m)^2 + y^2 + 2(x-m)y\cos\alpha} - \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha} = k, \qquad \text{(I)}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-n)^2 + 2x(y-n)\cos\alpha} - \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha} = l. \qquad \text{(II)}$$

Vom transforma prima dintre aceste ecuații. Trecînd al doilea radical în dreapta și ridicînd apoi ambii membri la pătrat, vom obține

$$(x-m)^2+y^2+2(x-m)y\cos\alpha = x^2+y^2+2xy\cos\alpha + 2k\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\alpha} + k^2,$$

adică

$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - 2my \cos \alpha =$$
$$= x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha + k^2 + 2k\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha}$$

sau

$$-2xm - 2ym \cos \alpha + m^2 - k^2 = 2k\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha}.$$

La fel, din a doua ecuație vom obține

$$-2yn - 2xn \cos \alpha + n^2 - l^2 = 2l\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha}.$$

Egalînd ultimele două ecuații, vom avea

$$l(-2xm - 2ym \cos \alpha + m^2 - k^2) = k(-2yn - 2xn \cos \alpha + n^2 - l^2) \quad (*)$$

și ridicînd-o pe prima la pătrat, vom găsi

$$(-2xm - 2ym \cos \alpha + m^2 - k^2)^2 = 4k^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha). \quad (**)$$

Astfel, pentru determinarea lui x și y, obținem un sistem de două ecuații cu două necunoscute, una dintre aceste ecuații [ecuația (*)] fiind de gradul întîi, iar a doua [ecuația (**)] de gradul al doilea [1]. Acest sistem de ecuații poate fi rezolvat prin metoda substituției; el are nu mai mult de două soluții reale diferite (soluție a sistemului este perechea de numere x și y). Dar, fiind date x și y, poziția punctului A este complet determinată (v. fig. 104; x și y sînt coordonatele punctului A într-un sistem oblic de coordonate). Deci, pentru

$$AP - AO = k \quad \text{și} \quad AQ - AO = l$$

date, punctul A poate efectiv ocupa nu mai mult de două poziții diferite, ceea ce trebuia demonstrat.

---

[1] La prima vedere, se pare că pentru $k = l = 0$ ecuația (*) se transformă într-o identitate; însă nu este greu de văzut că, în acest caz, ecuațiile (I) și (II) se reduc la următorul sistem de două ecuații de gradul întîi

$$-2xm - 2ym \cos \alpha + m^2 = 0, \quad -2yn - 2xn \cos \alpha + n^2 = 0.$$

Ecuația (**), cum nu este greu de văzut, se transformă într-o consecință a ecuației (*) [adică $k^2(-2yn - 2xn \cos \alpha + n^2 - l^2)^2/2$ este identic egală cu $4k^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha)$], numai dacă $k = 0$ sau dacă $n^2 = l^2$ (în acest caz, $x = 0$, ceea ce se poate deduce din ecuația (II)). Or, în primul caz, putem înlocui (**) prin ecuația

$$(-2yn - 2xn \cos \alpha + n^2 - l^2)^2 = 4l^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha),$$

care se obține din ecuația (II) la fel cum (**) se obține din (I). Însă în al doilea caz, sistemul de ecuații (I) și (II) se reduce la două ecuații simple de gradul întîi

$$x = 0 \quad \text{și} \quad 2(k + m \cos \alpha)\, y = m^2 - k^2,$$

iar a doua ecuație nu poate să se transforme într-o identitate, deoarece în acest caz $m^2 - k^2 \neq 0$. Astfel în toate cazurile, obținem un sistem de două ecuații în x și y, care are mai mult de două soluții.

Observaţie. În rezolvarea acestei probleme, am arătat algebric că numărul de puncte pentru care $AP - AO = k$ şi $AQ - AO = l$ (O, P şi Q sînt puncte date necoliniare; k şi l sînt numere date) nu este mai mare decît doi. Pentru a obţine geometric acelaşi rezultat, este firesc să cercetăm locul geometric al punctelor pentru care diferenţa distanţelor la două puncte date din plan este o mărime constantă. Acest loc geometric este studiat amănunţit în matematicile superioare; acesta este o curbă, numită **hiperbolă** (un caz particular al acestei curbe este graficul funcţiei invers proporţionale), care are

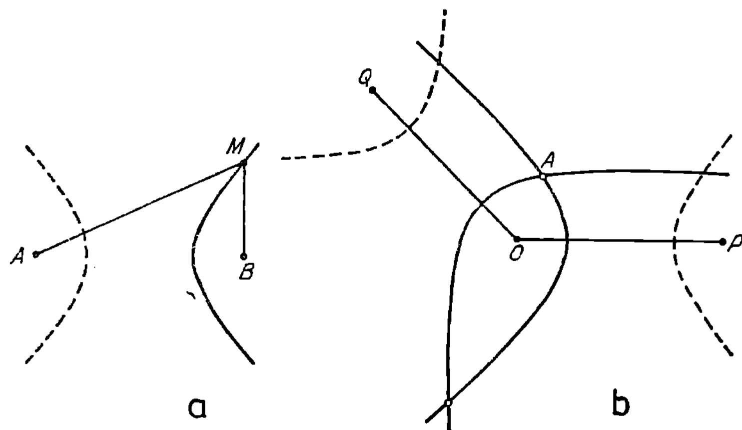


Fig. 105

forma arătată în fig. 105, *a*[1]. Din forma acestei curbe se poate constata că două astfel de curbe, situate ca în fig. 105, *b*, nu pot să se intersecteze mai mult decît în două puncte; acest fapt a fost demonstrat mai înainte cu ajutorul ecuaţiilor.

Să mai observăm că, în cazul în care punctele O, P şi Q sînt coliniare, această demonstraţie nu mai este valabilă; în acest caz, însuşi modul de definire a mărimilor x şi y îşi pierde sensul. Consideraţiile geometrice, de asemenea, nu mai dau demonstraţia faptului că numărul de puncte pentru care $AP - AO = k$ şi $AQ - AO = l$ este finit: dacă O, P şi Q sînt coliniare, hiperbolele respective pot să degenereze în porţiuni din această dreaptă (aşa va fi pentru $k = OP$ şi $l = OQ$) şi să coincidă de-a lungul uneia dintre semidrepte. Într-adevăr, pe o dreaptă nu este greu să găsim o mulţime infinită de puncte pentru care toate distanţele se exprimă prin numere întregi: o astfel de mulţime va fi, de exemplu, mulţimea tuturor punctelor de pe dreaptă, situate la distanţe egale cu numere întregi de un anumit punct fix.

110. a) Fie $ABCD$ paralelogramul în al cărui interior şi pe laturi nu se află nici un nod al reţelei de pătrate (fig. 106). Pe latura AB a acestui paralelogram vom adăuga paralelogramul $ABEF$ egal cu primul. Evident că vîrfurile lui $ABEF$ se află, de asemenea, în vîrfurile reţelei de pătrate, care acoperă planul şi că nici în interiorul sau pe laturile lui nu se află vreun vîrf al pătratelor. Într-adevăr, $ABEF$ poate fi suprapus cu $ABCD$ printr-un transport paralel în direcţia segmentului FA, cu distanţa egală cu lungimea

[1] În fig. 105, *a* şi *b* sînt reprezentate punctat celelalte ramuri ale hiperbolelor. În mod obişnuit, se numeşte hiperbolă nu locul geometric al punctelor pentru care diferenţa distanţelor la două puncte date are o mărime constantă, ci locul geometric al punctelor pentru care diferenţa distanţelor la două puncte date are o mărime absolută dată; hiperbola constă din două **ramuri** care sînt locul geometric al punctelor M, pentru care $MA - MB = a$ şi locul geometric al punctelor N, pentru care $NB - NA = a$.

acestui segment; însă, într-o astfel de translaţie, reţeaua de pătrate trece în ea însăşi, deci amîndouă paralelogramele considerate sînt dispuse faţă de această reţea într-un mod asemănător. Vom alipi, acum, paralelograme egale cu *ABCD* şi la laturile *BC*, *CD* şi *DA*; mai departe, vom alipi aceleaşi paralelograme şi la laturile noilor paralelograme şi la laturile lui *ABEF* etc. În acest caz, vom obţine o reţea de paralelograme care acoperă planul, la fel cu reţeaua de pătrate iniţială, iar toate vîrfurile acestei reţele de paralelograme vor fi dispuse în nodurile reţelei de pătrate, în interiorul şi pe laturile reţelei de paralelograme nefiind situat nici un nod al reţelei de pătrate (v. fig. 106).

În reţeaua de pătrate vom alege un pătrat oarecare (vom nota acest pătrat cu cifra *I*) şi vom arăta că aria paralelogramului *ABCD* este egală cu aria acestui pătrat. În acest scop, vom considera acele pătrate care se intersectează cu paralelogramul *ABCD* (în figura noastră acestea vor fi pătratele *II*, *III*, *IV* şi *V*) şi vom transporta paralel pe fiecare dintre ele astfel, încît să coincidă cu pătratul *I*. În acest caz, porţiunile paralelogramului *ABCD*, care se găsesc în interiorul acestor pătrate, vor trece în interiorul pătratului *I*. Să demonstrăm, acum, că aceste porţiuni ale paralelogramului *ABCD* vor acoperi în întregime pătratul *I* fără spaţii goale şi fără duble acoperiri; cu aceasta va fi demonstrat că ariile pătratului *I* şi paralelogramului *ABCD* coincid.

Într-adevăr, vom presupune mai întîi că în interiorul pătratului *I* se va afla cel puţin un punct neacoperit de porţiunile paralelogramului *ABCD*. Deoarece reţeaua construită de paralelograme acoperă tot planul, acest punct neacoperit (îl vom nota cu litera *M*) trebuie să fie cuprins într-un paralelogram al reţelei. Vom transporta paralel acest paralelogram astfel, încît el să coincidă cu paralelogramul *ABCD*. În acest caz, punctul *M* va trece într-un punct *M'* al paralelogramului *ABCD* şi, deci, va aparţine uneia dintre porţiunile în care *ABCD* este împărţit cu ajutorul pătratelor. Însă, în acest caz, mutînd pătratul care acoperă acest punct în poziţia *I* vom acoperi punctul *M* al pătratului *I*, ceea ce contrazice presupunerea că punctul *M* nu a fost acoperit de porţiunile paralelogramului *ABCD*.

Să presupunem acum că, după mutarea tuturor pătratelor, care se intersectează cu *ABCD*, în poziţia *I*, un punct oarecare *M* al pătratului *I* va fi acoperit simultan de două porţiuni ale paralelogramului *ABCD*. Să considerăm pătratele care conţin aceste două porţiuni ale paralelogramului *ABCD*; să presupunem, de exemplu, că acestea sînt pătratele *P* şi *Q*. Atunci, la transportul paralel al întregului plan, care trece pătratul *P* în pătratul *Q*, un punct al paralelogramului *ABCD* va trece într-un punct al aceluiaşi paralelogram. Deoarece toate vîrfurile reţelei de pătrate sînt în acelaşi timp toate vîrfurile reţelei de paralelograme (aici din nou folosim faptul că în interiorul şi pe laturile paralelogramului *ABCD*, deci şi în interiorul şi pe laturile celorlalte paralelograme ale reţelei nu se află vîrfuri ale reţelei de pătrate), atunci în acest transport paralel al planului, care trece pătratul *P* în pătratul *Q*, reţeaua de paralelograme, ca şi reţeaua de pătrate, trebuie să treacă în ea însăşi. Deci, într-un astfel de transport, paralelogramul *ABCD* trebuie să treacă într-un alt paralelogram al reţelei şi, deci, nici unul dintre punctele sale nu poate trece din nou într-un punct al aceluiaşi paralelogram *ABCD*. Cu aceasta s-a demonstrat că nici un punct al pătratului *I* nu poate fi acoperit simultan

de două porțiuni ale lui $ABCD$. Vedem deci că aria pătratului I este, într-adevăr egală cu aria paralelogramului $ABCD$, ceea ce era de demonstrat.

b) Vom observa, în primul rînd, că, potrivit rezultatului problemei a), formula

$$S = N + \frac{k}{2} - 1$$

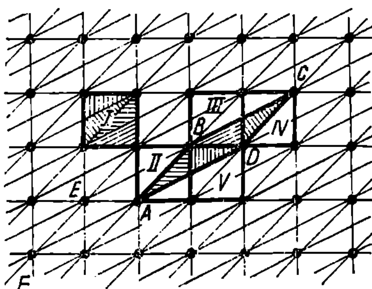


Fig. 106

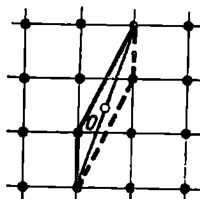


Fig. 107

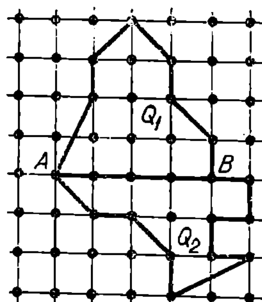


Fig. 108

este adevărată pentru paralelogramele care nu conțin în interiorul lor și pe laturi noduri ale rețelei de pătrate. Într-adevăr, pentru astfel de paralelograme $S = 1$ [v. problema a)], $N = 0$, $k = 4$ (deoarece cele patru vîrfuri ale paralelogramului se află în vîrfurile rețelei de pătrate și

$$S = N + \frac{k}{2} - 1 = 0 + \frac{4}{2} - 1.$$

De aici rezultă imediat că această formulă este adevărată și pentru toate triunghiurile „goale", adică pentru toate triunghiurile cu vîrfurile în nodurile rețelei de pătrate, în al căror interior și pe laturi nu se află alte noduri ale rețelei. Într-adevăr, un astfel de triunghi poate fi totdeauna completat pînă la un paralelogram, adăugîndu-i-se încă un triunghi, simetric cu primul față de mijlocul O al uneia dintre laturile sale (fig. 107). Deoarece rețeaua infinită de pătrate are ca centru de simetrie mijlocul oricăruia dintre segmentele care unesc două noduri ale rețelei, este clar că în interiorul și pe laturile triunghiului adăugat nu se va afla nici unul dintre nodurile rețelei (astfel, punctul simetric față de O cu un astfel de nod ar fi un nod al rețelei de pătrate situat în interiorul sau pe o latură a primului triunghi). Astfel, aria paralelogramului astfel construit trebuie să fie egală cu 1; deci aria S a triunghiului „gol" inițial este egală cu 1/2. Dar pentru un astfel de triunghi $N = 0$, $k = 3$, astfel că

$$S = N + \frac{k}{2} - 1 = 0 + \frac{3}{2} - 1.$$

Vom considera două poligoane Q_1 și Q_2, care au toate vîrfurile în nodurile rețelei de pătrate și care sînt adiacente prin una din laturile comune AB (fig. 108). Să presupunem cunoscut că formula $S = N + \frac{k}{2} - 1$ este adevă-

rată pentru amîndouă aceste poligoane; vom demonstra că, în acest caz, formula considerată va fi adevărată şi pentru poligonul mai mare Q, obţinut prin reunirea lui Q_1 şi Q_2.

Într-adevăr, fie S_1, N_1 şi k_1 — aria, numărul nodurilor reţelei din interiorul poligonului şi numărul nodurilor reţelei pe frontierea poligonului Q_1, iar S_2, N_2 şi k_2 — numerele corespunzătoare pentru poligonul Q_2. Conform ipotezei, avem

$$S_1 = N_1 + \frac{k_1}{2} - 1, \qquad S_2 = N_2 + \frac{k_2}{2} - 1.$$

Vom nota cu k' numărul nodurilor reţelei de pătrate situate pe segmentul AB, care conţine punctele A şi B. Pentru poligonul Q, aria sa S, numărul N de noduri ale reţelei din interiorul poligonului şi numărul k de noduri ale reţelei pe frontiera poligonului vor fi exprimate, evident, cu ajutorul lui S_1, N_1, k_1, S_2, N_2, k_2 şi k' în modul următor:

$$S = S_1 + S_2, \qquad N = N_1 + N_2 + (k' - 2)$$

(la nodurile interioare ale reţelei se vor adăuga toate nodurile situate pe AB, cu excepţia lui A şi B) şi

$$k = (k_1 - k') + (k_2 - k') + 2$$

(în ultimul termen $+2$ figurează nodurile A şi B). Deci

$$S = S_1 + S_2 = N_1 + \frac{k_1}{2} - 1 + N_2 + \frac{k_2}{2} - 1 =$$

$$= (N_1 + N_2 + k' - 2) + \frac{k_1 + k_2 - 2k' + 2}{2} - 1 = N + \frac{k}{2} - 1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Acum este destul de uşor să demonstrăm că această formulă este adevărată pentru toate poligoanele cu vîrfurile în nodurile reţelei de pătrate. Fiecare astfel de poligon poate fi împărţit cu ajutorul diagonalelor într-o mulţime de triunghiuri alipite unul de altul pe una din laturi [1]; toate vîrfurile fiecăruia dintre aceste triunghiuri vor coincide cu anumite vîrfuri ale poligonului iniţial şi, deci, vor fi vîrfuri ale reţelei de pătrate. Fiecare din triunghiurile obţinute, care nu sînt „goale“ (adică care conţin în interiorul lor sau pe frontieră noduri ale reţelei), poate fi mai departe împărţit într-un anumit număr de triunghiuri „goale“. Într-adevăr, unind un nod interior oarecare al reţelei cu cele trei vîrfuri ale triunghiului sau un nod oarecare de pe frontieră cu vîrful opus al triunghiului, vom împărţi triunghiul nostru în trei sau în două triunghiuri mai mici, astfel încît, pentru fiecare dintre ele, numărul nodurilor reţelei care se află în interior sau pe laturi va fi cel puţin cu o unitate mai mic decît pentru cel iniţial.

---

[1] V., de exemplu, cartea [56].

Repetînd această împărțire de un număr suficient de ori, vom obține în cele din urmă o descompunere a tuturor triunghiurilor noastre (adică, cu alte cuvinte, a întregului poligon inițial) în triunghiuri „goale". Amintindu-ne acum că pentru triunghiurile „goale" formula $S = N + \frac{k}{2} - 1$ este adevărată și aplicînd de mai multe ori rezultatul demonstrat mai sus (conform căruia această formulă este adevărată pentru suma Q a poligoanelor Q_1 și Q_2, dacă ea este adevărată pentru Q_1 și pentru Q_2), ne vom convinge că formula considerată este valabilă pentru orice poligon cu vîrfurile în nodurile rețelei.

111. Să presupunem că un poligon M convex, simetric față de centru, cu centrul în nodul O al rețelei de pătrate, nu conține în interiorul său nici un nod al rețelei, diferit de O. Vom considera toate nodurile posibile ale rețelei de pătrate ale căror distanțe la ambele drepte ale rețelei care trec prin punctul O se exprimă prin numere pare și vom construi toate poligonale egale și paralele cu poligonul M, avînd centrele în aceste puncte (fig. 109, *a*).

Afirmăm că nici unul dintre aceste poligoane nu va intersecta poligonul M. Într-adevăr, vom presupune că poligonul M_Q cu centrul în punctul Q intersectează poligonul M; fie A un punct oarecare comun al acestor două poligoane (fig. 109, *b*). Vom nota cu A' punctul de pe poligonul M_Q simetric cu punctul A față de centrul Q al acestui poligon. Poligonul M se obține din poligonul M_Q printr-un transport paralel la segmentul QO; deci punctului A' al poligonului M_Q îi corespunde punctul B al poligonului M, pentru care QA' este paralel și egal cu OB. În acest caz, patrulaterul $OBA'Q$ este un para-

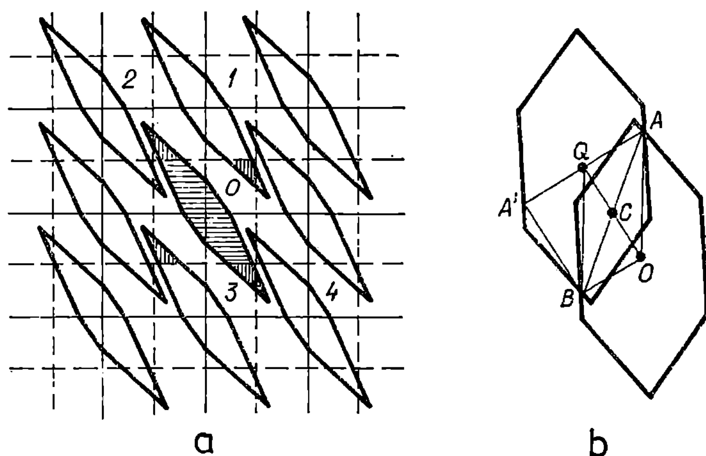


Fig. 109

lelogram și, deci, OB este paralel și egal cu QA'; de aici rezultă că OB este, de asemenea, paralel și egal cu AQ și, deci, patrulaterul $OBQA$ este, de asemenea un paralelogram. Din ultimul fapt rezultă că mijlocul C al segmentului AB coincide cu mijlocul segmentului OQ. Însă, deoarece A și B sînt două puncte ale poligonului convex M, atunci punctul C se află în interiorul acestui poli-

gon. Pe de altă parte, din faptul că distanța de la punctul $\bar{Q}$ la acele drepte ale rețelei de pătrate care trec prin O se exprimă prin numere pare, rezultă că centrul C al segmentului OQ este un nod al rețelei de pătrate. Astfel, dacă unul oarecare din poligoanele considerate ar fi intersectat poligonul inițial M, atunci M ar fi trebuit să conțină în interiorul său un nod al rețelei de pătrate diferit de O, ceea ce contrazice enunțul problemei.

Restul demonstrației că aria poligonului M nu este mai mare decît 4 este asemănător cu soluția problemei 110, a). Dreptele din rețeaua de pătrate ale căror distanțe la dreptele care trec prin O se exprimă prin numere impare (aceste drepte sînt reprezentate punctat în fig. 109, *a*) formează în plan o rețea de pătrate mai mari cu ariile egale cu 4. Poligonul M poate să se intersecteze cu cîteva astfel de pătrate; în fig. 109, *a* acest poligon se intersectează cu pătratele notate cu numerele *0* (aceasta este pătratul cu centrul în punctul O), *1*, *2*, *3*, *4*. Vom muta acum poligonul M paralel, astfel ca pătratul *1* să coincidă cu pătratul *0*. În acest caz, prin transport paralel, poligonul M va coincide cu unul dintre poligoanele M_1 construite în plan, egal și paralel cu poligonul M; în particular, o porțiune a poligonului M situată în pătratul *1* va coincide cu porțiunea din poligonul M_1, situată în pătratul *0*. Deci, printre poligoanele considerate există un poligon M_1 astfel că o porțiune a acestui poligon, situată în pătratul *0*, este egală cu porțiunea din poligonul M situată în pătratul *1*. La fel se arată că există poligoanele M_2, M_3, M_4, ale căror porțiuni situate în pătratul *0* sînt egale respectiv cu porțiunile din poligonul M situate în pătratele *2*, *3*, *4*. De aici rezultă că partea comună a tuturor acestor porțiuni din poligoanele considerate, care se află în pătratul *0*, este egală cu aria poligonului M. Și, deoarece poligoanele noastre nu se intersectează, rezultă că aria poligonului M nu poate fi mai mare decît aria pătratului *0*, adică 4.

Din teorema lui Minkovski rezultă că orice poligon convex, simetric față de centru, de arie m a i m a r e decît patru și cu centrul într-un nod al rețelei de pătrate conține neapărat în interiorul său noduri ale rețelei diferite de centru. (În acest caz, datorită simetriei centrale a poligonului, putem fi chiar încredințați că, în afară de centru, el mai conține cel puțin încă două noduri ale rețelei, simetrice față de centru.)

O b s e r v a ț i e. Teorema lui Minkovski poate fi generalizată. Vezi în această privință cărțile [45] și [38].

112. Vom arăta în primul rînd că, dacă raza ρ a tuturor copacilor este mai mare decît 1/50, atunci vederea din centrul grădinii este acoperită în întregime. Ducem prin centrul O o dreaptă oarecare MN, care intersectează conturul grădinii în punctele M și N, și vom arăta că un observator din centrul grădinii nu poate vedea lumină nici în direcția ON, nici în direcția OM. Ducem tangentele în punctele M și N la cercul care înconjură grădina și două drepte paralele cu MN la distanța ρ de aceasta (fig. 110, *a*). Obținem dreptunghiul $ABCD$, a cărui arie este egală cu

$$AB \cdot MN = 100 \cdot 2\rho = 4 \cdot 50\rho,$$

adică mai mare decît 4 (deoarece $\rho > 1/50$). Conform teoremei lui Minkovski (v. problema 111), de aici rezultă că în interiorul patrulaterului $ABCD$ există

două vîrfuri P şi Q ale reţelei de pătrate formate de centrele copacilor, simetrice faţă de punctul O (v. observaţia de la sfîrşitul problemei 111). Copacii de rază ρ, care cresc în aceste două puncte P şi Q, vor intersecta desigur razele OM şi ON, de unde rezultă că un observator din centru nu va vedea lumină nici în direcţia OM, nici în direcţia ON.

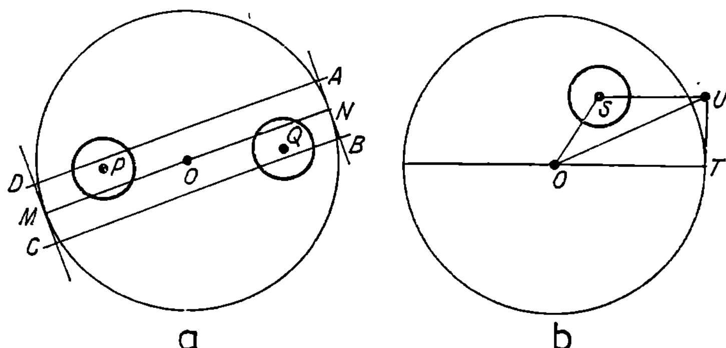
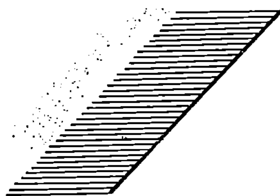


Fig. 110

Vom arăta acum că, dacă $\rho < 1/\sqrt{2\,501}$, vor exista fîşii de lumină. Fie OT o dreaptă din reţeaua de pătrate care trece prin cent ul grădinii, T punctul de intersecţie a acestei drepte cu conturul grădinii, TU un segment, de lungime 1, din tangenta dusă la conturul grădinii în punctul T (fig. 110, *b*). Evident că punctul U este un vîrf al reţelei de pătrate, iar în interiorul segmentului OU nu va fi situat nici un vîrf al reţelei; mai departe

$$OU = \sqrt{OT^2 + TU^2} = \sqrt{2\,501}.$$

Fie S un vîrf oarecare al reţelei de pătrate, situat în interiorul grădinii. Conform formulei din problema 110, b), aria triunghiului OUS nu poate fi mai mică decît 1/2 (deoarece în acest caz k este egal cu trei) şi, deci, înălţimea triunghiului OUS, coborîtă pe latura OU, nu poate fi mai mică decît $1/\sqrt{2\,501}$. Însă aceasta înseamnă că copacul de rază $\rho < 1/\sqrt{2\,501}$, care creşte în punctul S, nu poate să intersecteze raza OU şi, deci, nu poate să împiedice vederea din centru în această direcţie.


Fig. 111

113. În primul rînd, este evident că două domenii în care este împărţit planul cu o singură dreaptă, pot fi vopsite cu două culori în condiţiile problemei (fig. 111). Acum, vom arăta că, dacă domeniile în care este împărţit planul prin n drepte pot fi vopsite cu două culori respectînd condiţiile problemei, atunci şi domeniile în care este împărţit planul prin $n + 1$ drepte pot fi şi ele vopsite cu două culori; de aici, conform principiului inducţiei complete va rezulta afirmaţia din problemă.

Într-adevăr, fie $n + 1$ drepte l_0, l_1, l_2, ..., l_n. Suprimăm una dintre aceste drepte, l_0; celelalte n drepte împart planul în domenii care, conform ipotezei din inducţie, pot fi vopsite cu două culori în condiţiile problemei (fig. 112, *a*). Vom duce acum dreapta l_0 şi de o parte a acestei drepte vom schimba culorile tuturor domeniilor, iar de cealaltă parte vom lăsa toate

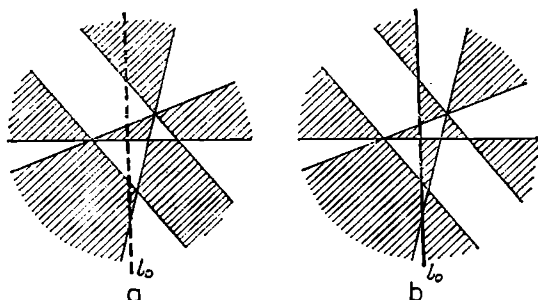
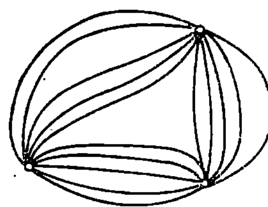


Fig. 112


Fig. 113

culorile neschimbate (fig. 112, *b*). Dacă două domenii în care este împărţit planul prin $n + 1$ drepte sînt separate printr-una din dreptele l_1, l_2, ..., l_n, atunci ele vor fi vopsite cu culori diferite (deoarece mai înainte ele au fost vopsite cu culori diferite iar după revopsire sau ambele culori au rămas neschimbate sau ambele au fost schimbate simultan). Dacă însă două domenii sînt separate de dreapta l_0, ele vor fi, de asemenea, vopsite cu culori diferite: pînă la introducerea dreptei l_0 aceste două domenii au fost un tot şi, deci, au avut aceeaşi culoare, iar după aceea am schimbat culoarea unuia dintre aceste domenii, lăsînd neschimbată culoarea celuilalt. Astfel, modul de vopsire obţinut verifică de asemenea condiţiile problemei, ceea ce trebuia demonstrat.

114. Nu este greu de văzut că, într-adevăr, pentru anumite reţele pot să nu fie suficiente 14 culori diferite; pentru aceasta, este suficient să considerăm o reţea cu trei noduri, care sînt unite două cîte două prin cinci linii (fig. 113). Două linii oarecare ale acestei reţele se întîlnesc într-un nod, de unde rezultă că numărul culorilor cu care poate fi vopsită această reţea în condiţiile problemei este egal cu numărul liniilor, adică cu 15.

Vom arăta acum că 15 culori diferite sînt totdeauna suficiente. Pentru demonstraţie vom folosi metoda inducţiei complete. Anume, ipoteza noastră este valabilă pentru o reţea cu numai două noduri diferite (în acest caz sînt suficiente numai 10 culori diferite). Nu este greu de văzut, de asemenea, că în cazul unei reţele cu numai trei noduri vor fi suficiente totdeauna, 15 culori diferite, adică exemplul de reţea considerat mai sus, cu trei noduri, este cel mai neconvenabil. Să presupunem demonstrat că pentru vopsirea oricărei reţele cu n noduri sînt suficiente 15 culori diferite; să arătăm că, în acest caz, şi pentru orice reţea cu $n + 1$ noduri vor fi suficiente tot 15 culori diferite.

Să presupunem că avem o reţea oarecare S cu $n + 1$ noduri A_0, A_1, ..., A_n. Toate liniile reţelei care nu trec prin nodul A_0 formează o nouă reţea

S', cu n noduri; conform ipotezei din inducţie, reţeaua S' poate fi vopsită utilizînd 15 culori diferite (se poate întîmpla ca nici să nu fie nevoie ca unele dintre aceste culori să fie efectiv folosite). Să arătăm acum că cu aceste 15 culori poate fi vopsită şi reţeaua S.

Vom presupune că nodul A_0 al reţelei S este unit de nodul A_1 prin p_1 linii, de nodul A_2 prin p_2 linii etc., de nodul A_n prin p_n linii (unele dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pot fi, bineînţeles, egale cu zero). Conform condiţiilor problemei, suma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ (numărul total de linii ale reţelei S care se întîlnesc în nodul A_0) nu este mai mare decît 10. În nodul A_1 al reţelei S' se întîlnesc, evident, nu mai mult de $10 - p_1$ linii, astfel că, după vopsirea reţelei S', vor mai rămîne cel puţin $15 - (10 - p_1) = 5 + p_1$ culori, care nu au fost folosite la vopsirea liniilor care se întîlnesc în punctul A_1; în mod analog, vor mai rămîne $5 + p_2$ (sau mai multe) culori care nu au fost folosite la vopsirea liniilor care se întîlnesc în nodul A_2; $5 + p_3$ culori care nu au fost folosite la vopsirea liniilor care se întîlnesc în A_3 etc.

Vom începe, acum, să vopsim pe rînd liniile reţelei S, care se întîlnesc în nodul A_0. Deoarece dispunem de $5 + p_1$ culori sau mai multe, nefolosite la vopsirea liniilor reţelei S', care se întîlnesc în A_1, putem vopsi cele p_1 linii care unesc A_0 cu A_1 cu p_1 dintre aceste culori. Trecînd mai departe la liniile care unesc A_0 cu A_2, trebuie să alegem numai acele culori care nu au fost încă folosite nici la vopsirea liniilor reţelei S' care trec prin A_2, nici la vopsirea liniilor reţelei S care unesc A_0 cu A_1. În mod analog, liniile care unesc A_0 cu A_3 pot fi vopsite numai cu culorile nefolosite la vopsirea liniilor care unesc A_0 cu A_1 şi cu A_2; liniile care unesc A_0 cu A_4 vor putea fi vopsite cu culorile nefolosite la vopsirea liniilor care unesc A_0 cu A_1, cu A_2 şi cu A_3 etc. Vom presupune acum că, îndeplinind aceste condiţii, am izbutit să vopsim toate liniile care unesc A_0 cu nodurile $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ şi poate chiar o parte din liniile care unesc A_0 cu A_i; mai departe, însă, vom constata că toate culorile încă nefolosite la vopsirea liniilor care trec prin nodul A_0 (vom nota mai jos aceste culori cu cifre romane I, II, III, ...) au fost utilizate la vopsirea unora dintre liniile care trec prin nodul A_i. În acest caz, evident, nu vom putea continua vopsirea liniilor care unesc A_0 cu A_i, fără să contrazicem condiţia pusă în problemă. Vom arăta însă că în acest caz este posibil să se continue vopsirea reţelei fără a contrazice această condiţie, înlocuind numai culoarea unora dintre liniile vopsite înainte.

Să considerăm o culoare 1 astfel ca printre liniile vopsite care trec prin nodul A_i (adică printre liniile reţelei S', care pornesc din nodul A_i, unele din ele putînd fi vopsite, şi care unesc A_0 cu A_i) nu se află linii de această culoare. Am presupus că toate culorile nefolosite la vopsirea liniilor care pleacă din A_i vopsesc unele linii care vin în A_0; deci, cu culoarea 1 este vopsită o linie care uneşte A_0 cu nodul A_j, $j < i$. Să cercetăm, mai departe, cîteva cazuri posibile.

A. *Printre liniile reţelei S', care se întîlnesc în nodul A_j, există o linie care nu are nici una din culorile I, II, III, ...* În acest caz, putem revopsi cu această culoare linia care uneşte A_0 cu A_j şi care a fost vopsită înainte cu culoarea 1, iar una din liniile încă nevopsite, care unesc A_0 cu A_i, poate fi vopsită cu culoarea 1.

B. Printre liniile, care se întîlnesc în nodul A_j, există linii de toate culorile I, II, III,... Aceasta înseamnă că nici una din cele $5 + p_j$ sau mai multe culori, care nu au fost folosite la vreuna din liniile rețelei S', care pleacă din A_j, nu face parte dintre culorile I, II, III, ..., adică toate aceste culori au fost folosite la vopsirea liniilor rețelei S, care se întîlnesc în A_0. Din aceste $5+p_j$ sau mai multe culori, sînt folosite tocmai p_j pentru vopsirea liniilor care unesc A_0 cu A_j și, deci, nu mai puțin de cinci culori au fost folosite la vopsirea liniilor, care unesc A_0 cu celelalte noduri $A_1, A_2, ..., A_{j-1}, A_{j+1}, ..., A_i$. Mai departe, conform presupunerii noastre, toate cele $5 + p_i$ sau mai multe culori, cu care nu au fost vopsite liniile rețelei S', care pleacă din A_i, au fost folosite la vopsirea liniilor rețelei S, care unesc A_0 cu vîrfurile $A_1, A_2, ..., A_i$; din aceste $5 + p_i$ sau mai multe culori, destinate vopsirii liniilor care unesc A_0 cu A_i, au fost folosite pînă acum mai puțin de p_i culori și, deci, nu mai puțin decît șase culori au fost folosite la vopsirea liniilor rețelei S, care unesc A_0 cu celelalte noduri $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$. Dar, conform condițiilor problemei, în nodul A_0 se întîlnesc nu mai mult decît 10 linii; dintre ele, au fost vopsite pînă acum nu mai mult decît nouă linii. De aici rezultă că printre cinci sau mai multe linii care unesc A_0 cu nodurile $A_1, A_2, ..., A_{j-1}, A_{j+1}, ..., A_i$ și care sînt vopsite cu culorile nefolosite la vopsirea liniilor rețelei S' care vin în A_j și printre șase sau mai multe linii care unesc A_0 cu $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$ și care sînt vopsite cu culorile nefolosite la vopsirea liniilor rețelei S' care vin în A_i, se află cel puțin o linie comună. Să presupunem că această linie comună este linia care unește A_0 cu nodul A_k ($k < i$, $k \neq i$, $k \neq j$) și care este vopsită cu o anumită culoare 2. Vom cerceta mai departe separat două posibilități.

1° Printre liniile, care trec prin nodul A_k, există o linie care nu are vreuna dintre culorile I, II, III,... În acest caz, putem revopsi în această culoare linia care unește A_0 cu A_k și care a fost vopsită mai înainte în culoarea 2, iar una dintre liniile încă nevopsite, care unesc A_0 cu A_i, să o vopsim cu culoarea 2.

2° Printre liniile, care vin în nodul A_k, există linii de toate culorile I, II, III, ... Să examinăm acum următoarea situație. Vom separa din rețeaua de linii vopsite în condițiile problemei un contur oarecare, de-a lungul căruia alternează linii de două culori oarecare A și B și vom prelungi acest contur în ambele sensuri atîta timp cît va fi posibil; în acest caz, evident, conturul poate fie să se închidă, fie să rămînă deschis de ambele părți, însă nu poate avea nicăieri ramificații (deoarece în fiecare vîrf al rețelei poate veni o singură linie de o culoare dată dinainte). Vom revopsi acum toate liniile acestui contur, înlocuind peste tot culoarea A prin culoarea B și invers; în acest caz noua vopsire, bineînțeles, va satisface, de asemenea, condițiile date. Acum vom considera un contur analog, cu originea în nodul A_i, de-a lungul căruia alternează culorile I și 2 (prin nodul A_i, conform presupunerii, trece o linie de culoare I și nu trece o linie de culoare 2). Deoarece în nodul A_0 vine o linie de culoare 2 (linia A_0A_k), însă nu vine o linie de culoare I, iar în nodul A_j, ca și în nodul A_i, vine o linie de culoare I, însă nu vine o linie de culoare 2, rezultă că conturul considerat sau va avea al doilea capăt în nodul A_0, însă nu va trece prin nodul A_j, sau va avea al doilea capăt în nodul A_j, însă nu va trece prin nodul A_0, sau, în sfîrșit,

nu va trece nici prin nodul A_0, nici prin A_j. Să cercetăm, acum, separat două posibilităţi dintre care cel puţin una neapărat are loc.

1) Să presupunem că conturul considerat nu trece prin nodul A_0. În acest caz, vom schimba alternarea culorilor liniilor acestui contur începînd cu cealaltă culoare; după aceasta, în nodul A_i nu vor mai veni linii de culoare I şi vom putea revopsi în această culoare una din liniile încă nevopsite care unesc A_0 cu A_i.

2) Să presupunem că conturul considerat nu trece prin nodul A_j. Să cercetăm acum conturul din liniile vopsite alternativ în aceleaşi două culori 1 şi 2, care pleacă din nodul A_j; acest contur nu va trece nici prin A_i nici prin A_0. Vom schimba alternarea culorilor liniilor acestui nou contur începînd cu cealaltă culoare. După aceasta, linia A_0A_j de culoare 1 va putea fi revopsită în culoarea I (deoarece în nodul A_j nu vor veni linii de culoare I) şi vom putea apoi să vopsim una din liniile nevopsite încă, care unesc A_0 cu A_i, cu culoarea 1 devenită liberă.

Astfel, în toate cazurile, putem continua vopsirea liniilor care se întîlnesc în nodul A_0, schimbînd doar, poate, culorile unora dintre liniile vopsite mai înainte. Continuînd acest procedeu, vom vopsi, în sfîrşit, toate liniile care vin în nodul A_0.

Deci, dacă reţeaua S', cu n noduri, poate fi vopsită cu 15 culori în condiţiile problemei, atunci şi reţeaua S, cu $n + 1$ noduri, poate fi vopsită cu acelaşi număr de culori. De aici, conform principiului inducţiei complete, rezultă că orice reţea poate fi vopsită cu 15 culori.

Observaţie. **La fel se demonstrează că, dacă în fiecare nod al reţelei vin nu mai mult de $m = 2k$ linii, toate liniile reţelei pot fi vopsite, în condiţiile problemei, cu $3k$ culori; dacă însă $m = 2k + 1$, cel mai mic număr de culori suficient pentru vopsirea oricărei reţele în ale cărei noduri vin nu mai mult de m linii este egal cu $3k + 1$.**

115. a) Vom demonstra chiar mai mult decît se cere în problemă, anume vom demonstra că numărul de triunghiuri ale descompunerii, numerotate cu cifrele 1, 2, 3, este impar (de aici, în particular, rezultă şi afirmaţia din problemă, deoarece zero este un număr par). În acest scop, vom stabili în două moduri numărul laturilor triunghiurilor din descompunere, numerotate cu cifrele 1, 2.

A. Fiecare triunghi al descompunerii, avînd vîrfurile numerotate cu cifrele 1, 2, 3 (vom nota cu X numărul acestor triunghiuri), are o singură latură, ale cărei extremităţi sînt numerotate cu cifrele 1, 2; fiecare triunghi, ale cărui vîrfuri sînt numerotate cu cifrele 1, 2, 2 sau cu cifrele 1, 1, 2 (numărul unor astfel de triunghiuri îl vom nota cu Y), are două laturi ale căror extremităţi au numerele 1 şi 2; fiecare dintre celelalte triunghiuri ale descompunerii (de exemplu, triunghiurile numerotate cu cifrele 1, 1, 1 sau 1, 3, 3) nu au laturi numerotate cu cifrele 1, 2.

De aici rezultă că numărul total de laturi ale triunghiurilor mici, numerotate cu cifrele 1, 2, este egal cu

$$X + 2Y.$$

B. Să observăm că în calculul făcut am numărat de două ori fiecare segment ale cărui extremităţi sînt numerotate cu cifrele 1, 2, situat în interiorul

triunghiului mare (de bază), deoarece fiecare astfel de segment intră ca latură în două triunghiuri, situate de o parte şi de alta a acestui segment. Fiecare dintre segmentele 1, 2 situate pe laturile triunghiului mare este latura numai a unui singur triunghi al descompunerii şi, deci, a fost considerat în suma $X + 2Y$ o singură dată. Astfel, dacă vom nota cu U numărul de segmente

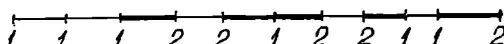


Fig. 114

12, situate în interiorul triunghiului mare şi prin V numărul unor astfel de segmente, situate pe laturile triunghiului mare, vom avea

$$X + 2Y = 2U + V.$$

De aici rezultă că numărul X este par sau impar în acelaşi timp cu numărul V şi este suficient să demonstrăm că V este totdeauna impar.

Conform enunţului problemei, pe latura 13 a triunghiului mare nu pot exista vîrfuri notate cu 2, iar pe latura 23 nu pot exista vîrfuri notate cu 1; deci, segmentele mărginite de punctele 1 şi 2 pot fi întîlnite numai pe latura 12 a triunghiului mare. Vom număra toate segmentele de acest gen în ordinea dispunerii lor pe latura 12, începînd cu extremitatea acestei laturi, numerotată cu 1 (fig. 114). Deplasîndu-ne pe latura 12 de la vîrful 1 către vîrful 2, vom întîlni mai întîi cîteva (unul sau mai multe) puncte numerotate cu 1. După aceasta, cînd vom parcurge prima oară un segment 12, vom ajunge într-un punct numerotat cu cifra 2. Mai departe, pot urma mai multe puncte 2 (adică mai multe segmente 22); numai apoi, după ce vom parcurge segmentul 21, vom ajunge din nou în punctul 1. Parcurgînd, mai departe, segmentul următor 12, vom ajunge din nou în punctul 2, parcurgînd segmentul următor 21 — în punctul 1 etc.

Astfel, după un număr impar de segmente 12 vor urma vîrfurile de descompunere numerotate cu 2, iar după un număr par de astfel de segmente vor urma vîrfurile numerotate cu 1. Însă, deoarece ultimul vîrf al descompunerii situat pe latura considerată este vîrful 2 al triunghiului mare, rezultă că numărul total de segmente 12 care se află pe latura 12 a triunghiului mare (egal cu numărul V) trebuie să fie impar. Cu aceasta teorema a fost demonstrată.

Observaţie. Rezultatul obţinut mai poate fi precizat. Anume vom face distincţie între triunghiurile descompunerii avînd vîrfurile numerotate cu cifrele 1, 2, 3 şi al căror sens de parcurgere a conturului (în sensul de la vîrful 1 către vîrful 2 şi apoi către vîrful 3) coincide cu sensul de parcurgere a conturului triunghiului mare (de asemenea, în sensul $1 \to 2 \to 3$) şi triunghiurile notate cu 1, 2, 3 şi cu sensul de parcurgere a conturului opus sensului de parcurgere a conturului triunghiului mare. Se poate demonstra că *numărul primelor triunghiuri va fi totdeauna cu o unitate mai mare decît numărul celorlalte triunghiuri*; de aici rezultă, în particular, că numărul total de triunghiuri numerotate cu 1, 2, 3 este impar. Demonstraţia acestei proprietăţi este asemănătoare cu soluţia problemei de faţă şi o propunem cititorului.

b) Demonstraţia teoremei formulată în indicaţiile la această problemă este asemănătoare cu demonstraţia teoremei a). Vom număra în două moduri

fețele tetraedrelor din descompunere, numerotate cu cifrele 1, 2, 3. Pe de o parte, fiecare tetraedru al descompunerii, avînd vîrfurile numerotate cu 1, 2, 3 și 4 (numărul unor astfel de tetraedre îl vom nota cu X), are o singură față 123; fiecare dintre tetraedrele cu vîrfurile 1, 1, 2, 3 sau 1, 2, 2, 3 sau 1, 2, 3, 3 (numărul total al unor astfel de tetraedre îl vom nota cu Y) are cîte două fețe 123, iar celelalte tetraedre ale descompunerii nu au astfel de fețe. Astfel, numărul căutat de fețe 123 este egal cu

$$X + 2Y.$$

Pe de altă parte, orice triunghi 123, situat în interiorul tetraedrului mare (numărul acestor triunghiuri îl vom nota cu U), este o față comună a două tetraedre ale descompunerii, iar fiecare triunghi 123, de pe fața 123 a tetraedrului mare (numărul acestor triunghiuri îl vom nota cu V), este fața unui singur tetraedru al descompunerii (să observăm că, potrivit condițiilor teoremei, pe celelalte trei fețe ale tetraedrului mare nu vor exista triunghiuri ale descompunerii, numerotate cu 1, 2, 3). Avem, deci,

$$X + 2Y = 2U + V.$$

Însă descompunerea feței 123 a tetraedrului mare în triunghiuri mai mici verifică toate condițiile problemei a) și din soluția acestei probleme rezultă că numărul V al triunghiurilor mici 1, 2, 3 pe această față va fi impar. De aici rezultă că și numărul X este impar și, deci, nu poate fi egal cu zero. Teorema este demonstrată.

Observație. Această teoremă poate fi, de asemenea, precizată, în mod analog ca teorema din problema a) (v. observația de la p. 275). Formularea și demonstrația acestui rezultat mai fin le propunem cititorului.

116. Vom demonstra chiar mai mult decît se cere în problemă. Anume, vom arăta că, dacă un poligon oarecare M este împărțit în triunghiuri în condițiile problemei (adică, astfel încît nici un grup de două triunghiuri nu se învecinează numai pe o porțiune din latura comună) și dacă în fiecare dintre vîrfurile descompunerii se întîlnesc un număr par de triunghiuri, atunci toate vîrfurile descompunerii pot fi numerotate cu trei cifre 1, 2 și 3 astfel încît toate vîrfurile care se află pe conturul poligonului M vor fi numerotate numai cu două cifre 1 și 2 și toate vîrfurile fiecărui triunghi al descompunerii vor fi numerotate cu trei cifre diferite.

Demonstrația o vom da prin metoda inducției complete, utilizînd numărul de vîrfuri ale descompunerii, situate în interiorul poligonului M. În primul rînd, dacă în interiorul lui M se află doar un singur vîrf P al descompunerii, proprietatea este evidentă: în vîrful P vin, așa cum s-a presupus, un număr par de triunghiuri; de aceea pe conturul lui M există un număr par de vîrfuri ale descompunerii și, numerotînd aceste vîrfuri alternativ cu 1 și 2, putem scrie în vîrful P cifra 3 (fig. 115, *a*) [1].

[1] Deoarece în fiecare vîrf al lui M se întîlnesc două sau mai multe triunghiuri ale descompunerii, în interiorul lui M se află cel puțin un vîrf al descompunerii.

Mai departe, vom presupune că în interiorul poligonului M se află n vîrfuri ale descompunerii şi că pentru orice descompunere a unui poligon oarecare, satisfăcînd condiţiile problemei şi astfel încît în interiorul poligonului să se afle m a i p u ţ i n de n vîrfuri ale descompunerii, teorema este demonstrată. Fie AB unul dintre segmentele în care vîrfurile descompunerii împart

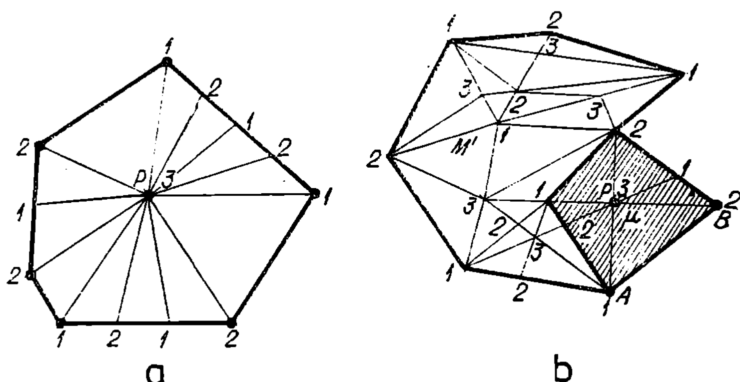


Fig. 115

frontiera lui M, ABP — un triunghi al descompunerii, care se alipeşte de AB. Vîrful P se află în interiorul lui M, deoarece, în caz contrar, în vîrfurile A şi B ale poligonului M, s-ar întîlni un număr impar de triunghiuri (cîte unul singur). În punctul P se întîlnesc, conform ipotezei, un număr par de triunghiuri ale descompunerii. Vom nota cu μ poligonul format din toate aceste triunghiuri (v. fig. 115, *b*, în care poligonul μ este haşurat).

Vom suprima acum din M poligonul μ; vom obţine un nou poligon mai mic M'. Poligonul M' este împărţit, de asemenea, în triunghiuri în condiţiile problemei; nu este greu de văzut că în fiecare vîrf al poligonului M' se întîlnesc, de asemenea, un număr par de triunghiuri ale descompunerii (în fiecare vîrf al lui M', care este în acelaşi timp un vîrf al lui μ, se întîlnesc cu cîte două triunghiuri mai puţin, decît se întîlneau mai înainte). Mai departe, în interiorul lui M', se află evident, mai puţine vîrfuri ale descompunerii, decît în interiorul lui M. Deci, conform ipotezei noastre, putem numerota toate vîrfurile de descompunere ale lui M' cu cifrele 1, 2 şi 3, astfel încît toate vîrfurile situate pe frontiera lui M' să fie numerotate cu 1 şi 2 şi vîrfurile fiecărui triunghi al descompunerii să fie numerotate cu trei cifre diferite [1].

Vom scrie alături de vîrful P cifra 3 şi apoi vom continua să numerotăm vîrfurile rămase fără numere, situate pe conturul lui μ, alternativ cu cifrele 1 şi 2; în acest caz, oricare două vîrfuri vecine vor căpăta numere diferite,

---

[1] Propunem cititorului să examineze cum se modifică raţionamentul în cazul în care M' este descompus în mai multe părţi.

întrucît pe conturul lui μ se află în total un număr par de vîrfuri ale descompunerii (deoarece în punctul P se întîlnesc un număr par de triunghiuri). După aceasta, toate vîrfurile poligonului M vor fi numerotate în condițiile date. Conform principiului inducției complete, rezultă de aici valabilitatea afirmației formulate la începutul soluției problemei.

117. Se poate întîmpla ca între două poligoane vecine M și M' ale descompunerii să existe goluri (acoperite, bineînțeles, de alte poligoane; v. fig. 116), cu alte cuvinte, ca porțiunea din frontiera lui M și M' comună ambelor poligoane să fie formată din mai multe bucăți. În acest caz vom adăuga la poligonul M toate golurile dintre acest poligon și vecinii săi; vom obține un poligon mai mare $\overline{M}$. După aceea, vom proceda la fel, în continuare, cu toți vecinii poligonului $\overline{M}$, apoi cu toți vecinii noului poligon format etc. În sfîrșit, vom ajunge la o nouă împărțire a pătratului în poligoane, iar acum între două poligoane ale noii descompuneri nu vor mai exista goluri (partea comună a frontierei dintre oricare două poligoane ale descompunerii va fi formată dintr-o singură bucată, adică va reprezenta sau un punct sau o linie frîntă). În acest caz, evident că, dacă un poligon oarecare al noii descompuneri are nu mai puțin de șase vecini, atunci un poligon al vechii descompuneri din care a fost obținut a avut, de asemenea, nu mai puțin de șase vecini (deoarece după modificarea descompunerii considerate numărul de vecini ai poligonului nu poate decît să se micșoreze). Să mai observăm că poligonul $\overline{M}$ se află în interiorul poligonului $\overline{\overline{M}}$, care a fost obținut adăugînd la poligonul M toți vecinii săi și toate golurile dintre M și vecinii săi. Deoarece, conform condițiilor problemei, atît poligonul M cît și fiecare dintre vecinii săi poate fi inclus într-un cerc de diametru $^1/_{30}$, atunci $\overline{\overline{M}}$ poate fi inclus într-un cerc de diametru $^3/_{30} = {}^1/_{10}$ (fig. 117) și, deci, cu atît mai mult $\overline{M}$ poate fi inclus într-un cerc de acest diametru.

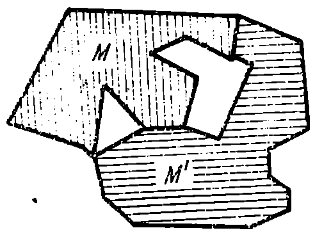


Fig. 116

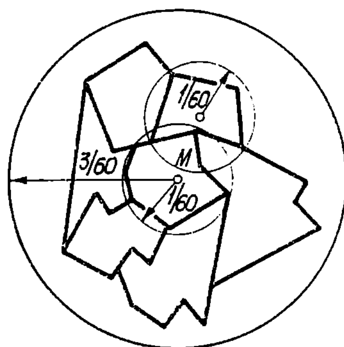


Fig. 117

Să considerăm poligonul $\overline{M}_0$ al noii descompuneri, care acoperă centrul O al pătratului (sau unul dintre aceste poligoane, dacă O este situat pe frontiera mai multor poligoane). Vom numi acest poligon, p o l i g o n u l e t a j u l u i 1. Toate poligoanele noii descompuneri vecine cu $\overline{M}_0$ le vom numi p o l i g o a n e l e e t a j u l u i a l 2-l e a; toate poligoanele vecine cu unul

oarecare dintre poligoanele etajului al 2-lea le vom numi p o l i g o a n e l e e t a j u l u i a l 3-l e a etc.

Evident că poligonul $\overline{M}_0$ este inclus în interiorul cercului de rază $^1/_{10}$ cu centrul în O, apoi $\overline{M}_0$ şi toate poligoanele etajului al 2-lea sînt incluse în interiorul unui cerc de rază $^2/_{10}$ cu centrul în O, apoi $\overline{M}_0$ şi toate poligoanele etajelor al 2-lea şi al 3-lea sînt incluse în interiorul unui cerc de rază $^3/_{10}$ cu centrul în O şi, în sfîrşit, $\overline{M}_0$ şi toate poligoanele etajelor al 2-lea, al 3-lea şi al 4-lea sînt incluse în interiorul unui cerc de rază $^4/_{10}$ cu centrul în O. De aici, rezultă, în particular, că nici unul dintre poligoanele primelor patru etaje nu poate să fie alipit de frontiera pătratului.

Să considerăm, acum, unele proprietăţi evidente ale descompunerii poligoanelor în etaje.

1° Fiecare dintre poligoanele etajului al n-lea ($n > 1$) are vecini în etajul al (n — 1)-lea.

2° Nici unul dintre poligoanele etajului al n-lea ($n > 2$) nu are vecini în etajul al (n — 2)-lea (în caz contrar, acest poligon trebuia să facă parte din etajul al (n — 1)-lea).

3° Dacă poligonul $\overline{M}$ al etajului al n-lea ($n > 1$) are mai puţin de doi vecini, aparţinînd aceluiaşi etaj, atunci $\overline{M}$ nu are vecini în etajul al (n + 1)-lea. Într-adevăr, dacă $\overline{M}$ ar avea vecini, aparţinînd etajului al (n + 1)-lea, o parte din frontiera lui $\overline{M}$ ar veni în contact cu poligonul etajului al (n+1)-lea, iar o altă parte a frontierei ar veni în contact cu poligonul etajului al (n — 1)-lea (v. 1°). Deoarece nici un poligon al etajului al (n + 1)-lea nu este în contact cu poligoanele etajului al (n — 1)-lea (v. 2°), între aceste porţiuni ale frontierei lui $\overline{M}$ trebuie să existe cel puţin două segmente pe care $\overline{M}$ vine în contact cu poligoanele aceluiaşi etaj, al n-lea. Iar, deoarece oricare două poligoane vecine ale noii noastre descompuneri sînt în contact cu o porţiune din frontieră, rezultă de aici că $\overline{M}$ are nu mai puţin de doi vecini în acelaşi etaj al n-lea.

Vom presupune acum că n i c i u n u l d i n t r e p o l i g o a n e l e n o i i d e s c o m p u n e r i n u a r e m a i m u l t d e c i n c i v e c i n i şi vom arăta că, în acest caz, nici unul dintre poligoanele etajului al 4-lea nu poate avea vecini printre poligoanele etajului al 5-lea.

Vom cerceta separat două cazuri.

A. Dacă poligonul $\overline{M}$ al etajului al 4-lea are nu mai mult de un vecin printre poligoanele aceluiaşi etaj, atunci, conform lui 3°, el nu are vecini printre poligoanele etajului al 5-lea.

B. Să presupunem acum că poligonul $\overline{M}$ al etajului al 4-lea are nu mai puţin de doi vecini printre poligoanele aceluiaşi etaj al 4-lea. Vom arăta, în primul rînd, că $\overline{M}$ are nu mai puţin de doi vecini printre poligoanele etajului al 3-lea. Într-adevăr, să presupunem că nu este aşa şi că $\overline{M}'$ este singurul poligon al etajului al 3-lea, vecin cu $\overline{M}$. În acest caz, M' are în etajul al 4-lea cel puţin încă doi vecini, în afară de $\overline{M}$: aceştia vor fi poligoanele $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$ cu care $\overline{M}$ se află în contact la capetele frontierei comune dintre $\overline{M}$ şi $\overline{M}'$

(fig. 118). $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$ nu pot aparţine etajului al 3-lea, deoarece, conform ipotezei, $\overline{M}$ nu are vecini în etajul al 3-lea în afară de $\overline{M}'$, şi, conform lui 2°, nu pot aparţine etajului al 5-lea. În afară de aceasta, $\overline{M}'$ are nu mai puţin de doi vecini în etajul al 3-lea (v. 3°) şi cel puţin un vecin în etajul al 2-lea (v. 1°), astfel că în total $\overline{M}'$ are nu mai puţin de şase vecini, ceea ce contrazice ipoteza noastră.

Se poate demonstra că M are n u m a i p u ţ i n d e t r e i vecini printre poligoanele etajului al 3-lea. Într-adevăr, fie $\overline{M}'$ unul dintre vecinii poligonului $\overline{M}$, care aparţine etajului a 3-lea (numărul unor astfel de vecini, cum am văzut, nu este mai mic decît doi). Vom arăta că $\overline{M}'$ nu are în afară de $\overline{M}$ alţi vecini care aparţin etajului al 4-lea. Într-adevăr, $\overline{M}'$ are nu mai puţin decît doi vecini care fac parte din etajul al 3-lea (v. 3°). În afară de aceasta, se poate arăta că $\overline{M}'$ are nu mai puţin decît doi vecini, care fac parte din etajul al 2-lea (demonstraţia acestei afirmaţii nu diferă de demonstraţia faptului că $\overline{M}$ are nu mai puţin decît doi vecini care fac parte din etajul al 3-lea). Deoarece, conform ipotezei, numărul total de vecini ai lui $\overline{M}'$ nu este mai mare decît cinci, $\overline{M}'$ nu poate avea în afară de $\overline{M}$ alţi vecini în etajul al 4-lea. Acum, printr-un raţionament în totul analog celui de mai sus, se poate arăta că $\overline{M}$ are în afară de $\overline{M}'$ încă cel puţin doi vecini $\overline{M}_1'$ şi $\overline{M}_2'$ în etajul al 3-lea: $\overline{M}_1'$ şi $\overline{M}_2'$ sînt poligoanele cu care $\overline{M}'$ vine în contact la capetele frontierei comune la $\overline{M}'$ şi $\overline{M}$.

Acum este clar că $\overline{M}$ nu poate avea vecini printre poligoanele etajului al 5-lea. Într-adevăr, dacă $\overline{M}$ ar avea vecini printre poligoanele etajului al 5-lea, atunci $\overline{M}$ ar avea încă nu mai puţin de doi vecini printre poligoanele aceluiaşi etaj al 4-lea (v. 3°). Deoarece, conform celor demonstrate, $\overline{M}$ are nu mai puţin de trei vecini printre poligoanele etajului al 3-lea, numărul total al vecinilor lui $\overline{M}$ nu ar fi mai mic decît şase.

Vedem deci că poligoanele etajului al 4-lea nu sînt în contact cu poligoanele etajului al 5-lea, adică toate poligoanele descompunerii se află în primele patru etaje. Însă aceasta nu este posibil, deoarece am arătat mai înainte că nici unul dintre poligoanele etajului al 4-lea nu este în contact cu frontiera

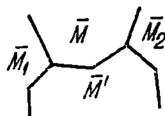
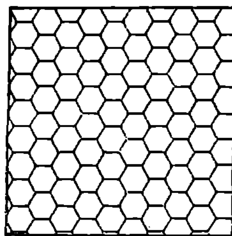


Fig. 118


Fig. 119

pătratului. Contrazicerea obţinută arată că ipoteza noastră iniţială, că nici unul dintre poligoanele descompunerii nu are mai mult decît cinci vecini, a fost falsă.

O b s e r v a ţ i e. Nu este greu de văzut că pătratul poate fi împărţit în poligoane oricît de mici, astfel încît nici unul dintre poligoanele descompunerii să nu aibă m a i m u l t decît şase vecini (fig. 119).

118. Fie K o curbă continuă care unește punctele A și B. Vom demonstra că, *dacă curba K nu are nici o coardă de lungime a paralelă cu AB și nu are nici o coardă de lungime b paralelă cu AB, atunci această curbă nu poate avea nici o coardă de lungime $a + b$ paralelă cu AB.* De aici va rezulta că curba K are neapărat o coardă de lungime $1/n$ paralelă cu AB. Într-adevăr, în caz contrar, curba K nu ar putea avea nici coarde de lungime

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}, \quad \frac{1}{n}+\frac{2}{n}=\frac{3}{n}, \quad \frac{1}{n}+\frac{3}{n}=\frac{4}{n} \text{ etc.}$$

paralele cu AB și, în sfîrșit, nu ar putea avea o coardă de lungime

$$\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1$$

paralelă cu AB, în timp ce noi știm că K are o coardă de lungime 1 (anume însăși coarda AB) paralelă cu AB.

Vom trece, acum, la demonstrația proprietății formulate. Faptul că curba K nu are o coardă de lungime a paralelă cu AB înseamnă că curba K', obținută din K printr-o translație în direcția AB cu distanța a, nu are puncte comune cu K (fig. 120). Mai departe, curba K', egală cu K, conform ipotezei, nu are nici o coardă de lungime b paralelă cu AB; aceasta înseamnă că curba K'', obținută din K' printr-o translație în direcția AB cu distanța b, nu are puncte comune cu K'. Vom arăta că nici curbele K și K'' nu se intersectează; aceasta va însemna că curba K nu are nici o coardă de lungime $a + b$ paralelă cu AB (deoarece curba K'' se obține din curba K printr-o translație în direcția AB cu distanța $a + b$).

Fie M' și N' două puncte ale curbei K', situate de ambele părți ale lui $A'B'$ la cea mai mare distanță de $A'B'$ (sau unele dintre aceste puncte, dacă curba K' are de aceeași parte a dreptei AB mai multe puncte, a căror distanță la $A'B'$ este mai mare decît a celorlalte puncte situate de aceeași parte a lui $A'B'$). Vom duce prin punctele M' și N' dreptele l_1 și l_2 paralele cu AB (una

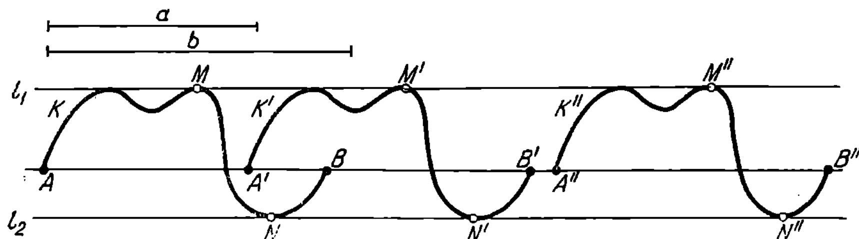


Fig. 120

dintre aceste drepte poate coincide cu AB). Evident că toate cele trei curbe K, K' și K'' se află în interiorul benzii formate de dreptele l_1 și l_2. Arcul $M'N'$ al curbei K' împarte această bandă în două părți; în acest caz, deoarece curbele K și K'' nu se intersectează cu K', fiecare dintre ele se află într-una din aceste două părți ale benzii. Nu este greu de văzut, de asemenea, că curbele K și K'' se află în părți d i f e r i t e ale benzii.

Într-adevăr, dacă M, respectiv M'', sînt puncte ale curbelor K şi K'' care corespund punctului M' de pe curba K', punctele M şi M'' se află de părţi diferite ale punctului M', deci şi curbele K şi K'' se află de părţi diferite ale arcului $M'N'$, deci nu se pot intersecta. Cu aceasta se încheie demonstraţia primei părţi a teoremei.

A mai rămas de demonstrat că pentru o r i c e număr a, care nu este de forma $1/n$, poate fi construită o curbă continuă care să unească punctele A şi B şi care să nu aibă coarde de lungime a. Dacă $a > 1$, această afirmaţie este cu totul evidentă: în acest caz, este suficient să impunem curbei K să nu iasă din limitele benzii formate de perpendicularele pe dreapta AB în punctele A şi B (v., de exemplu, fig. 121, a). Dacă $a > 1/2$, vom duce prin punctele A şi B drepte paralele şi prin mijlocul C al segmentului AB o dreaptă oarecare, care nu este paralelă cu primele două. Este uşor de văzut că linia frîntă obţinută AP_1CQ_1B (fig. 121, b) nu are coarde paralele cu AB de lungimi mai mari decît $1/2$.

Fie acum $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$. Vom împărţi segmentul AB în trei părţi egale: $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$ şi, independent de aceasta, în două părţi egale: $AD = DB$. Prin punctele A, D şi B vom duce drepte paralele arbitrare şi prin punctele C_1 şi C_2 alte două drepte paralele, care nu sînt paralele cu primele trei. Nu este greu de văzut că linia frîntă obţinută $AP_1C_1Q_1DP_2C_2Q_2B$ (fig. 121, c) nu are coarde paralele cu AB, a căror lungime să fie cuprinsă între $1/2$ şi $1/3$.

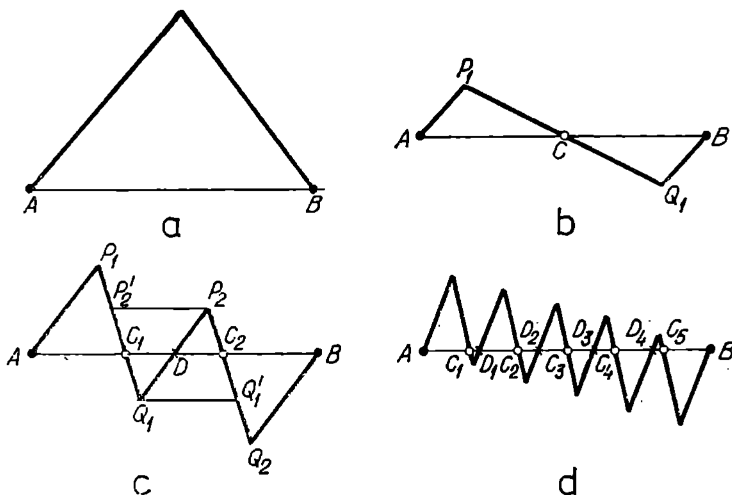


Fig. 121

Într-adevăr, dacă extremităţile coardei se află pe segmentele AP_1 şi P_1Q_1 sau P_1Q_1 şi Q_1P_2 sau Q_1P_2 şi P_2Q_2 sau P_2Q_2 şi Q_2B, lungimea coardei nu este mai mare decît $1/3$ (deoarece, cu notaţiile din fig. 121, c, $AC_1 = P_2'P_2 = Q_1Q_1' = C_2B = 1/3$). Dacă extremităţile coardei se află pe segmentele P_1Q_1 şi P_2Q_2, lungimea coardei este egală cu $1/3$. Dacă extremităţile coardei

se află pe segmentele AP_1 și Q_1P_2 sau Q_1P_2 și Q_2B, lungimea coardei este egală cu 1/2. În sfîrșit, în toate celelalte cazuri lungimea coardei va fi mai mare decît 1/2.

În mod analog se construiește un exemplu de curbă, care nu conține nici o coardă paralelă cu AB și a cărei lungime este cuprinsă între $1/(n+1)$ și $1/n$. Vom împărți segmentul AB în $n+1$ părți egale: $AC_1 = C_1C_2 = \dots$ $\dots = C_nB$ și, independent de aceasta, în n părți egale: $AD_1 = D_1D_2 = \dots$ $\dots = D_{n-1}B$. Prin punctele $A, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, B$ vom duce acum drepte paralele și prin punctele $C_1, C_2, \dots, C_n$ alte drepte paralele, care nu sînt paralele cu primele. Este ușor de văzut că linia frîntă obținută (v. fig. 121, *d*, unde este reprezentat cazul $n = 5$) verifică condiția impusă; demonstrația este în totul analoagă cu cea dată mai sus pentru cazul $n = 3$.

119. a) Fie AB o latură a unui poligon convex M de arie 1, C cel mai depărtat de AB punct al poligonului M (sau unul dintre aceste puncte, dacă M are o latură paralelă cu AB). Vom duce dreapta AC (fig. 122); această dreaptă împarte poligonul M în două părți M_1 și M_2 (în cazuri particulare se poate ca una dintre aceste părți să nu existe). Fie, mai departe, D_1 și D_2 două puncte ale poligonului M_1, respectiv M_2, cele mai depărtate de dreapta AC (sau unele dintre aceste puncte). Vom duce prin punctul C dreapta l paralelă cu AB și prin punctele D_1 și D_2 dreptele l_1 și l_2 paralele cu AC. Dreptele AB, l, l_1 și l_2 formează un paralelogram Π, care conține pe M în interiorul său.

Deoarece poligoanele M_1 și M_2 sînt convexe, M_1 conține triunghiul AD_1C, iar M_2 conține triunghiul AD_2C. Dreapta AC împarte paralelogramul Π în două paralelograme, pe care le vom nota respectiv cu Π_1 și Π_2. Este evident că

$$S_{AD_1C} = \frac{1}{2} S_{\Pi_1} \quad \text{și} \quad S_{AD_2C} = \frac{1}{2} S_{\Pi_2}.$$

De aici rezultă că

$$S_\Pi = S_{\Pi_1} + S_{\Pi_2} = 2S_{AD_1C} + 2S_{AD_2C} \leqslant 2S_{M_1} + 2S_{M_2} = 2S_M = 2,$$

ceea ce trebuia demonstrat (dacă $S_\Pi < 2$, putem mări acest paralelogram, astfel încît el să cuprindă și mai departe poligonul M în interiorul său).

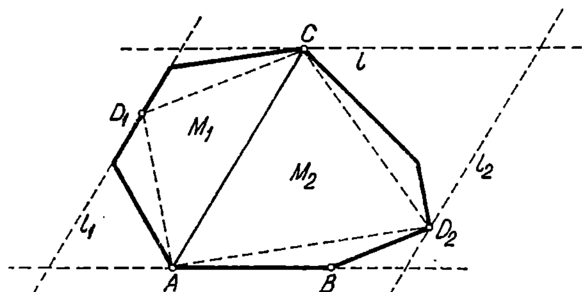


Fig. 122

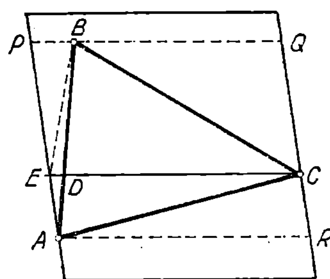


Fig. 123

b) Fie Π un paralelogram care conține în interiorul său triunghiul ABC de arie 1 (fig. 123). Vom micșora acest paralelogram, deplasîndu-i paralel laturile pînă ce ele vor trece prin vîrfurile triunghiului; fie A vîrful prin care

trec două laturi ale paralelogramului $APQR$ astfel obţinut; presupunem că vîrful B se află pe latura PQ şi vîrful C pe latura QR. Vom duce prin punctul C o dreaptă paralelă cu laturile PQ şi AR ale paralelogramului; punctele ei de intersecţie cu AB şi AP le vom nota cu D şi E. Atunci, avem, evident,

$$S_{\triangle CBD} \leqslant S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} S_{CQPE}$$

şi

$$S_{\triangle CAD} \leqslant S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} S_{CRAE},$$

de unde şi rezultă că

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle CAD} \leqslant \frac{1}{2} S_{CQRE} + \frac{1}{2} S_{CRAE} = \frac{1}{2} S_{APQR};$$

$$S_{APQR} \geqslant 2S_{\triangle ABC} = 2$$

(dacă C este un punct interior al laturii QR, atunci $S_{APQR} = 2$ numai în cazul în care B coincide cu P).

120. a) Vom înscrie în poligonul dat U triunghiul $A_1A_2A_3$ de cea mai mare arie posibilă (fig. 124, *a*) [1]. Vom presupune mai întîi că aria acestui triunghi nu este mai mare decît 1/2. Prin vîrfurile triunghiului A_1, A_2, A_3 vom duce drepte paralele cu laturile opuse. Se va forma un triunghi T, a cărui arie este de patru ori mai mare decît aria triunghiului $A_1A_2A_3$, adică nu este mai mare decît 2.

Vom arăta, mai departe, că poligonul U este situat în întregime în interiorul lui T. Într-adevăr, vom admite contrariul, adică vom presupune că un punct oarecare M, care aparţine lui U, se află în exteriorul lui T. În acest caz, punctul M se află la o distanţă mai mare de cel puţin una din laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ (de exemplu, de A_1A_2), decît vîrful triunghiului opus acestei laturi. Atunci triunghiul MA_1A_2, înscris în poligonul U, are aria mai mare decît triunghiul $A_1A_2A_3$ (v. fig. 124, *a*), ceea ce contrazice faptul că, conform ipotezei, triunghiul $A_1A_2A_3$ are cea mai mare arie dintre toate triunghiurile înscrise în U. Deci, în acest caz, poligonul U este inclus în interiorul triunghiului T de arie nu mai mare decît 2, ceea ce trebuia demonstrat (deoarece este clar că, în acest caz, U poate fi inclus în interiorul unui triunghi, de arie egală cu 2).

Ceva mai complicat este cazul în care aria triunghiului $A_1A_2A_3$ este mai mare decît 1/2 (fig. 124, *b*). În fiecare dintre părţile decupate din poligonul U prin laturile triunghiului $A_1A_2A_3$ vom înscrie triunghiul cu aria cea mai mare, a cărui bază coincide cu latura corespunzătoare a triunghiului $A_1A_2A_3$. Prin vîrfurile libere B_1, B_2, B_3 ale acestor triunghiuri vom duce drepte paralele cu bazele lor. Vom obţine un triunghi $C_1C_2C_3$. În mod analog cu cele precedente, se demonstrează că poligonul U se află în întregime în interiorul acestui triunghi.

---

[1] Se poate arăta că astfel este cel mai mare dintre toate triunghiurile, ale căror vîrfuri sînt trei vîrfuri oarecare ale poligonului U (v., de exemplu, cartea [56], problema 23.

Vom demonstra că $S_{\triangle C_1C_2C_3} \leqslant 2S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}$. Deoarece ultima arie nu este mai mare decît 1 (adică aria lui U), rezultă inegalitatea cerută. Vom examina separat exagonul $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ şi triunghiul $C_1C_2C_3$ circumscris acestuia. Vom pune

$$\frac{S_{A_1A_2B_3}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_3; \quad \frac{S_{A_1A_3B_2}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_2; \quad \frac{S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}} = \lambda_1;$$

atunci

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{S_{A_1A_2B_3} + S_{A_1A_3B_2} + S_{A_2A_3B_1}}{S_{A_1A_2A_3}} < 1,$$

deoarece, conform ipotezei, $S_{A_1A_2A_3} > 1/2$, iar aria întregului polgon U este egală cu 1.

Vom prelungi laturile triunghiului $A_1A_2A_3$, cum se arată în fig. 124, *b*. Să observăm că raportul dintre înălţimile triunghiurilor $B_3A_1A_2$ şi $A_3A_1A_2$, coborîte pe latura comună A_1A_2, este egal cu raportul dintre ariile acestor două triunghiuri, adică cu λ_3. La fel, raportul dintre înălţimile triunghiurilor $B_2A_1A_3$ şi $A_2A_1A_3$, coborîte pe latura comună A_1A_3, este egală cu λ_2, iar raportul dintre înălţimile triunghiurilor $B_1A_2A_3$ şi $A_1A_2A_3$, coborîte pe latura comună A_2A_3, este egal cu λ_1. De aici, obţinem

$$\frac{ED}{A_1A_2} = 1 + \lambda_3, \quad \frac{C_2E}{A_1A_2} = \frac{GA_2}{A_1A_2} = \frac{BH}{A_1H} = \lambda_1, \quad \frac{C_1D}{A_1A_2} = \frac{FA_1}{A_1A_2} = \lambda_2.$$

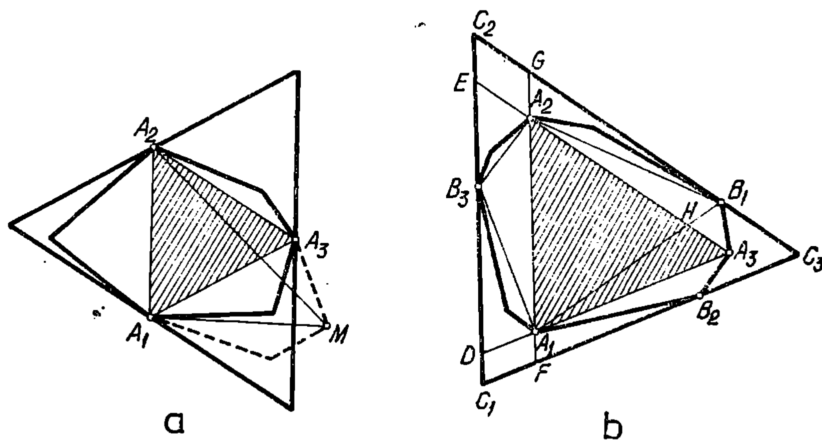


Fig. 124

Rezultă deci că coeficientul de asemănare al triunghiurilor $C_1C_2C_3$ şi $A_1A_2A_3$ este egal cu

$$\frac{C_1C_2}{A_1A_2} = \frac{C_1D + DE + EC_2}{A_1A_2} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Astfel, tragem concluzia că

$$\frac{S_{\Delta C_1C_2C_3}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2$$

şi, deoarece, în afară de aceasta, avem evident

$$\frac{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = \frac{S_{\Delta A_1A_2A_3} + S_{\Delta B_1A_2A_3} + S_{\Delta B_2A_1A_3} + S_{\Delta B_3A_1A_2}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

ajungem, în definitiv, la egalitatea

$$\frac{S_{\Delta C_1C_2C_3}}{S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2}} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Din această egalitate rezultă că $S_{\Delta C_1C_2C_3} \leqslant 2$, deoarece

$$S_{A_1B_3A_2B_1A_3B_2} \leqslant S_{Pol.\ U} = 1, \quad \text{iar} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 1.$$

Cu aceasta demonstraţia s-a terminat.

b) Vom arăta, în primul rînd, că pătratul cu laturile egale cu 1 nu poate fi inclus în nici un triunghi de arie mai mică decît 2. Fie $C_1C_2C_3$ triunghiul circumscris pătratului $A_1A_2A_3A_4$; vîrfurile A_1, A_2 şi A_4 ale pătratului se află respectiv pe laturile C_1C_2, C_1C_3 şi C_2C_3 ale triunghiului (fig. 125, *a*). Vom prelungi laturile A_2A_3 şi A_4A_3 ale pătratului pînă la intersecţia cu laturile C_3C_2, C_1C_2, respectiv cu C_3C_1, C_2C_1 ale triunghiului, în punctele D, E şi F, G. Deoarece unghiurile A_2A_3F şi A_4A_3D sînt drepte, unghiurile A_2DC_3 şi A_3FC_3 sînt obtuze. Mai departe,

$$\sphericalangle A_2EA_1 + \sphericalangle A_4GA_1 = 180° - \sphericalangle EA_3G = 90°; \quad \sphericalangle A_2A_1E + \sphericalangle A_4A_1G = 90°;$$

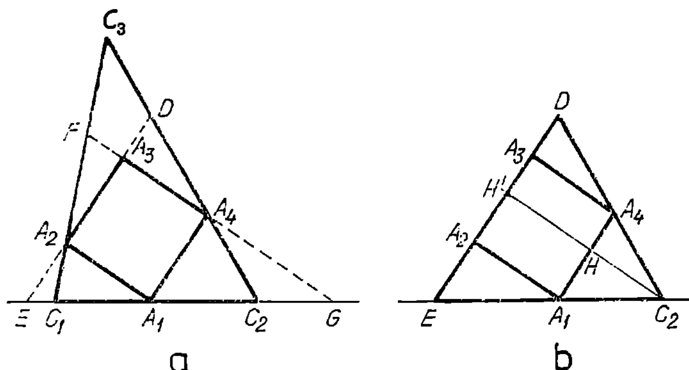


Fig. 125

rezultă deci că sau $\sphericalangle A_2A_1E \leqslant \sphericalangle A_2EA_1$, sau $\sphericalangle A_4A_1G \leqslant \sphericalangle A_4GA_1$; vom presupune, pentru precizare, că are loc prima din aceste inegalităţi. În acest caz, vom avea

$$A_2E \leqslant A_2A_1 = A_2A_3 < A_2D$$

și din fig. 125, *a* rezultă evident că

$$S_{\triangle A_4DC_2} > S_{\triangle A_4EC_1}; \quad S_{\triangle EDC_2} < S_{\triangle C_1C_2C_3}.$$

Am obținut astfel un triunghi EDC_2, circumscris pătratului, de arie mai mică decît aria triunghiului inițial $C_1C_3C_2$ și avînd o latură pe care sînt situate d o u ă vîrfuri ale pătratului (dacă triunghiul inițial are o latură pe care sînt situate două vîrfuri ale pătratului, întreg raționamentul poate fi suprimat).

Vom nota înălțimea triunghiului $A_1A_4C_2$ coborîtă pe latura A_1A_4 cu h; fie H și H' punctele de intersecție a acestei înălțimi cu laturile A_1A_4 și A_2A_3 ale pătratului (fig. 125, *b*), $HH' = 1$ (egală cu latura pătratului). În acest caz,

$$\frac{S_{\triangle C_2HA_4}}{S_{HA_4A_3H'}} = \frac{h}{2}; \quad \frac{S_{\triangle C_2HA_4}}{S_{\triangle A_4A_3D}} = h^2$$

și deci,

$$\frac{S_{\triangle A_4A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}} = \frac{1}{2h}, \quad \frac{S_{\triangle C_2H'D}}{S_{HA_4A_3H'}} = \frac{S_{\triangle C_2HA_4} + S_{HA_4A_3H'} + S_{\triangle A_4A_3D}}{S_{HA_4A_3H'}} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{1}{2h}.$$

La fel se demonstrează că

$$\frac{S_{\triangle C_2H'E}}{S_{HA_1A_2H'}} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{1}{2h}.$$

De aici, rezultă că

$$\frac{S_{\triangle C_2ED}}{S_{A_1A_2A_3A_4}} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{1}{2h} = 2 + \left(\frac{h}{2} - 1 + \frac{1}{2h}\right) = 2 + \left(\sqrt{\frac{h}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2h}}\right)^2 \geqslant 2,$$

adică $S_{\triangle C_2ED} \geqslant 2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Însă, dacă pătratului de arie 1 nu i se poate circumscrie un triunghi de arie mai mică decît 2, atunci n i c i u n u i d r e p t u n g h i o a r e c a r e $A_1A_2A_3A_4$ de arie 1 nu i se poate circumscrie un triunghi $C_1C_2C_3$ de arie mai mică decît 2. Într-adevăr, vom presupune că nu este așa. Ne vom imagina pătratul $A_1A_2A_3'A_4'$, a cărui latură A_1A_2 coincide cu latura mare A_1A_2 a dreptunghiului, iar celelalte laturi sînt situate în spațiu astfel că dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$ este proiecția ortogonală a pătratului pe planul dreptunghiului $\left(\text{pentru aceasta, trebuie ca } \frac{A_2A_3}{A_2A_3'} = \cos\alpha\text{, unde } \alpha \text{ este unghiul dintre pla-}\right.$ nele în care se află pătratul și dreptunghiul; v. fig. 126, *a*). Vom nota mai departe cu $C_1'C_2'C_3'$ triunghiul circumscris pătratului $A_1A_2A_3'A_4'$ și care se proiectează în triunghiul $C_1C_2C_3$ (în fig. 126, *a*, C_1' și C_2' coincid respectiv cu C_1 și C_2, însă aceasta nu este obligatoriu). Deoarece în proiecția ortogonală fiecare figură trece în altă figură de arie egală cu produsul dintre aria primei figuri și cos α, raportul dintre ariile figurilor în timpul proiecției nu se modifică. Deci, dacă $S_{C_1C_2C_3} < 2S_{A_1A_2A_3A_4}$, trebuie ca și $S_{C_1'C_2'C_3'} < 2S_{A_1A_2A_3'A_4'}$ însă, după cum am văzut mai sus, ultima inegalitate este imposibilă.

Mai departe, dacă unui dreptunghi de arie egală cu 1 nu i se poate circumscrie un triunghi de arie mai mică decît 2, atunci n i c i u n u i p a r a l e l o g r a m o a r e c a r e $A_1A_2A_3A_4$ nu i se poate circumscrie un triunghi $C_1C_2C_3$

de arie mai mică decît 2. Într-adevăr, vom presupune că nu este așa (fig. 126, *b*). Vom construi o sferă al cărei diametru este diagonala mare A_1A_3 a paralelogramului și fie A_2' și A_4' punctele de intersecție a sferei cu perpendicularele pe planul paralelogramului, în vîrfurile A_2 și A_4. În acest caz, evident că dreptunghiul $A_1A_2'A_3A_4'$ are ca proiecție paralelogramul $A_1A_2A_3A_4$. Notînd cu $C_1'C_2'C_3'$ triunghiul circumscris dreptunghiului $A_1A_2'A_3A_4'$ și care se proiectează după

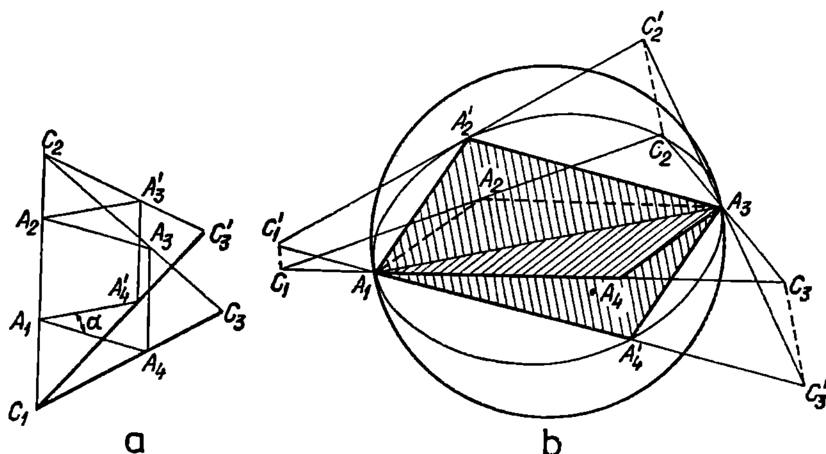


Fig. 126

triunghiul $C_1C_2C_3$ (v. fig. 126, *b*), trebuie, ca și mai sus, să tragem concluzia că aria triunghiului $C_1'C_2'C_3'$ este mai mică decît aria dublă a dreptunghiului $A_1A_2'A_3A_4'$, ceea ce, după cum am mai văzut, nu este posibil.

121. a) Vom duce două drepte paralele cu l și situate de ambele părți ale poligonului convex M, apoi le vom deplasa astfel încît ele să treacă prin vîrfurile A și B ale poligonului; în acest caz, poligonul M va fi cuprins în interiorul benzii formate de două drepte l_1 și l_2 paralele cu l și care trec respectiv prin A și B; în acest caz este posibil ca una dintre dreptele l_1 și l_2, sau chiar amîndouă, să conțină în întregime o latură a poligonului M (fig. 127). Vom nota cu d distanța dintre l_1 și l_2. Vom duce, apoi, încă trei drepte l_0, l_1' și l_2' paralele cu l, astfel ca l_0 să fie la egală distanță de l_1 și l_2; l_1' și l_2' să fie la egală distanță de l_1 și l_0, respectiv de l_2 și l_0. Să presupunem că l_1' intersectează conturul poligonului în punctele P și Q iar l_2' în punctele R și S. Să presupunem, mai departe, că p este latura poligonului care trece prin punctul P (poate fi una din două astfel de laturi); la fel, q, r și s sînt laturile poligonului care trec respectiv prin Q, R și S. Aria trapezului T_1 mărgini de dreptele l_0, l_1, p și q este egală, evident, cu $PQ \cdot \frac{d}{2}$; la fel, aria trapezului T_2 mărginit

de dreptele l_0, l_2, r şi s este egală cu $RS \cdot \frac{d}{2}$. Deoarece reuniunea trapezelor T_1 şi T_2 conţine poligonul M în interiorul său (în caz extrem coincide cu poligonul M), avem

$$S_M \leqslant S_{T_1} + S_{T_2} = PQ \cdot \frac{d}{2} + RS \cdot \frac{d}{2} = (PQ + RS) \cdot \frac{d}{2}.$$

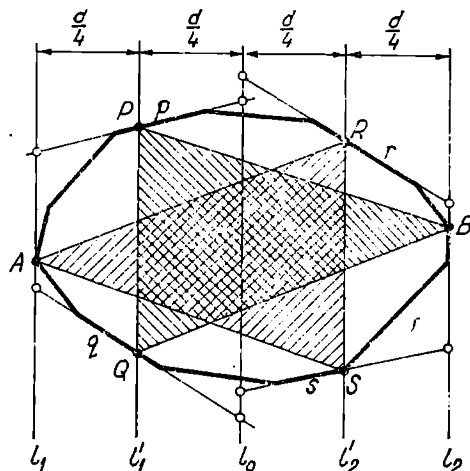


Fig. 127

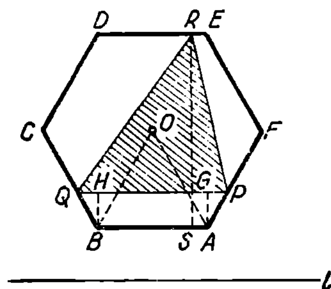


Fig. 128

Vom considera, acum, două triunghiuri ARS şi BPQ, înscrise în poligonul M. Evident, $S_{ARS} = \frac{1}{2} RS \cdot \frac{3}{4} d$; $S_{BPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot \frac{3}{4} d$; deci,

$$S_{ARS} + S_{BPQ} = (RS + PQ) \cdot \frac{3}{8} d = \frac{3}{4} (PQ + RS) \frac{d}{2} \geqslant \frac{3}{4} S_M.$$

De aici, rezultă că sau $S_{ARS} \geqslant \frac{3}{8} S_M$, sau $S_{BPQ} \geqslant \frac{3}{8} S_M$, ceea ce demonstrează afirmaţia din problemă.

b) Fie M un exagon regulat $ABCDEF$, iar l o paralelă la latura AB a hexagonului (fig. 128). Mai departe, fie PQR triunghiul înscris în M de cea mai mare arie posibilă şi avînd o latură PQ paralelă cu AB. Dacă P şi Q se află respectiv pe laturile AF şi BC ale hexagonului, atunci, evident, vîrful R trebuie să se afle pe latura DE. Vom lua latura hexagonului egală cu 1 şi vom nota distanţa $AP = BQ$ cu a. În acest caz, cum este uşor de calculat, avem

$$PQ = AB + PG + QH = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 1 + a,$$

$$h_{PQ} = RS - AG = \sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{2} = (2 - a)\frac{\sqrt{3}}{2};$$

deci,

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}(1+a)\cdot(2-a)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+a-a^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Din această formulă rezultă imediat că, pentru ca aria triunghiului PQR să fie cea mai mare, este necesar ca $a-\frac{1}{2}=0$, $a=\frac{1}{2}$; în acest caz

$$S_{\triangle PQR}=\frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Aria întregului hexagon $ABCDEF$ este egală cu

$$6S_{\triangle OAB}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(O este centrul hexagonului); de aici rezultă că triunghiul înscris în $ABCDEF$, de cea mai mare arie și cu o latură paralelă la AB, are aria egală cu $\frac{3}{8}S_{ABCDEF}$, ceea ce trebuia demonstrat.

122. a) Se dau n progresii aritmetice în numere întregi, infinite în ambele sensuri și astfel încît două cîte două au cîte un termen comun. Trebuie demonstrat că toate aceste progresii au un termen comun. Demonstrația o vom face prin metoda inducției complete. Pentru $n=2$, teorema este evidentă. Vom presupune acum că teorema a fost demonstrată pentru $n-1$ progresii și vom arăta că ea va fi, în acest caz, adevărată și pentru n progresii. Conform ipotezei inducției, primele $n-1$ din cele n progresii aritmetice au un termen comun; să-l notăm cu A. Vom scădea numărul A din fiecare termen al celor n progresii; vom obține alte n progresii. Evident, dacă vom demonstra că aceste noi n progresii au un termen comun, va rezulta de aici că și progresiile inițiale au avut un termen comun.

Primele $n-1$ progresii noi au ca termen comun pe 0. Vom nota rațiile progresiilor considerate respectiv cu $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ ($d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$ sînt numere întregi, deoarece considerăm progresii de numere întregi). În acest caz aceste prime $n-1$ progresii sînt formate din numere respectiv multipli de $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}$ (deoarece ele conțin pe 0), iar expresia pentru termenul comun al ultimei progresii, a n-a, este de forma $a+kd_n$, unde a este un termen oarecare al acestei progresii, iar k este rangul termenului (care poate fi atît pozitiv cît și negativ, deoarece considerăm progresii infinite în ambele sensuri).

Trebuie să demonstrăm că există un astfel de termen $a+kd_n$ al ultimei progresii, care aparține și celorlalte $n-1$ progresii, adică există un rang k, pentru care numărul $a+kd_n$ este divizibil cu toate numerele $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$. Cu alte cuvinte, trebuie să demonstrăm că există un număr întreg k astfel, încît $a+kd_n$ este divizibil cu cel mai mic multiplu comun N al numerelor $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$.

Vom nota cu D cel mai mare divizor comun al numerelor N și d_n. În acest caz, există două numere întregi p și q (fiecare dintre ele poate fi pozitiv, negativ sau zero), astfel încît

$$D = pN + qd_n. \qquad (*)$$

Deocamdată vom considera această relație adevărată, lăsînd demonstrația relației la sfîrșitul soluției.

Vom demonstra acum că numărul a se divide cu D. Într-adevăr, vom descompune numărul D în factori primi

$$D = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Faptul că cel mai mare divizor comun al numerelor d_n și N conține factorul prim p_1 la puterea α_1 înseamnă că d_n se divide cu $p_1^{\alpha_1}$ și N se divide cu $p_1^{\alpha_1}$. Faptul că cel mai mic multiplu comun N al numerelor $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ se divide cu $p_1^{\alpha_1}$, înseamnă că unul oarecare dintre aceste numere (pentru precizare, fie d_1 acest termen) se divide cu $p_1^{\alpha_1}$. Conform condițiilor problemei, prima progresie are un termen comun cu progresia a n-a. Vom nota cu k' rangul acestui termen în prima progresie și cu k'' rangul acestui termen în progresia a n-a (k' și k'' sînt numere întregi, fiecare putînd fi pozitiv, negativ sau zero); în acest caz, vom avea egalitatea

$$k'd_1 = a + k''d \quad \text{sau} \quad a = k'd_1 - k''d_n,$$

de unde rezultă că a se divide cu $p_1^{\alpha_1}$ (deoarece d_1 și d_n se divid cu $p_1^{\alpha_1}$). La fel se poate demonstra că a se divide cu $p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}, \dots, p_k^{\alpha_k}$; deci a se divide cu produsul lor D.

Vom nota acum cîtul a/D cu m și vom înmulți egalitatea (*) cu m. Vom obține

$$a = pmN + qmd_n \quad \text{sau} \quad a - qmd_n = pmN,$$

de unde rezultă că termenul $a - qmd_n$ al progresiei a n-a (termenul de rang $-qm$) se divide cu N, ceea ce trebuia demonstrat.

Ne-a mai rămas să demonstrăm egalitatea (*). Evident, este suficient să demonstrăm că, dacă numerele $\bar{N}$ și $\bar{d}_n$ sînt prime între ele, atunci există două numere p și q (nu neapărat pozitive), astfel încît

$$p\bar{N} + q\bar{d}_n = 1 \qquad (**)$$

[egalitatea (**) se obține din egalitatea (*) prin împărțirea ambilor membri cu D; $\bar{N} = N/D$ și $\bar{d}_n = d_n/D$ sînt prime între ele, deoarece D este cel mai mare divizor comun al lui N și d_n]. Să presupunem, pentru precizare, că $\bar{N}$ este cel mai mare dintre numerele întregi $\bar{N}$ și $\bar{d}_n$. Evident, din egalitatea (**) rezultă

$$p'\bar{N}' + q'\bar{d}_n = 1, \qquad (***)$$

unde $\bar{N}' = \bar{N} - \bar{d}_n$ și p' și q' sînt, de asemenea, numere întregi ($p' = p$, $q' = p + q$); reciproc, dacă egalitatea (***) are loc, atunci are loc și egalitatea (**) (unde $p = p'$, $q = q' - p'$). Numerele $\bar{N}'$ și $\bar{d}'_n$ sînt, de asemenea, prime între ele și cel mai mare dintre ele este mai mic decît cel mai mare dintre numerele $\bar{N}$ și $\bar{d}_n$. Continuînd același procedeu, vom obține egalități analoage în care vor

între numere întregi din ce în ce mai mici și în cele din urmă vom arăta că egalitatea (**) [deci și egalitatea (*)] este echivalentă cu egalitatea

$$1 = \bar{p} \cdot 1 + \bar{q} \cdot 0,$$

care, evident, are loc pentru $\bar{p}$ și $\bar{q}$ numere întregi ($\bar{p} = 1$, $\bar{q} = 0$). Cu aceasta se încheie demonstrația primei afirmații din problemă.

În problemă se mai cere să arătăm că, din faptul că oricare două progresii formate nu din numere întregi au cîte un termen comun, nu rezultă că toate progresiile au un termen comun. Însă aceasta este cu totul evident. Vom cerceta, de exemplu, două progresii

$$\ldots, -2\sqrt{2}, \ -\sqrt{2}, \ 0, \ \sqrt{2}, \ 2\sqrt{2}, \ldots \text{ și } \ldots, -2\sqrt{3}, \ -\sqrt{3}, \ 0, \ \sqrt{3}, \ 2\sqrt{3}, \ldots$$

Aceste progresii au numai un termen comun, anume pe 0 (din egalitatea $k\sqrt{2} = k'\sqrt{3}$, unde k și k' sînt numere întregi, diferite de 0, decurge rezultatul absurd $\sqrt{3/2} = k'/k$. Mai departe, vom considera încă o progresie, care are un termen comun cu prima progresie considerată și un termen comun cu cea de-a doua progresie, iar ambii acești termeni sînt diferiți de zero, de exemplu, progresia

$$\ldots, \sqrt{3}+\sqrt{2}-2(\sqrt{3}-\sqrt{2}), \ \sqrt{3}+\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}, \ \sqrt{3}+\sqrt{2},$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}, \ \sqrt{3}+\sqrt{2}+2(\sqrt{3}-\sqrt{2}), \ldots$$

Oricare două din cele trei progresii considerate au cîte un termen comun (primele două termenul 0; prima și a treia termenul $2\sqrt{2}$; a doua și a treia termenul $2\sqrt{3}$); însă toate cele trei progresii nu au un termen comun (a treia progresie nu conține pe zero, care este singurul termen comun al primelor două progresii).

Observație. Nu este greu de văzut că prima afirmație a problemei rămîne valabilă, dacă toți termenii progresiilor considerate sînt numere raționale (însă nu obligatoriu întregi). Pentru demonstrații este suficient să observăm că, în acest caz, înmulțind toate progresiile cu un același număr întreg, ele pot fi transformate în progresii de numere întregi.

b) Fie n progresii, în care orice grup de trei au cîte un termen comun. Să considerăm două oarecare din aceste progresii. Dacă aceste două progresii au un termen comun, atunci toate celelalte progresii, de asemenea, trebuie să conțină acest termen (deoarece, conform ipotezei, oricare a treia progresie are un termen comun cu cele două progresii date). Dacă aceste două progresii au doi sau mai mulți termeni comuni, atunci diferența dintre acești termeni poate fi pusă atît sub forma $k'd_1$, cît și sub forma $k''d_2$, unde k' și k'' sînt numere întregi, iar d_1 și d_2 rațiile progresiilor considerate. Deci, în acest caz,

$$k'd_1 = k''d_2, \quad d_1/d_2 = k''/k',$$

adică rațiile progresiilor considerate sînt comensurabile una prin alta.

Astfel, dacă rațiile a două progresii oarecare din cele n progresii nu sînt comensurabile, aceste două progresii au un termen comun și toate cele n

progresii conțin și ele acest termen. Dacă însă rațiile oricăror două progresii sînt comensurabile, atunci, înmulțind toate progresiile cu un același număr, putem obține alte n progresii cu rații întregi. Vom scădea, acum, din toți termenii tuturor acestor progresii un același număr, astfel încît prima progresie să fie formată din numere întregi; deoarece toate celelalte progresii, conform ipotezei, au termeni comuni cu prima progresie, ele vor fi, de asemenea, formate din numere întregi. Însă n progresii formate din numere întregi au un termen comun, dacă fiecare dintre ele au un termen comun [v. problema a)], iar progresiile considerate au chiar cîte trei termeni comuni. De aici rezultă că cele n progresii în numere întregi obținute au un termen comun, deci și cele n progresii inițiale au un termen comun.

123. a) Demonstrația acestei proprietăți este aproape evidentă. Într-adevăr, să presupunem, de exemplu, că prima cifră a șirului considerat este 1. Dacă a doua cifră este, de asemenea, 1, această cifră se și repetă de două ori. Presupunem acum, că a doua cifră este 2 (începutul șirului are forma 12 ...). Dacă pe locul al treilea stă cifra 2, aceasta cifră se repetă de două ori. Să presupunem acum că pe locul al treilea stă din nou cifra 1 (începutul are forma 121 ...). Dacă pe locul al patrulea stă cifra 1, ea se repetă succesiv de două ori, iar dacă pe locul al patrulea stă cifra 2, se repetă de două ori la rînd grupul 12. La fel se examinează cazurile în care pe primul loc stă cifra 2 (este suficient ca în raționamentul precedent să înlocuim peste tot cifra 1 cu cifra 2 și invers).

b) Vom demonstra că toate șirurile I_n ($n = 1, 2, 3, ...$), formate din cifrele 1 și 2 în modul arătat în indicațiile la problemă, nu conțin nici o cifră sau nici un grup de cifre care se repetă la rînd de trei ori. Faptul că în I_n nici o cifră nu se repetă de trei ori la rînd rezultă imediat din modul de formare a acestui șir. Într-adevăr, $I_n = \bar{I}_{n-1}$ este format din mulțimea perechilor 12 și 21 (aceste perechi le vom numi în cele ce urmează verigile șirului I_n) scrise într-o ordine anumită, astfel că fiecare cifră a șirului intră într-o verigă anumită și deci, cifra vecină cu aceasta la stînga sau la dreapta va fi diferită de ea. Mult mai greu este de demonstrat că în I_n nici un grup de cifre nu poate să se repete de trei ori la rînd; pentru această demonstrație vom folosi metoda inducției complete.

Evident că în șirul $I_1 = 12$, care conține numai două cifre, nu poate să existe nici o cifră sau grup de cifre care se repetă de trei ori la rînd. Vom demonstra acum că, dacă în șirul I_{n-1} nu există cifre sau grupuri de cifre care se repetă de trei ori la rînd, atunci nici în șirul I_n nu va exista un astfel de grup de cifre. Această demonstrație o vom face prin reducere la absurd: vom presupune că în I_n există un grup de cifre, care se repetă de trei ori la rînd și vom arăta că aceasta conduce la o contradicție. În acest scop, vom examina separat diferitele cazuri posibile.

Primul caz. *Grupul de cifre P, care se repetă de trei ori succesiv, conține un număr par de cifre.* Aici pot să se prezinte următoarele două posibilități:

A) Prima oară, grupul de cifre P începe cu prima cifră a unei verigi. În acest caz, P va începe cu prima cifră a verigii și a doua și a treia oară,

adică de fiecare dată P va conţine un număr întreg de verigi. Înlocuind fiecare verigă 12 cu o singură cifră 1, iar fiecare verigă 21 cu cifra 2, vom căpăta şirul precedent I_{n-1}; în acest caz, grupul de cifre P se va transforma într-un grup nou Q (care conţine de două ori mai puţine cifre), care se repetă de trei ori la rînd în şirul I_{n-1}. Însă aceasta este în contradicţie cu ipoteza că în şirul I_{n-1} nu există cifre sau grupuri de cifre care se repetă de trei ori la rînd. Deci, acest caz nu este posibil.

B) Grupul de cifre P începe prima oară (deci şi a doua şi a treia oară) cu a d o u a cifră a unei verigi. Să presupunem, pentru precizare, că prima cifră a lui P este 1 (dacă prima cifră a lui P ar fi 2, nu avem decît să înlocuim peste tot cifra 1 cu cifra 2, în toate raţionamentele care urmează). În acest caz, grupul P, de asemenea, începe de trei ori cu a doua cifră a verigii, 21; deci, ultima verigă a grupului (la mijlocul căreia se termină P) este 21 şi ultima cifră a lui P este 2. Obţinem astfel schema I:

$$2\overbrace{1 ** ** \ldots 2}^{P}\overbrace{1 ** ** \ldots 2}^{P}\overbrace{1 ** ** \ldots 2}^{P}1$$
$$\underbrace{2 1 ** ** \ldots}_{Q}\underbrace{2 1 ** ** \ldots}_{Q}\underbrace{2 1 ** ** \ldots}_{Q}21$$

Schema I.

Din această schemă se vede că în cazul considerat şirul I_n va conţine neapărat de trei ori la rînd şi grupul de cifre Q, care se obţine din P prin suprimarea ultimei cifre şi adăugarea unei cifre la început. Însă grupul Q începe cu prima cifră a verigii şi nu poate să se repete de trei ori la rînd, conform celor demonstrate. Deci nici acest caz nu este posibil, ceea ce trebuia demonstrat.

C a z u l a l d o i l e a. *Grupul de cifre P, care se repetă de trei ori la rînd, conţine un număr impar de cifre.* Deoarece I_n este format din verigi de cîte două cifre, atunci P, în afară de un număr întreg de verigi, mai conţine încă o cifră. În acest caz, sau P începe cu prima cifră a uneia dintre verigi şi a doua va începe cu a doua cifră a verigii, sau P începe cu a doua cifră a verigii şi atunci a doua oară începe cu prima cifră a verigii, iar a treia oară, din nou, cu a doua cifră. În ambele cazuri, pot fi alese două grupuri consecutive de cifre ale lui P, dintre care primul începe cu prima cifră a verigii, iar al doilea cu a doua cifră (aceste grupuri ale lui P vor fi primul şi al doilea grupuri sau al doilea şi al treilea). Vom cerceta acum aceste două grupuri ale lui P (le vom nota respectiv cu P_1 şi P_2).

Vom presupune că grupul P_1 începe cu veriga 12 (dacă el ar începe cu 21, în raţionamentele care urmează înlocuim 1 cu 2 şi invers). Deoarece grupul P_2 începe cu a doua cifră a verigii şi această cifră este 1, atunci ultima cifră a lui P_1 este 2 (v. schema II).

$$1\overbrace{2 ** ** \ldots 2}^{P_1}\overbrace{1 ** ** \ldots 2}^{P_2}$$
$$12\ 12 \qquad 21\ 21$$

Schema II.

Deoarece a doua cifră a lui P_1 este 2, atunci şi a doua cifră a lui P_2 este 2 şi prima verigă, conţinută în întregime în grupul P_2, este 21. Deci a treia

cifră a lui P_2 şi P_1 este 1; de aici rezultă că a doua verigă a grupului P_1 este 12, astfel că cifra a patra a lui P_1 şi P_2 este 2. Astfel, veriga a doua, conţinută în întregime în grupul P_2, este, de asemenea, 21: deci, a cincea cifră a lui P_2 şi P_1 este 1 şi a treia verigă a grupului P_1 este 12, astfel că a şasea cifră a lui P_1 şi P_2 va fi 2. Continuînd acest raţionament, vom arăta că în grupul de cifre P pe fiecare loc impar stă cifra 1, iar pe fiecare loc par stă cifra 2. Însă aceasta contrazice faptul că pe ultimul loc în acest grup stă cifra 2, deoarece ultimul loc este impar în cazul nostru. (Vom mai observa că, dacă P conţine mai mult de cinci cifre, P_1 conţine trei verigi 12 consecutive). Astfel, nici acest ultim caz nu este posibil şi cu aceasta demonstraţia s-a terminat.

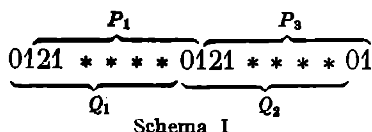
Observaţie. Scriind şirurile $I_1, I_2, I_3, \ldots$, se observă uşor că fiecare dintre ele se obţine din cel precedent adăugînd un anumit număr de cifre noi. Utilizînd metoda inducţiei complete, nu este greu de a da o demonstraţie generală a faptului că I_n poate fi obţinut adăugînd lui I_{n-1} anumite 2^{n-1} cifre. De aici rezultă nu numai faptul că există şiruri de cifre 1 şi 2, **oricît de lungi**, în care nici o cifră sau grup de cifre nu se repetă de trei ori la rînd, ci că există şi un şir **infinit** care are această proprietate. Într-adevăr, faptul că se dă un şir infinit de cifre înseamnă că se dă o regulă care permite să se scrie succesiv orice număr de cifre ale acestui şir (amintiţi-vă modul în care se defineşte o progresie aritmetică sau geometrică infinită). În cazul nostru, modul în care şirul I_{n-1} se completează cu 2^{n-1} cifre pînă la şirul I_n ne dă o astfel de regulă şi nu este greu de înţeles că în şirul infinit astfel format (ale cărui prime 2^n cifre formează pe I_n) nici o cifră sau grup de cifre nu se pot repeta de trei ori la rînd. O observaţie analoagă se poate face şi în ceea ce priveşte rezolvarea problemelor 124, a) şi b).

124. a) Demonstraţia că toate şirurile J_n, construite conform indicaţiilor date la această problemă, nu conţin cifre sau grupuri de cifre care se repetă de două ori este analoagă soluţiei problemei 123, b). În primul rînd este evident că **şirul J_n nu poate să conţină două cifre care se repetă una după alta.** Într-adevăr, J_n este format din grupurile de cifre 02, 0121, 0131 şi 03 (pe care le vom numi **verigi**), scrise într-o anumită ordine. Este uşor de verificat că în interiorul verigilor nu se află cifre care se repetă una după alta. Însă nici două verigi învecinate nu pot da două cifre care se repetă una după alta, deoarece fiecare verigă începe cu cifra 0 şi nici o verigă nu se termină cu 0.

Rămîne de arătat că **nici unul din şirurile J_n nu conţine grupuri de cifre care se repetă de două ori la rînd.** Această demonstraţie se dă prin inducţie printr-un raţionament asemănător celui de la rezolvarea problemei 123, b). Evident că şirul $J_0 = 01$ nu conţine cifre sau grupuri de cifre care se repetă. Mai departe, se presupune că şirul J_{n-1} nu conţine cifre sau grupuri de cifre care se repetă şi se demonstrează că, în acest caz, faptul că şirul J_n conţine două grupuri de cifre P (notate, în cele ce urmează cu P_1 şi P_2) care se repetă conduce la contradicţie. În acest caz, trebuie să examinăm separat cîteva cazuri posibile.

Cazul I. *Grupul P_1 este format dintr-un număr întreg de verigi.* În acest caz, evident, şi grupul P_2 trebuie să fie format dintr-un număr întreg de astfel de verigi. Vom înlocui, acum, în şirul J_n fiecare verigă cu cifra corespunzătoare, adică vom trece invers de la şirul J_n la şirul J_{n-1}. Atunci, două grupuri de cifre P identice şi învecinate ale şirului J_n se vor transforma în două cifre sau grupuri de cifre ale şirului J_{n-1}, identice şi învecinate, ceea ce contrazice ipoteza că şirul J_{n-1} nu conţine două cifre sau grupuri de cifre identice care se repetă.

C a z u l II. *Grupurile de cifre P_1 și P_2 încep cu o anumită cifră a, care ocupă în ambele cazuri un același loc în verigile identice.* Să presupunem, pentru precizare, că ambele grupuri P încep cu 2, care ocupă locul al treilea în veriga 0121. În acest caz, grupul P_1 trebuie să se termine cu cifrele 01, cu care începe veriga 0121, și deci , cu aceleași cifre trebuie să se termine și grupul P_2:

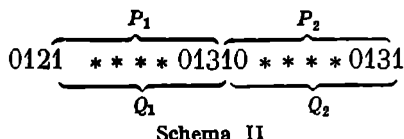


Schema I

Obținem, astfel, schema I, din care se vede că, în acest caz, șirul J_n trebuie, de asemenea, să conțină două grupuri de cifre Q, care se repetă unul după altul și care sînt formate dintr-un număr întreg de verigi. Acest caz a mai fost examinat și s-a demonstrat că nu este posibil.

C a z u l III. *Grupurile P_1 și P_2 încep cu aceeași cifră a, care în cele două cazuri face parte din verigi diferite sau stă pe locuri diferite în verigi identice.*

Aici, în ambele cazuri după cifra a trebuie să urmeze o aceeași cifră b. Cercetînd toate cazurile posibile (aici este important faptul că știm care cifră urmează după f i e c a r e cifră dată a verigii: după ultima cifră a verigii urmează 0 care este prima cifră a verigii următoare), ne vom convinge că acest lucru este posibil numai în cazul în care cifra a este 1 și anume unul dintre grupurile P începe cu cifra a patra a verigii 0121, iar al doilea grup P începe cu cifra a patra a verigii 0131 [1]. Să presupunem, pentru precizare, că grupul P_1 începe cu ultima cifră a verigii 0121, iar grupul P_2 cu ultima cifră a verigii 0131 (dacă grupul P_1 ar fi început cu ultima cifră a verigii 0131, iar grupul P_2 cu ultima cifră a verigii 0121, ar fi trebuit să înlocuim peste tot, în raționamentele care urmează, pe 2 cu 3 și invers). În acest caz, grupul P_1 trebuie să se termine cu cifrele 013, care sînt primele trei cifre ale verigii 0131, cu a patra cifră cu care începe grupul P_2. Deci și grupul P_2 se termină cu cifrele 013. Din regula de formare a șirurilor considerate este ușor de văzut că în șirurile J_n trei cifre 013 urmează una după alta în această ordine numai în cazul în care acestea sînt primele trei cifre ale verigii 0131; astfel, după aceste cifre urmează totdeauna cifra 1. Deci, în cazul considerat, obținem schema II:



Schema II

din care se vede că și în acest caz șirul J_n trebuie să conțină două grupuri de cifre Q care se repetă unul după altul și care sînt formate dintr-un număr întreg de verigi, ceea ce nu este posibil, după cum am văzut mai înainte.

[1] S-ar părea că mai există o posibilitate — un grup P poate să înceapă cu prima cifră a verigii 0121, iar al doilea, cu prima cifră a verigii 0131. În acest caz, însă, în cele două grupuri P cifrele de pe locul al treilea sînt diferite.

O b s e r v a ț i e. Pentru construirea șirului i n f i n i t care este format din cifrele 0, 1, 2, 3 în care nici o cifră sau grup de cifre nu se repetă de două ori la rînd [v. observația de la rezolvarea problemei 123, b)], este comod să se considere nu șirurile J_n, ci șirurile J'_n, care se formează după următoarea regulă:

$$J'_0 = 01, \quad J'_n = 01\,\widetilde{J'_{n-1}}$$

(aici semnul $\sim$ de deasupra literei are aceeași semnificație ca și în indicațiile la problema de față). Nu este greu de verificat că șirul J'_n se obține din șirul J'_{n-1}, adăugîndu-i la sfîrșit un anumit grup de cifre.

b) Demonstrația este analoagă cu rezolvarea problemelor 123, b) și 124, a) și, de asemenea, se bazează pe metoda inducției complete. Evident că șirul $K_1 + 123$ nu conține cifre sau grupuri de cifre care se repetă. Vom presupune, acum, că șirul K_{n-1} nu conține repetiții și vom arăta că, în acest caz, ipoteza că șirul K_n conține două grupuri de cifre P_1 și P_2 identice care se repetă succesiv conduce la contradicții.

În primul rînd, este evident că P_1 și P_2 nu pot fi formate dintr-o cifră. Într-adevăr, nici una din v e r i g i l e șirului K_n (verigile sînt grupuri de trei cifre 123 etc) nu conține cifre care se repetă. Dar nici două verigi vecine nu pot da o pereche de cifre care se repetă. Într-adevăr, în șirul K_n nu pot sta alături verigile 231 și 123 sau 321 și 132, deoarece primele două verigi înlocuiesc cifrele care stau pe locul impar, iar următoarele două verigi înlocuiesc cifrele care stau pe locul par; verigile 231 și 123, sau 321 și 123, de asemenea, nu pot să stea alături, deoarece primele două verigi figurează în locul cifrei 2, iar celelalte pe locul cifrei 1, iar în șirul K_{n-1}, conform ipotezei, nu au existat cifre care se repetă. Într-un mod cu totul analog se demonstrează că două verigi învecinate nu pot da repetarea cifrei 2 sau a cifrei 3. Rămîne numai să demonstrăm că șirul K_n nu poate să conțină grupurile de cifre P_1 și P_2 care se repetă, formate din mai mult de o cifră. În acest caz, va trebui să cercetăm separat mai multe cazuri particulare posibile.

P r i m u l c a z. *Grupurile de cifre P_1 și P_2 conțin un număr întreg de verigi.* Înlocuind toate verigile cu cifrele corespunzătoare, vom obține șirul K_{n-1}, care, contrar ipotezei, va conține o repetare a grupurilor de cifre (care se obțin prin înlocuirea făcută în grupul de cifre P, care se repetă în șirul K_n de două ori la rînd). Cu aceasta s-a demonstrat că acest caz nu este posibil.

A l d o i l e a c a z. *Numărul de cifre în grupurile P_1 și P_2 este divizibil cu* 3. Dacă, în acest caz, grupul P_1 începe cu cifra a doua a unei verigi oarecare, atunci și grupul P_2 trebuie să înceapă cu cifra a doua a unei verigi oarecare (deoarece numărul de cifre în grupul P_1 este multiplu de trei). Dacă ultimele două cifre ale verigii cu care începe grupul P_1 vor fi, să zicem, 12, atunci în fața lor stă cifra 3; în acest caz, primele două cifre ale lui P_2 vor fi tot 12 și, deoarece aceste cifre împreună cu ultima cifră a grupului P_1 formează o verigă completă, ultima cifră a lui P_1 este 3 (v. schema I). Atunci, deplasînd ambele grupuri P_1 și P_2 cu o cifră spre stînga,

vom obţine grupurile Q_1 şi Q_2 care se repetă, formate dintr-un număr întreg de verigi, adică vom reveni la primul caz.

$$\overbrace{312***\ ***}^{P_1}\overbrace{312***\ ***3}^{P_2}$$
$$\underbrace{312***\ ***}_{Q_1}\underbrace{312***\ ***}_{Q_2}3$$

Schema I.

În mod analog se arată că, dacă grupurile P_1 şi P_2 încep cu a treia cifră a verigii (adică, dacă aceste grupuri se termină cu primele două cifre ale unei verigi oarecare), atunci, deplasînd ambele aceste grupuri cu o cifră spre dreapta, vom obţine două grupuri de cifre care se repetă, formate dintr-un număr întreg de verigi.

Cazul al treilea. *Numărul de cifre în grupurile P_1 şi P_2 nu este multiplu de trei; P_2 începe cu o verigă completă.* Vom cerceta separat cele două posibilităţi.

A. Numărul de cifre în grupurile P_1 şi P_2 este egal cu $3k+1$. În acest caz, ambele grupuri de cifre P conţin un număr întreg de verigi plus încă o cifră—prima cifră a grupului P_1 şi ultima cifră a grupului P_2. Să presupunem, pentru precizare, că prima cifră a grupului P_1 este 3. În acest caz, şi prima cifră a grupului P_2 este tot 3, deci următoarele două cifre ale primei verigi a grupului P_2 vor fi 1 şi 2 (pe schema II perechea de cifre 1 şi 2, despre care nu ştim în ce ordine stau, este notată cu XX). Astfel, cifrele a doua şi a treia ale lui P_1 vor fi 1 şi 2, deci cifra a patra a acestui grup (cifra a treia a primei verigi complete a grupului P_1) este 3. Însă, deoarece a patra cifră a lui P_2 (prima cifră a verigii a doua a lui P_1) este 3, cifrele a cincea şi a şasea ale grupului P (cifrele a doua şi a treia ale verigii a doua a grupului P_2) vor fi 1 şi 2 (care stau într-o anumită ordine). Deci prima şi a doua cifre ale verigii a doua complete a lui P_1 vor fi 1 şi 2, iar cifra a treia a acestei verigi (cifra a şaptea a grupului P) este din nou 3. Continuînd acest raţionament, tragem concluzia că în grupurile P_1 şi P_2 cifra 3 stă pe locurile 1, 4, 7 etc.; deoarece numărul total de cifre în aceste grupuri este egal cu $3k+1$, atunci pe ultimul loc în aceste grupuri stă, de asemenea, cifra 3. Astfel, vedem că grupul P_1 se termină cu

$$\overbrace{3XX3\ XX3\ \ldots\ XX3}^{P_1}\ \overbrace{3XX\ 3XX\ 3XX\ldots 3}^{P_2}$$

Schema II.

cifra 3; grupul P_2 începe cu cifra 3. Deci, în şirul K_n aceeaşi cifră 3 se repetă de două ori la rînd, ceea ce, după cum am văzut, nu este posibil.

Cu totul analog se cercetează cazurile în care prima cifră a grupurilor P_1 şi P_2 este 2 sau 1.

B. Numărul de cifre în grupurile P_1 şi P_2 este egal cu $3k+2$. În acest caz, grupurile de cifre P_1 şi P_2 conţin, pe lîngă un număr întreg de verigi, încă cîte două cifre; acestea vor fi primele două cifre

ale grupului P_1 și ultimele două cifre ale grupului P_2. Să presupunem că primele două cifre ale grupurilor P_1 și P_2 vor fi 1 și 2, care stau într-o anumită ordine: atunci cifra a treia a grupurilor P_1 și P_2 (cifra a treia a primei verigi a grupului P_2) este 3. Însă aceasta înseamnă că cifrele a patra și a cincea ale grupului P_1 (cifrele a doua și a treia ale primei verigi complete a lui P_1) vor fi din nou 1 și 2; deci cifra a șasea a lui P (cifra a treia a verigii a doua a lui P_2) este 3 etc.

Astfel, tragem concluzia că în grupurile P_1 și P_2 cifra 3 stă pe locurile 3, 6, 9 etc. (v. schema III). De aici rezultă că grupul P_1 se termină cu veriga care începe cu cifra 3 (adică 312 sau 321); grupul P_2 începe cu veriga care se termină cu cifra 3 (adică 123 sau 213). Mai departe, repetînd aproape cuvînt cu cuvînt raționamentul prin care s-a demonstrat că K_n

$$\overbrace{3XX\ 3XX\ 3XX \ldots 3XX}^{P_1}\ \overbrace{XX3\ XX3\ XX3 \ldots XX}^{P_2}$$

Schema III.

nu poate să conțină două cifre care se repetă (v. p. 297), se poate demonstra că în toate cazurile, care se prezintă, șirul K_{n-1} trebuie să conțină două cifre care se repetă una după alta.

Cu totul analog, se examinează cazurile în care grupurile P_1 și P_2 încep cu cifrele 1 și 3 sau 2 și 3.

C a z u l a l p a t r u l e a. *Numărul de cifre în grupurile P_1 și P_2 nu este multiplu de trei; P_2 nu începe cu o verigă completă.* Aici trebuie să cercetăm patru posibilități.

A. G r u p u l P_2 î n c e p e c u u l t i m a c i f r ă a u n e i v e r i g i o a r e c a r e; g r u p u r i l e P_1 și P_2 c o n ț i n $3k+1$ c i f r e. În acest caz, grupul P_1 trebuie să înceapă cu o verigă incompletă formată din două cifre; grupul P_2 trebuie să se termine cu o verigă întreagă.

Vom presupune, pentru precizare, că P_1 și P_2 încep cu cifra 3 (raționamentele aproape că nu s-ar fi modificat, dacă P_1 și P_2 ar fi început cu cifrele 1 sau 2). Astfel, ultimele două cifre ale grupului P_1 vor fi 1 și 2 (care stau într-o anumită ordine); deci ultimele două cifre ale grupului P_2 vor fi 1 și 2. De aici rezultă că a treia cifră de la sfîrșit a grupului P_2 (deci și a grupului P_1) este 3. Însă, deoarece a treia cifră de la sfîrșit a grupului P_1 este 3, cele două cifre precedente vor fi 1 și 2. Revenind acum la grupul P_2, tragem concluzia că a șasea cifră de la sfîrșit este 3. Continuînd acest raționament, ne convingem treptat că în grupurile P_1 și P_2 cifra 3 stă pe locurile 3, 6, 9 etc. de la sfîrșit (v. schema IV). Deoarece aceste grupuri conțin în total cîte $3k+1$ cifre, rezultă de aici că cifra 3 stă în grupurile P_1 și P_2 pe locul 2. Însă aceasta contrazice faptul că în grupul P_1 cifra 3 stă pe locul întîi.

$$\overbrace{3X \ldots XX3\ XX3\ XX}^{P_1}\overbrace{3 \ldots 3XX\ 3XX\ 3XX}^{P_2}$$

Schema IV.

B. G r u p u l P_2 î n c e p e c u u l t i m a c i f r ă a u n e i v e r i g i o a r e c a r e; g r u p u r i l e P_1 ş i P_2 c o n ţ i n c î t e $3k+2$ c i f r e. În acest caz, grupul P_1 trebuie să înceapă cu o verigă completă, iar grupul P_2 trebuie să se termine cu prima cifră a verigii. Vom presupune, din nou, că P_1 şi P_2 încep cu cifra 3. În acest caz, pe următoarele două locuri în grupul P_1 (deci şi în grupul P_2) stau cifrele 1 şi 2; înseamnă că pe locul al patrulea al grupului P_2 (şi P_1) stă cifra 3. Continuînd să raţionăm ca mai sus, ajungem, din nou, la concluzia că în grupurile P_1 şi P_2 cifra 3 stă pe locurile 1, 4, 7 etc. (v. schema V). Deoarece numărul de cifre în fiecare dintre grupurile P_1 şi P_2 este egal cu $3k+2$, rezultă de aici că cifra 3 trebuie să stea pe penultimul loc în aceste grupuri, ceea ce contrazice faptul că ultimele două cifre ale grupului P_1 sînt 1 şi 2 (primele două cifre ale verigii care se termină cu cifra 3).

$$\overbrace{3XX\,3XX\,3XX\ldots XX}^{P_1}\overbrace{3\,XX3\,XX3\,XX3\ldots XX3}^{P_2}$$

Schema V.

C. G r u p u l P_2 î n c e p e c u o v e r i g ă i n c o m p l e t ă f o r m a t ă d i n d o u ă c i f r e; g r u p u r i l e P_1 şi P_2 s î n t f o r m a t e d i n $3k+1$ c i f r e. În acest caz, grupul P_1 trebuie să înceapă cu o verigă completă, iar grupul P_2 să se termine cu o verigă incompletă formată din două cifre. Vom presupune, pentru precizare, că grupurile P_1 şi P_2 se termină cu cifrele 3. În acest caz, primele două cifre ale grupului P_2 (şi P_1) vor fi 1 şi 2; deci cifra a treia a grupului P_1 (şi P_2) este 3. Deoarece cifra a treia a grupului P_2 este 3, următoarele două cifre vor fi 1 şi 2 şi, deoarece cifrele a patra şi a cincea ale grupului P_1 sînt 1 şi 2, cifra a şasea a acestui grup (deci, şi a grupului P_2) este 3. Continuînd acest raţionament ca şi pe cel precedent, ne convingem că cifra 3 stă în grupurile P_1 şi P_2 pe locurile 3, 6, 9 etc. (v. schema VI). Deoarece numărul total de cifre în aceste grupuri este egal cu $3k+1$, rezultă că cifra 3 trebuie să stea şi pe penultimul loc, ceea ce contrazice faptul că în grupul P pe ultimul loc stă cifra 3.

$$\overbrace{XX3\,XX3\,XX3\ldots 3}^{P_1}\overbrace{XX\,3XX\,3XX\ldots X3X}^{P_2}$$

Schema VI.

D. G r u p u l P_2 î n c e p e c u o v e r i g ă i n c o m p l e t ă f o r m a t ă d i n d o u ă c i f r e; P_1 şi P_2 s î n t f o r m a t e d i n $3k+2$ c i f r e. În acest caz, grupul P_1 începe cu ultima cifră a verigii; grupul P_2 se termină cu o verigă completă. Vom presupune, din nou, că grupurile P_1 şi P_2 se termină cu cifra 3. În acest caz, ca şi mai sus, arătăm că în grupurile

P_1 și P_2 cifra 3 stă pe locurile 1, 4, 7 etc. de la sfîrșit (v. schema VII). Deoarece numărul de cifre în fiecare dintre aceste grupuri

$$\overbrace{X \ldots 3XX\ 3XX3}^{P_1}\overbrace{XX \ldots XX3XX3}^{P_2}$$

Schema VII.

este egal cu $3k + 2$, rezultă de aici, în particular, că cifra 3 stă în aceste grupuri pe locul al doilea; însă aceasta contrazice faptul că pe ultimul loc în grupul P_1 stă cifra 3 (deoarece ultima cifră a grupului P_1 și a doua cifră a grupului P_2 fac parte din aceeași verigă).

Astfel, am examinat toate cazurile posibile; cu aceasta demonstrația este complet terminată.

Observație. În mod analog ca în rezolvarea problemei b) se poate demonstra că dacă în șirul $1234 \ldots n$ se înlocuiesc succesiv:

cifra 1 care stă pe un loc impar cu grupul de cifre	$123 \ldots n$
cifra 2 care stă pe un loc impar cu grupul de cifre	$234 \ldots n\,1$
cifra 3 care stă pe un loc impar cu grupul de cifre	$345 \ldots n\,12$
....	
cifra n care stă pe un loc impar cu grupul de cifre	$n\,12 \ldots (n-2)\ (n-1)$
cifra 1 care stă pe un loc par cu grupul de cifre	$n\,(n-1)\ (n-2) \ldots 21$
cifra 2 care stă pe un loc par cu grupul de cifre	$1n\,(n-1) \ldots 32$
cifra 3 care stă pe un loc par cu grupul de cifre	$21n\,(n-1) \ldots 43$
....	
cifra n care stă pe un loc par cu grupul de cifre	$(n-1)\,(n-2)\ (n-3) \ldots 1n$,

toate șirurile obținute (formate din cifrele $1, 2, 3, \ldots, n$) nu vor conține cifre sau grupuri de cifre care se repetă de două ori.

125. Vom demonstra că numărul T_n, format după regula arătată în indicațiile la această problemă, verifică efectiv condițiile problemei. Din această regulă rezultă că toate numerele de n cifre, care se obțin prin scrierea a n cifre consecutive oarecare ale numărului T_n, vor fi diferite între ele. Astfel, pentru rezolvarea completă a problemei este necesar numai să arătăm că cu această regulă se poate obține o r i c e număr k de n cifre format numai din zerouri și unități. Vom da această demonstrație prin inducție completă, ținînd seama de numărul de unități de la sfîrșitul numărului k.

Din construcția numărului T_n rezultă că el conține n unități consecutive (numărul T_n începe cu n unități). Unicul număr de n cifre format din zerouri și unități, care se termină cu $n-1$ unități, este $0\underbrace{11 \ldots 1}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}$. Vom arăta că acest număr de asemenea poate fi dedus din numărul T_n și anume că numărul T_n s e t e r m i n ă cu cifrele $0\underbrace{11 \ldots 1}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}$. Într-adevăr, vom nota ultimele n cifre ale numărului T_n cu $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_n$. Deoarece $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_n$ sînt u l t i m e l e $n-1$ cifre ale numărului T_n, atunci, conform definiției acestui număr, numerele $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_n 0$ și $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_n 1$ de n cifre au mai fost întîlnite ca n cifre consecutive ale numărului considerat (în caz contrar, după $\delta_2\delta_3 \ldots \delta_n$ s-ar fi

putut adăuga încă cel puțin o cifră). Mai departe, dacă n u t o a t e c i f r e l e $\delta_2, \delta_3 ..., \delta_n$ s î n t u n i t ă ț i, șirurile de numere $\delta_2\delta_3 ... \delta_n 0$ și $\delta_2\delta_3 ... \delta_n 1$ nu pot sta chiar la începutul numărului nostru T_n (deoarece acest număr, prin modul în care a fost construit, începe cu n unități). Astfel, cele două numere $\delta_2\delta_3 ... \delta_n 0$ și $\delta_2\delta_3 ... \delta_n 1$ nu sînt formate din primele n cifre ale lui T_n, deci, undeva în interiorul numărului T_n este întîlnit de două ori același șir de $n - 1$ cifre $\delta_2\delta_3 ... \delta_n$. Însă, deoarece nici un șir de n cifre consecutive ale numărului T_n nu poate să se repete, rezultă că înaintea lui $\delta_2\delta_3 ... \delta_n$ trebuie să stea o dată cifra 0 și o dată cifra 1. În acest caz, cifra δ_1 nu poate fi egală nici cu 0 nici cu 1 (ambele numere de n cifre $0\delta_1\delta_2 ... \delta_{n-1}$ și $1\delta_1\delta_2 ... \delta_{n-1}$ au mai fost întîlnite mai înainte). Contradicția obținută arată că ipoteza noastră că printre cifrele $\delta_2, \delta_3, ..., \delta_n$ se află cel puțin un zero este falsă; deci ultimele $n - 1$ cifre ale numărului T_n pot fi numai $n - 1$ unități. Însă, în acest caz, este clar că imediat înaintea acestor $n - 1$ unități trebuie să stea zero, deoarece n unități consecutive au mai fost întîlnite chiar la începutul numărului nostru. Am demonstrat deci că ultimele n cifre ale numărului T vor fi efectiv cifrele $0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}$.

Vom presupune acum că toate numerele de n cifre de forma $\delta_1\delta_2 ... \delta_{n-i-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } i \text{ ori}}$, unde $\delta_1\delta_2, ..., \delta_{n-i-1}$ iau valorile 0 sau 1 și $i > m$, se află printre șirurile de n cifre învecinate ale numărului T_n și vom arăta că în acest caz și fiecare număr $k = \delta_1\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } m \text{ ori}}$ va fi întîlnit printre șirurile de n cifre învecinate ale numărului T_n.

Conform ipotezei, numărul $\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 11}_{\text{de } m+1 \text{ ori}}$ se află undeva în șirul de cifre ale numărului T_n. Însă, conform modului de construcție a numărului T_n, șirul de cifre $\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 11}_{\text{de } m+1 \text{ ori}}$ poate să se afle în acest număr numai în cazul în care înaintea lui figurează în numărul T_n șirul de cifre $\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } m \text{ ori}}0$. Astfel, vedem că numărul $\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } m \text{ ori}}$ de $n - 1$ cifre este întîlnit de d o u ă o r i ca un șir de n cifre consecutive ale numărului T_n (de fiecare dată nu chiar la început, deoarece numărul T_n începe cu p unități). Însă, deoarece, conform modului de construcție a lui T_n, nici un șir de n cifre consecutive ale acestui număr nu poate să se repete, atunci imediat înaintea lui $\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } m \text{ ori}}$ trebuie să stea o dată cifra 1, iar a doua oară cifra 0. Deci, indiferent dacă δ_1 este egal cu unu sau cu zero, numărul considerat $k = \delta_1\delta_2 ... \delta_{n-m-1}\, 0\underbrace{11 ... 1}_{\text{de } m \text{ ori}}$ este întîlnit printre șirurile de n semne consecutive ale numărului T_n. Cu aceasta demonstrația s-a terminat.

O b s e r v a ț i e. Deoarece numărul numerelor diferite din n semne, formate numai din zerouri și unități, este egal, evident, cu 2^n, din această soluție rezultă, în particular, că numărul T_n are $2^n + n - 1$ semne (dacă T_n ar avea mai puțin de $2^n + n - 1$ cifre, toate cele 2^n

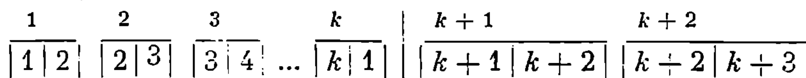
numere de n cifre n-ar putea fi întîlnite printre șirurile de n cifre consecutive ale numărului T_n, iar dacă T_n ar avea mai mult de $2^n + n - 1$ cifre, unele numere de n cifre deduse din T_n ar trebui să coincidă).

Să mai observăm că printr-un procedeu analog se poate construi un număr (format din toate cele zece cifre 0, 1, 2, ..., 9, în care toate grupurile posibile din n cifre consecutive sînt diferite și coincid cu toate numerele de n cifre din sistemul de numerație în baza zece.

126. Vom demonstra o propoziție mai generală: dacă m sorturi de prăjituri cu cîte n prăjituri din fiecare sort sînt împachetate în m cartoane, cîte n prăjituri în fiecare carton, atunci totdeauna poate fi aleasă cîte o prăjitură din fiecare sort, scoțînd cîte o prăjitură din fiecare carton. Această afirmație este cu totul evidentă pentru $m = 1$ (cînd un anumit număr de prăjituri de un sort este împachetat într-un carton) și pentru $n = 1$ (un anumit număr de prăjituri, fiecare de un alt sort, este împachetat în cartoane, cîte o prăjitură în fiecare carton). Vom demonstra acum că această propoziție este adevărată pentru orice valoare a lui n.

Vom considera mai întîi cazul $n = 2$ (în fiecare carton se află cîte două prăjituri). În acest caz, nu este greu de arătat cum se face alegerea prăjiturilor în condițiile problemei. Vom scoate dintr-un carton oarecare o prăjitură oarecare; sortul acestei prăjituri îl vom numi 1-ul. Vom numi sortul al 2-lea, sortul celei de-a doua prăjituri care se află în același carton (cazul în care a doua prăjitură din primul carton este de același sort cu prima prăjitură îl vom examina mai jos în mod special). Deoarece avem cîte două prăjituri de fiecare sort, undeva se mai află o prăjitură de sortul al 2-lea; vom scoate această prăjitură din cartonul în care se află. Sortul prăjiturii a doua din cartonul al doilea, îl vom numi al 3-lea. Undeva se mai află o prăjitură de sortul al 3-lea; vom scoate această prăjitură din cartonul în care se află. Mai departe, sortul prăjiturii a doua din al treilea carton îl vom numi al 4-lea; undeva se mai află o prăjitură de sortul al 4-lea; vom scoate această prăjitură din cartonul în care se află. Putem continua acest proces pînă ce vom ajunge la cartonul în care se află a doua prăjitură de sortul întîi. Presupunem că am scos prăjiturile din cartonul al k-lea, unde k poate fi egal cu unu sau cu m.

Astfel, am găsit k cartoane în care sînt puse $k \cdot 2$ prăjituri de k sorturi diferite; în acest caz, din aceste k cartoane am izbutit să alegem k prăjituri diferite, scoțînd cîte o prăjitură din fiecare carton. Dacă $k = m$, problema este rezolvată; dacă însă $k < m$ (în particular, dacă $k = 1$, adică dacă în primul carton se aflau două prăjituri de același sort), lăsăm de o parte cele k prăjituri alese și continuăm să scoatem prăjiturile din celelalte $m - k$ cartoane în același mod, începînd cu o prăjitură oarecare de un sort oarecare $k+1$ (v. schema I).



Schema I.

În acest caz, se poate întîmpla ca nici a doua oară să nu epuizăm toate sorturile de prăjituri, adică să ajungem la un carton în care a doua prăjitură este tot din sortul $k+1$, înainte să fi cercetat toate cartoanele; în acest

caz, la un moment dat, va trebui iarăşi să începem alegerea cu o prjitură oarecare de unul dintre sorturile care nu au fost întîlnite pînă atunci. Însă, este clar că printr-un astfel de proces, vom putea realiza, pînă la urmă, alegerea cerută a m prăjituri diferite, cîte una din fiecare carton.

Pentru cazul $n \geqslant 3$ vom demonstra afirmaţia noastră prin inducţie relativă la numărul n. Cu alte cuvinte, vom presupune că afirmaţia noastră a fost demonstrată pentru fiecare n, mai mic decît o anumită valoare determinată (mai mare decît 2) şi vom arăta că, în acest caz, afirmaţia poate fi adevărată şi pentru această valoare a lui n.

Considerăm deci că pentru orice n mai mic decît o valoare dată, propoziţia din problemă este adevărată. Vom presupune, acum, că avem o anumită distribuţie a $m \cdot n$ prăjituri (m sorturi diferite de prăjituri, cîte n prăjituri de fiecare sort) în m cartoane (n prăjituri în fiecare carton), astfel încît se pot alege m prăjituri de sorturi diferite, luînd cîte o prăjitură din fiecare carton. Vom demonstra că, dacă vom schimba locurile a două prăjituri oarecare, noua distribuţie a prăjiturilor în cartoane va fi astfel că şi de data aceasta vom putea alege prăjituri de toate sorturile existente, scoţînd cîte o prăjitură din fiecare carton.

Într-adevăr, conform ipotezei noastre asupra distibuţiei iniţiale, putem realiza alegerea a m prăjituri în m moduri diferite, luînd cîte o prăjitură din fiecare carton. După aceasta, în fiecare carton vor rămîne $n - 1$ prăjituri [în total $m(n - 1)$ prăjituri de m sorturi diferite]. Conform ipotezei, mai putem alege încă o dată m prăjituri diferite, scoţînd cîte o prăjitură din fiecare carton. După a doua alegere a prăjiturilor, în fiecare carton vor rămîne cîte $n - 2$ prăjituri; conform ipotezei, şi a treia oară putem alege m prăjituri diferite, alegînd cîte o prăjitură din fiecare carton. Vedem astfel că la distribuţia iniţială se poate realiza alegerea a trei grupuri de cîte m prăjituri diferite, scoţînd de trei ori cîte o prăjitură din fiecare carton. Vom presupune acum că am modificat distribuţia iniţială a prăjiturilor, schimbînd locurile a două prăjituri. În acest caz, din cel puţin unul dintre cele trei grupuri de cîte m prăjituri de sorturi diferite nu vor face parte prăjiturile ale căror locuri le-am schimbat (deoarece am schimbat locurile doar a două prăjituri). De aici rezultă că şi în noua distribuţie a prăjiturilor putem alege m prăjituri de m sorturi diferite, scoţînd cîte o prăjitură din fiecare carton.

Din proprietatea demonstrată rezultă că pentru f i e c a r e distribuţie a $m \cdot n$ prăjituri (m sorturi diferite a cîte n prăjituri de fiecare sort) în m cartoane (n prăjituri de fiecare carton) pot fi alese m prăjituri diferite, luînd cîte o prăjitură din fiecare carton. Într-adevăr, fiecare distribuţie a $m \cdot n$ prăjituri în cartoane poate fi obţinută din distribuţia a $m \cdot n$ prăjituri în cartoane poate fi obţinută din distribuţia în care se aflau în fiecare carton prăjituri de un anumit sort, schimbînd succesiv de mai multe ori locurile unei perechi de prăjituri. Însă, pentru distribuţia în care fiecare carton conţine prăjituri de acelaşi sort, alegerea cerută a prăjiturilor, evident, este posibilă; din cele demonstrate rezultă deci că o asemenea alegere este posibilă şi pentru orice distribuţie. Cu acesata se încheie demonstraţia faptului că, dacă afirmaţia este adevărată pentru price n mai mic decît o valoare dată, ea este adevărată şi pentru acest n. De aici, conform principiului inducţiei complete, rezultă că afirmaţia este adevărată pentru toţi n.

127. Vom demonstra că numărul pătratului situat la intersecţia rîndului $A + 1$ cu coloana $B + 1$ este determinat în modul arătat în indicaţiile la problemă. Pentru aceasta, trebuie să verificăm că numărul $Z(A, B)$ are următoarele trei proprietăţi:

1° $Z(0, 0) = 0$.

2° $Z(A, B)$ este diferit de toate numerele $Z(A, 0), Z(A, 1), \dots, Z(A, B-1)$, $Z(0, B), Z(1, B), \dots, Z(A - 1, B)$.

3° Orice număr întreg nenegativ, mai mic decît $Z(A, B)$, este egal cu unul din numerele $Z(A, 0), Z(A, 1), \dots, Z(A, B-1)$ sau din numerele $Z(0, B)$, $Z(1, B), \dots, Z(A - 1, B)$

Proprietatea 1° rezultă direct din definiţia lui $Z(A, B)$.

Vom demonstra acum proprietatea 2°. Fie $A =$ „$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$“, $B =$ $=$ „$b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0$“ şi $C =$ „$c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$“ trei numere întregi nenegative; pentru precizare, vom considera $n \geqslant m \geqslant k$. În acest caz, este evident că

$$Z(Z(A, B), C) = „\bar{z}_n \bar{z}_{n-1} \dots \bar{z}_1 \bar{z}_0“,$$

unde

$$\bar{z}_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a_i + b_i + c_i = 0 \text{ sau } a_i + b_i + c_i = 2, \\ 1, & \text{dacă } a_i + b_i + c_i = 1 \text{ sau } a_i + b_i + c_i = 3 \end{cases}$$

$$(i = n, n - 1, \dots, 1, 0).$$

De aici, obţinem uşor

$$Z(Z(A, B), A) = B.$$

Fie $Z(A, B) = Z(A, B_1)$. În acest caz, $Z(Z(A, B), A) = Z(Z(A, B_1), A)$, de unde, conform celor demonstrate, rezultă că $B = B_1$. Astfel numărul $Z(A, B)$ nu poate să coincidă cu nici unul dintre numerele $Z(A, 0), Z(A, 1), \dots, Z(A, B-1)$. La fel se arată că $Z(A, B)$ nu poate să coincidă cu nici unul dintre numerele $Z(0, B), Z(1, B), \dots, Z(A-1, B)$ [aceasta se poate deduce din cele demonstrate, dacă se observă că $Z(A, B) = Z(B, A)$].

Ne-a mai rămas să demonstrăm proprietatea 3°. Fie $X =$ „$x_q x_{q-1}, \dots, x_1 x_0$“ un număr întreg nenegativ, mai mic decît $Z(A, B) =$ „$z_p z_{p-1} \dots z_1 z_0$“; aceasta înseamnă că $q \leqslant p$ şi dacă $q = p$, atunci $x_p = z_p$, $x_{p-1} = z_{p-1}, \dots, x_{r+1} =$ $= z_{r+1}$ şi $x_r = 0$, $z_r = 1$ (numărul r poate, în particular, să coincidă cu p). Deoarece $z_p = 1$ [„cifra“ de rangul cel mai înalt în scrierea în baza doi a numărului $Z(A, B)$], avem $a_p = 1$, $b_p = 0$ sau $a_p = 0$, $b_p = 1$; deoarece $z_r = 1$, avem $a_r = 1$, $b_r = 0$ sau $a_r = 0$, $b_r = 1$; pentru precizare, vom considera că în ambele cazuri sînt adevărate primele relaţii. Vom nota numărul $Z(X, B)$ cu A_1 şi vom demonstra că $A_1 < A$. Într-adevăr, deoarece „cifra“ de rangul cel mai înalt a numărului $Z(A, B)$, diferită de 0, este cea de rang p, toate „cifrele“ de rang mai înalt decît p coincid în numerele A şi B; pe de altă parte, deoarece „cifra“ de rangul cel mai înalt a numărului X, diferită de zero, este aceea de rang q, toate „cifrele“ de rang mai mare decît q coincid în numerele $A_1 = Z(X, B)$ şi B; deoarece $q \leqslant p$, rezultă că toate „cifrele“ de

rang mai mare decît p coincid în numerele A_1 şi A. Mai departe, dacă $q < < p$, „cifra“ de rang p a numărului A_1 coincide cu „cifra“ de rang p a numărului B, adică este egală cu 0, în timp ce „cifra“ de rang p a numărului A este egală cu 1; deci $A_1 < A$. Dacă însă $p = q$, din faptul că „cifrele“ de rang $p, p - 1, ..., r + 1$ ale numerelor $Z(A, B)$ şi X coincid, rezultă că şi „cifrele“ corespunzătoare ale numerelor $A_1 = Z(X, B)$ şi A coincid (dacă $z_i = x_i = 0$, „cifrele“ de rang i ale numerelor A şi B coincid şi „cifrele“ de rang i ale numerelor A_1 şi B coincid; dacă $z_i = x_i = 1$, „cifrele“ de rang i ale numerelor A şi B sînt diferite şi „cifrele“ de rang i ale numerelor A_1 şi B sînt diferite). În sfîrşit, $a_r = 1$, $b_r = 0$; $x_r = 0$; deci „cifra“ de rang r a numărului $A_1 = Z(X, B)$ este egală cu 0, iar „cifra“ de rang r a numărului A este egală cu 1. Astfel, s-a demonstrat că $A_1 < A$. (Dacă am fi avut, de exemplu, $q < p$, $a_r = 0, b_r = 1$, am fi demonstrat că $Z(X, A) = = B_1 < B$.) Din faptul că $Z(X, B) = A_1 < A$ rezultă că numărul X se află în şirul de numere $Z(0, B)$, $Z(1, B), ..., Z(A - 1, B)$; într-adevăr, cum s-a demonstrat mai sus, $X = Z(Z(X, B), B) = Z(A_1, B)$.

Cu aceasta se încheie demonstraţia că numărul pătratului situat la intersecţia rîndului $A + 1$ cu coloana $B + 1$ este egal cu $Z(A, B)$ Mai rămîne să observăm că 999 = „1111100111“ şi 99 = „1100011“ pentru a găsi numărul corespunzător pătratului situat la intersecţia dintre rîndul al 1 000-lea şi coloana a 100-a: acest număr este egal cu $Z(999,99)$ = „1110000100“ = 900.

128. Presupunem că între cele trei grămezi se află respectiv a, b şi c chibrituri. Vom scrie numerele a, b şi c în sistemul de numeraţie în baza doi:

$$a = a_0 2^m + a_1 2^{m-1} + a_2 2^{m-2} + ... + a_{m-1} 2 + a_m;$$

$$b = b_0 2^m + b_1 2^{m-1} + b_2 2^{m-2} + ... + b_{m-1} 2 + b_m,$$

$$c = c_0 2^m + c_1 2^{m-1} + c_2 2^{m-2} + ... + c_{m-1} 2 + c_m,$$

unde toate „cifrele“ $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_m, b_m, c_m$ sînt egale sau cu 0 sau cu 1 (aici scriem acelaşi număr de „cifre“ la toate numerele a, b şi c, deoarece putem totdeauna adăuga unul sau mai multe zerouri la începutul numerelor formate din mai puţine „cifre“ decît celelalte; astfel, presupunem că din „primele cifre“ a_0, b_0 şi c_0 cel puţin una, însă nu neapărat toate, este egală cu 1). Jucătorul, care execută o anumită mişcare, poate înlocui unul dintre numerele a, b şi c cu orice număr mai mic. Să presupunem, de exemplu, că el a luat un număr oarecare de chibrituri din prima grămadă; în acest caz, el va modifica neapărat cel puţin una dintre „cifrele“ $a_0, a_1, ... a_m$. Să observăm că orice modificare a unei „cifre“ din reprezentare în baza doi a unui număr va schimba neapărat paritatea acestei „cifre“ (deoarece singurele modificări posibile sînt înlocuirea lui 1 cu 0 sau a lui 0 cu 1). Deci, jucătorul, luînd un număr de chibrituri din prima grămadă va modifica neapărat paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele“ $a_0, a_1, ..., a_m$. La fel, luînd un număr de chibrituri din a doua grămadă, el va modifica paritatea cel puţin a uneia dintre „cifrele“ $b_0, b_1, ..., b_m$ şi, luînd chibrituri din a treia grămadă, el va modifica paritatea a cel puţin a uneia dintre „cifrele“ $c_0, c_1, ..., c_m$.

De aici rezultă că dacă în condițiile inițiale cel puțin una dintre sumele „cifrelor“ de un anumit rang

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \quad a_2 + b_2 + c_2, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

a fost impară, primul jucător poate cîștiga totdeauna. Într-adevăr, să presupunem că prima sumă impară este $a_k + b_k + c_k$. Rezultă că cel puțin una dintre „cifrele“ a_k, b_k și c_k este egală cu 1; pentru precizare, vom considera că $a_k = 1$. Primul jucător poate atunci, luînd un număr oarecare de chibrituri din prima grămadă, să obțină ca „cifrele“ $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ să nu se modifice, „cifra“ a_k să devină egală cu 0, iar „cifrele $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m$ să ia valori convenabile (deoarece toate numerele care verifică aceste condiții sînt mai mici decît a și, deci, pot fi obținute prin scăderea unui anumit număr din a). În particular, jucătorul poate obține și ca toate sumele

$$a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1}\ , \ a_{k+2} + b_{k+2} + c_{k+2}, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

să devină pare. Prin mișcarea următoare al doilea jucător va modifica desigur paritatea cel puțin a uneia dintre „cifrele“ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sau $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sau $c_0, c_1, \ldots, c_m$ și deci va aduce iarăși jocul la o situație în care cel puțin una dintre sumele

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

este impară. Primul jucător poate face din nou ca toate aceste sume să devină pare; atunci al doilea va fi iarăși nevoit să facă impară cel puțin una dintre aceste sume etc. Numărul de chibrituri în toate cele trei grămezi se va micșora tot timpul; deci, la un moment dat, vor fi luate toate chibriturile. Însă, deoarece după fiecare mișcare a celui de-al doilea, cel puțin una dintre sumele

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

va rămîne impară, iar după fiecare mișcare a celui dintîi toate aceste sume vor deveni pare, este clar că nu vor mai rămîne chibrituri (adică a, b și c vor deveni egale cu 0, 0 și 0) după mișcarea primului.

Dacă în condițiile inițiale toate sumele

$$a_0 + b_0 + c_0, \quad a_1 + b_1 + c_1, \ldots, a_m + b_m + c_m$$

sînt pare, situația nu este convenabilă pentru cel care începe jocul; este clar că, dacă al doilea nu va face nici o greșeală, primul jucător trebuie să piardă.

Observație. Să observăm că jocul prezintă mai multe avantaje pentru cel care începe: situațiile în care el pierde sînt, evident, rare, într-un anumit sens (ele sînt mult mai puține decît situațiile de cîștig, mai ales dacă numerele a, b și c sînt mari), așa că într-un joc corect și la o alegere întîmplătoare a numerelor a, b și c primul jucător va cîștiga mult mai des decît va pierde.

Vom observa că toate raționamentele date aici nu depind de faptul că numărul grămezilor este egal cu 3: atît problema în sine cît și soluția dată aici își păstrează în întregime sensul, oricare ar fi numărul grămezilor.

În loc de a utiliza în rezolvarea acestei probleme sistemul de numerație în baza doi, putem utiliza și sistemele de numerație în baza patru, opt etc. Vom formula, fără demonstrație, rezultatele obținute folosind sistemul de numerație în baza patru. Să presupunem că numerele a, b și c sînt scrise în sistemul de numerație în baza patru

$$a = a_0^* 4^m + a_1^* 4^{m-1} + \ldots + a_{m-1}^* 4 + a_m^*,$$

$$b = b_0^* 4^m + b_1^* 4^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^* 4 + b_m^*,$$

$$c = c_0^* 4^m + c_1^* 4^{m-1} + \ldots + c_{m-1}^* 4 + c_m^*.$$

În acest caz, situația inițială este de pierdere pentru cel care începe jocul, dacă toate grupurile de trei „cifre"

$$(a_0^*, b_0^*, c_0^*), (a_1^*, b_1^*, c_1^*), \ldots, (a_m^*, b_m^*, c_m^*)$$

(aici „cifrele" pot lua valorile 0, 1, 2 și 3) au forma (0, 0, 0) (0, 1, 1), (0,2, 2), (0, 3, 3) sau (1, 1, 3). Dacă acestea nu se întîmplă, primul jucător poate să cîștige; pentru aceasta el trebuie doar să observe ca, după fiecare mișcare a sa, grupurile de trei „cifre" considerate să fie de forma indicată.

129. Să presupunem că numărul de chibrituri în cele două grămezi este egal respectiv cu a și b. În loc de a căuta toate situațiile în care primul jucător cîștigă, vom determina toate situațiile cu care acesta poate pierde: concluzia trasă din problema precedentă arată că aceste situații sînt mult mai puține decît cele de cîștig pentru primul jucător și, deci, vor fi mult mai simplu de găsit.

Prima situație de pierdere este ușor de găsit — aceasta va fi situația determinată de numerele $a = 1$, $b = 2$; în acest caz, după fiecare mișcare a primului jucător, adversarul său prin mișcarea următoare termină jocul cu cîștig. Toate celelalte perechi a, b, în care unul din numere este egal cu 1 sau 2 sau pentru care $b - a = 1$, sînt cîștigătoare pentru cel ce începe jocul: acesta poate, în acest caz, printr-o mișcare să aducă jocul la situația 1, 2.

Următoarea pereche de pierdere este perechea 3, 5; aici, după fiecare mișcare a primului jucător, adversarul său sau cîștigă imediat sau aduce jocul la situația 1, 2. Deci toate celelalte situații pentru a, b, unde unul din numere este egal cu 3 sau 5 sau $b - a = 2$, sînt cîștigătoare pentru cel ce începe jocul.

La fel se găsește următoarea pereche de pierdere pentru primul jucător, anume perechea 4, 7; după aceea vin perechea 6, 10; perechea 8, 13; perechea 9, 15 etc. Acest tabel de perechi de pierdere pentru primul jucător poate fi continuat destul de departe. Nu este însă ușor să se obțină legea generală din acest tabel. Pentru găsirea unei astfel de legi, vom utiliza aici

„un sistem de numerație generalizat“ special și foarte original, anume descompunerea numerelor după termenii șirului lui Fibonacci.

Definiția sistemului de numerație al lui Fibonacci este dată în indicațiile la problema de față. Din egalitatea $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ rezultă că în acest sistem de numerație:

1° toate „cifrele“ q_k ale unui număr oarecare a sînt egale cu 1 sau 0 (ca și în sistemul de numerație în baza doi deoarece aici $2u_k > u_{k+1}$ pentru orice k și, deci, restul a_k al împărțirii lui u_{k+1} prin u_k este mai mic decît 2;

2° dacă „cifra“ q_k este egală cu 1, restul corespunzător r_{n-k+1} este mai mic decît

$u_{k-1}(r_{n-k} = u_k + r_{n-k+1},\ r_{n-k} < u_{k+1},\ r_{n-k+1} = r_{n-k} - u_k < u_{k+1} - u_k = u_{k-1})$

și, deci, „cifra“ q_{k-1}, egală cu restul împărțirii lui r_{n-k+1} prin u_{k-1}, este zero.

Astfel, orice număr întreg N se scrie în mod unic sub forma

$$N = q_n u_n + q_{n-1}u_{n-1} + q_{n-2}u_{n-2} + \dots + q_1 u_1$$

(descompunerea numărului N în sistemul de numerație al lui Fibonacci), unde toate „cifrele“ q_k sînt egale sau cu 1 sau cu 0 și unde între fiecare două unități stă cel puțin un zero. Descompunerea numărului N în sistemul de numerație al lui Fibonacci o vom scrie sub forma

$$N = „q_n q_{n-1} q_{n-2} \dots q_1“.$$

Astfel,

$1 = u_1 =$ „1“, $2 = u_2 =$ „10“, $3 = u_3 =$ „100“, $4 = u_3 + u_1 = 101$, $5 = u_4 =$ = „1 000“, $6 = u_4 + u_1 =$ „1 001“, $7 = u_4 + u_2 = 1\,010$“, $8 = u_5 =$ „10 000“ $9 = u_5 + u_1 =$ „10 001“, $10 = u_5 + u_2 =$ „10 010“, $11 = u_5 + u_3 =$ „10 100“, $12 = u_5 + u_3 + u_1 =$ „10 101“, ...

Vom scrie acum în sistemul de numerație al lui Fibonacci perechile a, b de pierdere pentru primul jucător, găsite mai sus:

1) „1“, „10“; 4) „1 001“, „10 010“;
2) „100“, „1 000“; 5) „10 000“, „100 000“;
3) „101“, „1 010“; 6) „10 001“, „100 010“, ...

Aici se observă ușor legea generală: în toate perechile scrise, primul număr se termină cu un număr par de zerouri (amintim că 0 este un număr par), iar al doilea se obține din primul prin adăugarea la sfîrșit a încă unui zero (și, deci, se termină cu un număr impar de zerouri).

Vom numi **p e r e c h e d i s t i n s ă** o pereche de numere pentru care în sistemul de numerație al lui Fibonacci cel mai mic dintre aceste numere se termină cu un număr par de zerouri, iar cel mai mare se obține din cel mai mic prin adăugarea a încă unui zero la sfîrșit.

Să observăm că din însăși definiția perechilor distinse rezultă că **f i e c a r e** număr întreg pozitiv d intră într-o pereche distinsă (și numai în una singură): dacă în sistemul de numerație al lui Fibonacci d se termină cu un număr par de zerouri, atunci al doilea număr din aceeași pereche se obține din d prin adăugarea unui zero la sfîrșit, iar dacă d se termină în sistemul de numerație al lui Fibonacci cu un număr impar de zerouri, al doilea număr se obține din d prin suprimarea ultimului zero.

Să considerăm șirul diferențelor $m - n$ ale numerelor din perechile distinse m, n $(m > n)$. Vom arăta că și în acest șir de numere intră **o r i c e** număr întreg pozitiv d o dată și numai o singură dată. Într-adevăr, dacă

$$d = „p_l p_{l-1} \dots p_1" = p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_1 u_1$$

se termină cu un număr **i m p a r** de zerouri, atunci pentru perechea distinsă

$$\left.\begin{aligned} n &= „p_l p_{l-1} \dots p_1 0" = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l + \dots + p_1 u_2 \\ m &= „p_l p_{l-1} \dots p_1 00" = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \dots + p_1 u_3 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

avem

$$\begin{aligned} m - n &= p_l(u_{l+2} - u_{l+1}) + p_{l-1}(u_{l+1} - u_l) + \dots + p_1(u_3 - u_2) = \\ &= p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_1 u_1 = d. \end{aligned}$$

Dacă însă $p_1 = p_2 = \dots = p_{2m} = 0$, $p_{2m+1} = 1$, adică numărul d se termină cu un număr **p a r** de zerouri, atunci pentru perechea distinsă

$$\left.\begin{aligned} n &= „p_l p_{l-1} \dots p_{2m+2} \underbrace{0101 \dots 01}_{01 \text{ de } m+1 \text{ ori}}" = p_l u_{l+1} + p_{l-1} u_l + \dots \\ &\qquad \dots + p_{2m+2} u_{2m+3} + (u_{2m+1} + \dots + u_3 + u_1) \\ m &= „p_l p_{l-1} \dots p_{2m+2} \underbrace{0101 \dots 010}_{01 \text{ de } m+1 \text{ ori}}" = p_l u_{l+2} + p_{l-1} u_{l+1} + \dots \\ &\qquad \dots + p_{2m+2} u_{2m+4} + (u_{2m+2} + \dots + u_4 + u_2) \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

avem

$$\begin{aligned} m - n &= p_l(u_{l+2} - u_{l+1}) + p_{l-1}(u_{l+1} - u_l) + \dots + p_{2m+2}(u_{2m+4} - u_{2m+3}) + \\ &\quad + (u_{2m+2} - u_{2m+1}) + \dots + (u_4 - u_3) + (u_2 - u_1) = \\ &= p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_{2m+2} u_{2m+2} + u_{2m} + \dots + u_2 + u_0 = \\ &= p_l u_l + p_{l-1} u_{l-1} + \dots + p_{2m+2} u_{2m+2} + u_{2m+1} = d, \end{aligned}$$

deoarece

$$u_{2m} + \dots + u_4 + u_2 + u_0 = u_{2m} + \dots + u_4 + (u_2 + u_1) = u_{2m} + \dots$$

$$\dots + u_6 + (u_4 + u_3) = u_{2m} + \dots + (u_6 + u_5) = \dots = (u_{2m} + u_{2m-1}) = u_{2m+1}.$$

Reciproc, prin perechile distinse (*) sau (**) numărul $m - n = d = $ „$p_l p_{l-1} p_1$" se determină în mod unic [formulele (*) corespund cazului, în care n se termină cu zero, iar formulele (**) corespund cazului, în care n se termină cu unu şi în scrierea acestui număr două zerouri figurează unul după altul pentru prima oară pe locurile[1] $2m + 2$ şi $2m + 3$]; în acest caz dacă pentru două perechi distinse (m, n) şi (m_1, n_1) avem $n_1 > n$ (şi deci şi $m_1 > m$), atunci

$$d_1 = m_1 - n_1 > m - n = d.$$

Vom demonstra, acum, că dacă perechea iniţială a, b nu este distinsă, atunci primul jucător poate cîştiga, iar dacă ea este distinsă, atunci cel ce începe jocul, la un joc corect al adversarului, trebuie să piardă. Demonstraţia acestui fapt o vom da în două etape.

A. Vom demonstra că, dacă perechea iniţială a, b $(a < b)$ nu este distinsă, primul jucător poate să cîştige imediat (adică printr-o mişcare) sau poate aduce jocul la o situaţie în care perechea a, b devine distinsă.

Dacă numerele a şi b sînt egale sau unul dintre ele este egal cu zero, primul jucător poate cîştiga dintr-o dată luînd toate chibriturile. În caz contrar, vom examina perechea distinsă a, p şi perechea distinsă m, n, care este astfel, încît $m - n = b - a$ (perechile a, p şi m, n există, conform celor demonstrate mai sus). Dacă $p < b$, atunci putem, cu o singură mişcare, să trecem de la perechea a, b la perechea distinsă a, p. Dacă însă $p > b$, atunci

$$p - a > b - a = m - n;$$

deci perechea distinsă p, a „este mai mare" decît perechea m, n, adică $p > m, a > n$. Însă, deoarece $b - a = m - n$ şi $a > n$, atunci $b > m, n = a - (a - n)$, $b = b - (b - m) = b - (a - n)$ şi, deci, putem printr-o mişcare să trecem de la perechea a, b la perechea distinsă m, n.

B. Vom demonstra că, dacă în situaţia iniţială perechea a, b este distinsă, atunci după orice mişcare a primului jucător ea va înceta să mai fie distinsă.

Într-adevăr, dacă primul jucător va lua un număr oarecare de chibrituri numai dintr-una din cele două grămezi, perechea va înceta de a mai fi

[1] $p_{2m+2} = 0$, deoarece, în caz contrar, în scrierea numărului d în sistemul de numeraţie al lui Fibonacci „cifra 1" ar fi fost întîlnită de două ori la rînd, ceea ce nu este posibil (v. proprietatea 2° la p. 309).

distinsă, deoarece unul şi acelaşi număr nu poate face parte din două perechi distinse diferite. Dacă primul jucător va lua un număr egal de chibrituri din fiecare grămadă, diferenţa $b - a$ nu se va modifica şi perechea va înceta de a mai fi distinsă, deoarece în nici un grup de două perechi distinse diferenţa numerelor nu poate fi aceeaşi.

Acum este clar că, dacă a, b nu este o pereche distinsă primul jucător poate să cîştige totdeauna, iar dacă a, b este o pereche distinsă, el trebuie să piardă (bineînţeles, dacă adversarul lui nu va comite o greşeală). Într-adevăr, dacă a, b nu este o pereche distinsă, cel ce începe jocul poate sau să cîştige imediat sau să obţină ca perechea a, b să devină distinsă; după aceasta, adversarul lui va trebui din nou să creeze situaţia în care perecehea a, b nu este distinsă (însă cu numere a, b mai mici decît la început), iar primul jucător poate din nou face ca perecehea a, b să fie distinsă etc. Deoarece numerele a, b se micşorează tot timpul, primul jucător sau va cîştiga înainte de a face acest lucru sau va aduce jocul la cea mai mică pereche distinsă 1, 2, după care el cîştigă cu o singură mişcare, oricare ar fi mişcarea adversarului. Dacă însă perechea a, b este distinsă, primul jucător este nevoit să aducă jocul în situaţia în care a, b nu este o pereche distinsă; după aceea, adversarul lui poate să urmeze tactica descrisă şi să cîştige. Deoarece raţionamentul conţine şi indicaţii asupra metodei corecte a jocului, cu aceasta problema este complet rezolvată.

Observaţie. Rolul fundamental în întregul raţionament l-a avut următoarea proprietate a numerelor, care formează perechea distinsă: orice număr întreg pozitiv 1, 2, 3,…, n,… intră o singură dată în compunerea unei perechi distinse şi apare o singură dată ca diferenţa a două numere ale unei perechi distinse. Această proprietate permite să se scrie fără dificultate perechile distinse una după alta

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n), \ldots;$$

trebuie doar să luăm numărul 1 ca a_1 şi apoi să considerăm de fiecare dată că $b_k = a_k + k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) şi că a_{k+1} este cel mai mic număr întreg pozitiv care nu figurează încă printre numerele a_1, b_1; a_2, b_2; … ; a_k, b_k:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	…
$b_n = a_n + n$	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	…

Trecerea la sistemul de numeraţie al lui Fibonacci este necesară doar pentru a constata dacă o pereche a, b dată dinainte este distinsă sau nu şi pentru a formula regulile jocului fără pierdere.

Vom mai observa că proprietatea menţionată a numerelor perechilor distinse permite, de asemenea, să se scrie cîte o formulă pentru numerele a_n, b_n (în funcţie de numărul n).

Pentru a deduce aceste formule, vom demonstra că, *dacă α și β sînt numere iraționale, legate prin relația*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

atunci orice număr întreg pozitiv se află printre numerele

$$a_n = [\alpha n],\ b_n =]\beta n],\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

și anume o singură dată (aici parantezele drepte indică partea întreagă a numărului; v. p. 10).

Pentru demonstrație, vom observa că $a_n = [\alpha n] < N$, dacă $n = 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\alpha}\right]$, și $b_n = [\beta n] < N$, dacă $n = 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{N}{\beta}\right]$; astfel, există, în total, numai

$$\left[\frac{N}{\alpha}\right] + \left[\frac{N}{\beta}\right]$$

numere a_n și b_n mai mici decît N. Însă deoarece N/α și N/β sînt numere i r a ț i o n a l e, astfel încît

$$\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = N, \quad \text{atunci} \quad \left[\frac{N}{\alpha}\right] + \left[\frac{N}{\beta}\right] = N - 1$$

(deoarece $\left[\frac{N}{\alpha}\right] = \frac{N}{\alpha} - \varepsilon_1$, $\left[\frac{N}{\beta}\right] = \frac{N}{\beta} - \varepsilon_2$, unde $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$ și, deci, numărul întreg $\left[\frac{N}{\alpha}\right] + \left[\frac{N}{\beta}\right] = \left(\frac{N}{\alpha} - \varepsilon_1\right) + \left(\frac{N}{\beta} - \varepsilon_2\right) = N - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ se află între N și $N - 2$). Deci există $N - 1$ numere întregi a_n și b_n mai mici decît N, adică 0 astfel de numere mai mici decît 1; un singur astfel de număr mai mic decît 2 (numărul 1); două astfel de numere mai mici decît 3 (numerele 1 și 2); trei astfel de numere mai mici decît 4 (numerele 1, 2 și 3) etc.

Pentru a obține numerele perechilor distinse trebuie să mai avem

$$b_n - a_n = [\beta n] - [\alpha n] = n.$$

Pentru aceasta, este suficient să punem condiția ca $\beta - \alpha = 1$, $\beta = \alpha + 1$ (deoarece $[(\alpha + 1)n] - [\alpha n] = [\alpha n + n] - [\alpha n] = n$). Astfel avem

$$\beta = \alpha + 1,\ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} = 1, \text{ de unde } \alpha^2 - \alpha - 1 = 0,\ \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

și, în definitiv,

$$a_n = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} n\right], \quad b_n = \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n\right]. \qquad (*)$$

De formulele (*) este legată următoarea rezolvare interesantă a problemei noastre. Vom introduce în considerații numerele iraționale

$$\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618 \text{ și } \gamma = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0{,}382$$

și vom conveni să notăm cu $[x]$ partea întreagă și cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului x, astfel încît $x = [x] + \{x\}$, unde $[x]$ este un număr întreg, iar $0 \leqslant \{x\} < 1$.

Să presupunem că situația inițială este determinată de perechea de numere a, b, unde $b > a$. În acest caz, dacă în situația inițială $\{a\alpha\} > \gamma$ și $b = [a\alpha] + 1$, această situație este nefavorabilă pentru primul jucător; în toate celelalte cazuri, cel ce începe jocul poate să cîștige, Dacă în situația inițială $\{a\alpha\} < \gamma$, mișcarea cu care se cîștigă va fi trecerea de la perechea

a, b la perechea $a, [a\alpha] - a$. Dacă însă $\{a\alpha\} > \gamma$ și $b > [a\alpha] + 1$, mișcarea cîștigătoare este trecerea de la a, b la perechea $a, [a\alpha] + 1$, iar dacă

$$\{a\alpha\} > \gamma,\ b < [a\alpha] + 1 \text{ și } b - a = n,$$

va fi cîștigătoare trecerea de la a, b la perechea

$$[n\alpha],\ [n\alpha] + n.$$

Încercați să demonstrați singuri valabilitatea acestor reguli, folosind formulele (*) sau soluția problemei dată mai sus (în acest caz, apare foarte net legătura dintre șirul lui Fibonacci și numărul irațional $\alpha = (\sqrt{5} + 1)/2$, în legătură cu care v., de exemplu cărțile [65], [17], [47], [4].

130. Avem [v., de exemplu, problema 138, b) de mai jos]

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \ldots$$

Vom pune acum $\alpha = \arccos x$. În acest caz, $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - x^2}$ și deci

$$T_n(x) = \cos (n \arccos x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1 - x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1 - x^2)^2 - \ldots,$$

adică, într-adevăr, $T_n(x)$ este un polinom de gradul n. Desfăcînd parantezele în expresia obținută a lui $T_n(x)$, ne vom convinge că coeficientul lui x^n în acest polinom va fi egal cu

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots,$$

adică cu 2^{n-1} [v. problema 56, *a*)].

Vom determina acum rădăcinile ecuației de gradul n

$$T_n(x) = 0.$$

Deoarece $\cos \varphi = 0$ numai în cazul în care $\varphi = \dfrac{2k - 1}{2} \pi$, avem

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0,$$

dacă

$$n \arccos x = \frac{2k - 1}{2} \pi,\quad x = \cos \frac{2k - 1}{2n} \pi.$$

Dînd lui k valorile $1, 2, 3, \ldots, n$, vom găsi n rădăcini ale ecuației noastre

$$x_1 = \cos \frac{1}{2n} \pi,\quad x_2 = \cos \frac{3}{2n} \pi, \ldots,\ x_n = \cos \frac{2n - 1}{2n} \pi.$$

Mai departe este evident că, pentru x cuprins între -1 și $+1$, avem $-1 \leqslant \cos (n \arccos x) \leqslant +1$ (deoarece $-1 \leqslant \cos \varphi \leqslant +1$ pentru orice φ). Nu este greu de stabilit valorile lui x pentru care polinomul $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

ia valorile $+1$ şi -1. Într-adevăr, $\cos \varphi = \pm 1$, numai în cazul $\varphi = k\pi$; de aici obţinem că $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \pm 1$, dacă

$$n \arccos x = k\pi, \quad x = \cos \frac{k\pi}{n}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} &T_n(\cos 0) = T(1) = 1, \quad T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) = -1, \\ &T_n\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right) = 1, \quad T_n\left(\cos \frac{3\pi}{n}\right) = -1, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Este important să observăm că, pe segmentul de la -1 la $+1$, cea mai mare şi cea mai mică valoare ale polinomului $T_n(x)$ alternează, adică în punctul $x = 1$ valoarea acestui polinom este egală cu $+1$, apoi descreşte pînă la -1, $\left(\text{în punctul } x = \cos \frac{\pi}{n}\right)$, apoi creşte din nou pînă la $+1$ $\left(\text{în punctul } x = \cos \frac{2\pi}{n}\right)$, apoi descreşte din nou pînă la -1 $\left(\text{punctul } x = \cos \frac{3\pi}{n}\right)$ etc. (v. fig. 129, în care sînt reprezentate primele şase polinoame ale lui Cebîşev). Pe aceasta se bazează rezolvarea problemei 132.

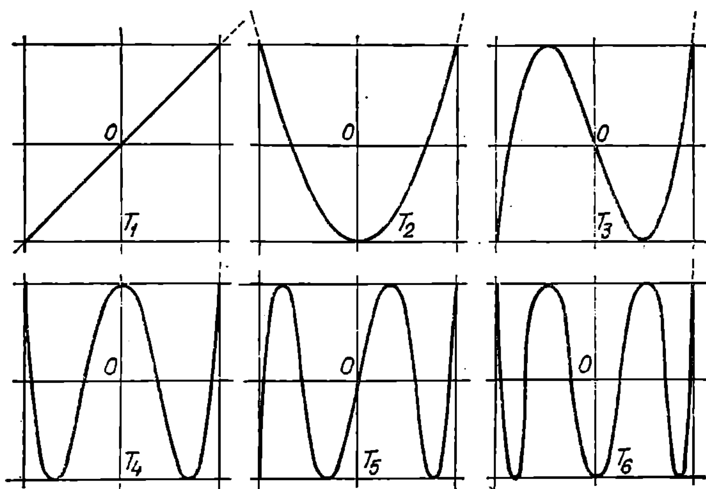


Fig. 129

131. Este uşor de văzut că polinomul

$$P(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

ia cea mai mică valoare $q - \frac{p^2}{4}$ pentru $x = -\frac{p}{2}$. Vom examina acum separat două cazuri.

1°. $\left|-\frac{p}{2}\right| \geqslant 1$ (fig. 130, *a*). Să presupunem că polinomul ia pentru $x = 1$ valoarea $P(1) = a$, iar pentru $x = -1$, valoarea $(P-1) = b$; abaterea de la zero a polinomului $P(x)$, evident, este egală cu cel mai mare dintre numerele $|a|$ şi $|b|$. Vom cerceta, acum, polinomul

$$P_1(x) = x^2 + px + q - \frac{a+b}{2} = x^2 + px + q_1;$$

pentru acest polinom

$$P_1(1) = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}; \quad P_1(-1) = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2},$$

adică $P_1(1) = -P_1(-1)$. Este uşor de văzut că abaterea de la zero a polinomului $P_1(x)$ nu este mai mare decît abaterea polinomului inițial $P(x)$ (graficul polinomului $P_1(x)$ se obține din graficul lui $P(x)$ printr-o deplasare paralelă în direcția axei OY, cu o distanță, astfel ca axa OX să fie egal depărtată de capetele curbei, corespunzătoare valorilor $x = +1$ şi $x = -1$; v. fig. 130, *a*, unde graficul polinomului $P_1(x)$ este reprezentat punctat). Astfel, abaterea lui $P(x)$ de la zero, care nu este mai mică decît abaterea lui $P_1(x)$, este egală cu

$$\frac{|P_1(1) - P_1(-1)|}{2} = \frac{|(1+p+q_1) - (1-p+q_1)|}{2} = |p|.$$

Şi deoarece am presupus că $\left|\frac{p}{2}\right| \geqslant 1$, rezultă că abaterea nu este mai mică decît 2.

2°. $\left|-\frac{p}{2}\right| < 1$ (fig. 130, *b*). Vom presupune că punctul $x = -\frac{p}{2}$ se află în jumătatea din stînga a segmentului $[-1, +1]$; $-1 < -\frac{p}{2} \leqslant 0$, $0 \leqslant \frac{p}{2} < 1$ $\left(\text{dacă ar fi } 0 \leqslant -\frac{p}{2} < 1, \text{ raţionamentul aproape că nu s-ar modifica}\right)$. În acest caz, avem, evident,

$$\left|P(1) - P\left(-\frac{p}{2}\right)\right| \geqslant \left|P(-1) - P\left(-\frac{p}{2}\right)\right|$$

(v. fig. 130, *b*). Analog cu cazul 1° vom înlocui polinomul cu un nou polinom

$$P_1(x) = x^2 + px + q_1,$$

pentru care $P_1\left(-\frac{p}{2}\right) = -P_1(1)$ [vom transporta graficul polinomului $P(x)$ paralel cu axa OY cu o distanță astfel ca axa OX să fie egal depărtată de

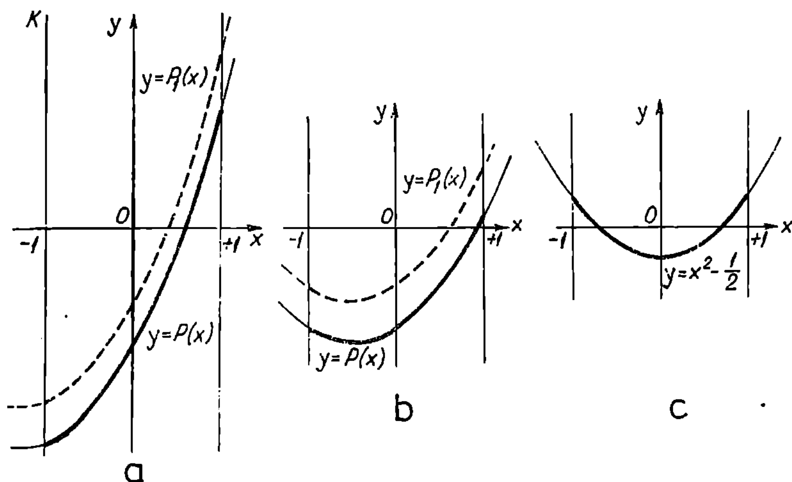


Fig. 130

punctul cel mai de jos al curbei și de capătul corespunzător lui $x = 1$; v. fig. 130, *b*]; în acest caz, abaterea polinomului se va micșora. Deci, abaterea polinomului $P(x)$, care nu este mai mică decît abaterea lui $P_1(x)$ va fi egală cu

$$\frac{\left|P_1(1) - P_1\left(-\frac{p}{2}\right)\right|}{2} = \frac{\left|(1 + p + q_1) - \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q_1\right)\right|}{2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{p^2}{4} + p + 1\right|}{2} = \frac{\left|\left(\frac{p}{2} + 1\right)^2\right|}{2}.$$

Deoarece $0 \leqslant p/2 < 1$, abaterea de la zero va avea cea mai mică valoare $1/2$ pentru $p = 0$; în acest caz, dacă $P_1(-p/2) = -P_1(1)$, avem $q_1 = -1/2$.

În sfîrșit, tragem concluzia că cea mai mică abatere de la zero pe segmentul $-1 \leqslant x \leqslant +1$ o va avea polinomul $P_0(x) = x^2 - 1/2$ (fig. 130, *c*); abaterea lui este egală cu $1/2$.

132. Vom presupune că pe segmentul $[-1, +1]$ abaterea de la zero a unui polinom de gradul n

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

e s t e m a i m i c ă decît $1/2^{n-1}$, adică pentru $-1 \leqslant x \leqslant +1$ avem

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Cu alte cuvinte, presupunem că între limitele considerate

$$P(x) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0, \quad P_n(x) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Vom arăta că aceasta este imposibil. Vom considera polinomul

$$R(x) = P(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Deoarece coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt ai polinoamelor $P_n(x)$ și $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ sînt egali cu 1, acești termeni de gradul cel mai înalt se reduc prin scădere și, deci, gradul polinomului $R(x)$ nu este mai mare decît $n - 1$.

Din formulele (*) de la rezolvarea problemei 130 rezultă că

$$R(1) = P_n(1) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(1) < 0,$$

$$R\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) > 0,$$

$$R\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right) < 0,$$

$$R\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) = P_n\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right) > 0,$$

. . . .

adică pentru $x = 1$, $\cos\frac{2\pi}{n}$, $\cos\frac{4\pi}{n}$, ... polinomul $R(x)$ este negativ, iar pentru $x = \cos\frac{\pi}{n}$, $\cos\frac{3\pi}{n}$, ... este pozitiv. Deci curba care reprezintă acest polinom este situată dedesubtul axei absciselor pentru $x = 1$, iar pentru $x = \cos\frac{\pi}{n}$ este situată deasupra axei absciselor. De aici rezultă că undeva, între $x = 1$ și $x = \cos\frac{\pi}{n}$, această curbă intersectează axa absciselor, adică undeva, între $x = 1$ și $x = \cos\frac{\pi}{n}$, se află o valoare a lui x, pentru care $R(x)$

este egal cu 0 — rădăcina ecuației $R(x) = 0$. La fel se demonstrează că ecuația $R(x) = 0$ are o rădăcină undvea între $\cos\frac{\pi}{n}$ și $\cos\frac{2\pi}{n}$, între $\cos\frac{2\pi}{n}$ și $\cos\frac{3\pi}{n}$, între $\cos\frac{3\pi}{n}$ și $\cos\frac{4\pi}{n}$, ..., în sfîrșit între $\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$ și $\cos\pi = -1$.

Astfel, tragem concluzia că ecuația $R(x) = 0$ are nu mai puțin de n rădăcini. Dar gradul acestei ecuații nu este mai mare decît $n - 1$, iar o ecuație de gradul $n - 1$ nu poate avea mai multe de $n - 1$ rădăcini[1]. Contradicția obținută arată că nu poate exista un polinom $P_n(x)$ de gradul n, a cărui abatere de la zero să fie mai mică decît $1/2^{n-1}$.

Făcînd raționamentul mai fin, putem arăta, de asemenea, că există un singur polinom $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ de gradul n cu coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1, a cărui abatere de la zero în segmentul de la -1 la $+1$ este egală cu $\frac{1}{2^{n-1}}$. Într-adevăr, fie $P_n(x)$ un alt polinom de același fel. Vom considera, ca și mai înainte, diferența

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

care este un polinom de grad nu mai mare decît $n - 1$. În punctele $x = 1$, $\cos\frac{2\pi}{n}$, $\cos\frac{4\pi}{n}$, ... valorile lui $R(x)$ în orice caz nu sînt pozitive, iar în punctele $\cos\frac{\pi}{n}$, $\cos\frac{3\pi}{n}$, $\cos\frac{5\pi}{n}$, ... nu sînt negative. De aici rezultă că în fiecare dintre intervale

$$\left(1, \cos\frac{\pi}{n}\right), \left(\cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}\right), \left(\cos\frac{2\pi}{n}, \cos\frac{3\pi}{n}\right), \ldots, \left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}, -1\right)$$

(poate la extremitățile acestor intervale!) ecuația $R(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină. Vom arăta că, în acest caz, numărul total al rădăcinilor ecuației $R(x) = 0$ nu este mai mic decît n.

Într-adevăr, deoarece numărul intervalelor considerate este egal cu n, numărul rădăcinilor ar putea fi mai mic decît n numai în cazul în care în două intervale vecine (inclusiv extremitățile lor) există o singură rădăcină (care în acest caz, evident, trebuie să coincidă cu extremitatea comună a acestor intervale) sau în trei intervale vecine (inclusiv extremitățile lor) există numai două rădăcini (care trebuie să coincidă cu extremitățile comune ale intervalelor) sau în patru intervale vecine (inclusiv extremitățile lor) există numai trei rădăcini (care coincid cu extremitățile comune ale intervalelor) etc.

[1] Dacă ecuația $R(x) = 0$ de gradul $n-1$ are n rădăcini: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, atunci, conform teoremei lui Bézout, polinomul $R(x)$ de gradul $n-1$ trebuie să se dividă cu polinomul $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ de gradul n. Însă, aceasta, evident, nu este posibil.

Să cercetăm primul caz. Să presupunem, de exemplu, că în intervalul de la 1 la $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ (împreună cu extremitățile) ecuația $R(x) = 0$ are o singură rădăcină $x = \cos\frac{\pi}{n}$. În punctele $x = 1$ și $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ valorile lui

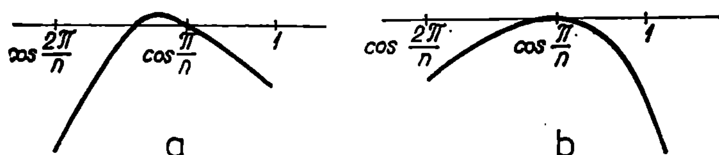


Fig. 131

$R(x)$, după cum știm, nu sînt pozitive; deoarece presupunem că ele nu sînt egale cu zero, aceste valori trebuie să fie negative. Dacă curba $y = R(x)$ ar intersecta axa Ox în punctul $x = \cos\frac{\pi}{n}$ (fig. 131, *a*), atunci, din faptul că în ambele puncte $x = 1$ și $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ această curbă este situată sub axa Ox, ar rezulta că ea intersectează axa Ox încă într-un punct diferit de $x = \cos\frac{\pi}{n}$; însă aceasta contrazice presupunerea noastră că în afară de $x = \cos\frac{\pi}{n}$ ecuația $R(x) = 0$ nu are rădăcini între $x = 1$ și $x = \cos\frac{2\pi}{n}$. Deci în punctul $x = \cos\frac{\pi}{n}$ curba $y = R(x)$ este tangentă la axa Ox (fig. 131, *b*). Însă, în acest caz, cum nu este greu de văzut, rădăcina $x = \cos\frac{\pi}{n}$ a ecuației $R(x) = 0$ trebuie să fie dublă. Într-adevăr, vom presupune că această rădăcină nu este dublă. În acest caz, ecuația $R(x) = 0$ poate fi scrisă sub forma

$$\left(x - \cos\frac{\pi}{n}\right) R_1(x) = 0,$$

unde ecuația $R_1(x) = 0$ nu are rădăcina $x = \cos\frac{\pi}{n}$. Dar aceasta înseamnă că în punctul $x = \cos\frac{\pi}{n}$ polinomul $R_1(x)$ nu este egal cu zero și, deci, în vecinătatea acestui punct el nu schimbă semnul. Or polinomul $R(x) = \left(x - \cos\frac{\pi}{n}\right)R_1(x)$ schimbă semnul în punctul $x = \cos\frac{\pi}{n}$ (polinomul $R_1(x)$ își păstrează

semnul, iar binomul $x - \cos\frac{\pi}{n}$ la trecerea prin valoarea $x = \cos\frac{\pi}{n}$ schimbă semnul) şi, deci, graficul acestui polinom intersectează axa Ox în punctul $x = \cos\frac{\pi}{n}$ şi nu este tangent la aceasta. Astfel, dacă pentru $x = 1$ şi $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ polinomul $R(x)$ este negativ, iar pentru $x = \cos\frac{\pi}{n}$ nu este negativ, atunci între $x = 1$ şi $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ ecuaţia $R(x) = 0$ are neapărat nu mai puţin de două rădăcini (diferite sau confundate!).

La fel se arată că nu sînt posibile nici celelalte cazuri menţionate mai sus. Să presupunem, de exemplu, că ecuaţia $R(x) = 0$ are numai două rădăcini: $x = \cos\frac{\pi}{n}$ şi $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ în intervalul de la $x = 1$ la $x = \cos\frac{3\pi}{n}$ (împreună cu extremităţile). În punctul $x = 1$, polinomul $R(x)$ trebuie să fie negativ, iar în punctul $x = \cos\frac{3\pi}{n}$ trebuie să fie pozitiv. Însă dacă curba $y = R(x)$ ar intersecta axa Ox (fig. 132, *a*) în ambele puncte $x = \cos\frac{\pi}{n}$ şi $x = \cos\frac{3\pi}{n}$, ea ar fi trebuit să intersecteze axa Ox încă într-un punct între $x = 1$ şi $x = \cos\frac{3\pi}{n}$. Dacă însă această curbă nu intersectează axa Ox în alte puncte, atunci ea trebuie să fie tangentă la axa Ox în unul din punctele $x = \cos\frac{\pi}{n}$ sau $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ (fig. 132, *b*), adică una din rădăcinile $x = \cos\frac{\pi}{n}$ sau $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ ale ecuaţiei $R(x) = 0$ trebuie să fie dublă. Astfel, între $x = 1$ şi $x = \cos\frac{3\pi}{n}$ ecuaţia $R(x) = 0$ trebuie să aibă nu mai puţin de trei rădăcini (diferite sau confundate!).

Deci, în definitiv, obţinem că ecuaţia $R(x) = 0$ de grad nu mai mare decît $n - 1$ are nu mai puţin de n rădăcini. Deoarece acest lucru nu este posibil, înseamnă că nu poate să existe un polinom de gradul n cu coeficientul dominant egal cu 1, diferit de $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$, a cărui abatere de la zero în intervalul de la -1 la $+1$ să fie egală cu $1/2^{n-1}$.

133. Fie

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

un polinom de gradul n, a cărui abatere de la zero în intervalul de la -2 la $+2$ este egală cu δ. Vom considera polinomul

$$P_1(x) = P(2x) = (2x)^n + a_1(2x)^{n-1} + a_2(2x)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(2x) + a_n,$$

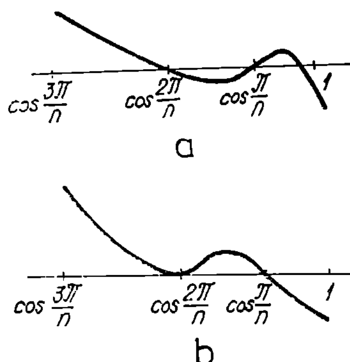


Fig. 132

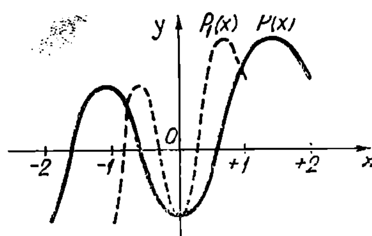


Fig. 133

al cărui grafic se obține din graficul polinomului $P(x)$ contractîndu-l de două ori pe axa Ox (fig. 133). Abaterea polinomului $P_1(x)$ de la zero în intervalul $[-1, +1]$ este egală, evident, cu abaterea δ a polinomului $P(x)$ în intervalul $[-2, +2]$. Acum vom considera polinomul

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{2^n} P_1(x) = x^n + \frac{1}{2} a_1 x^{n-1} + \frac{1}{4} a_2 x^{n-2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} a_{n-1} x + \frac{1}{2^n} a_n$$

cu coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1. Abaterea lui de la zero este egală cu $\bar{\delta} = \delta/2^n$. Însă din rezultatul problemei 132 rezultă că $\bar{\delta}$ nu poate fi mai mic decît $1/2^{n-1}$, iar $\bar{\delta} = 1/2^{n-1}$ numai în cazul în care $\bar{P}(x)$ este $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$. Vedem astfel, că $\delta = 2^n\bar{\delta}$ nu poate fi mai mic decît 2, iar $\delta = 2$ numai în cazul

$$P_1(x) = P(2x) = 2^n \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = 2T_n(x),$$

$$P(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(n \arccos \frac{x}{2}\right)$$

(n aici poate fi o a r e c a r e).

O b s e r v a ț i e. La fel se demonstrează că abaterea de la zero a polinomului

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

de gradul n cu coeficientul dominant egal cu 1, în intervalul $[a, b]$ (a și b sînt numere oarecare, $a < b$), nu poate să fie mai mare decît $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ și este egală cu $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ numai în cazul

$$P_n(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right] = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a)-1\right].$$

De aici rezultă, în particular, că pentru ca să existe polinoame cu coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1, care în tot intervalul dat să ia valori oricît de mici (mai mici decît un număr oarecare dat înainte; de exemplu, mai mici decît 0,001 sau mai mici decît 0,000001), este necesar (și suficient) ca lungimea intervalului să fie mai mică decît patru.

134. Această problemă este asemănătoare ca enunț cu cea precedentă, însă se rezolvă cu totul altfel. Vom nota cu $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$ valorile pe care un polinom oarecare

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

le ia respectiv în punctele $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ și vom considera polinomul

$$Q(x) = P(0)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(0-1)(0-2)(0-3)\dots(0-n)} + P(1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(1-0)(1-2)(1-3)\dots(1-n)} +$$

$$+P(2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\dots(x-n)}{(2-0)(2-1)(2-3)\dots(2-n)} + \dots + P(n)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\dots[x-(n-1)]}{(n-0)(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]} =$$

$$= P(0)\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(-1)^n \cdot n!} + P(1)\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(-1)^{n-1}\cdot 1!\cdot(n-1)!} +$$

$$+P(2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\dots(x-n)}{(-1)^{n-1}\cdot 2!\cdot(n-2)!} + \dots + P(n)\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\dots[x-(n-1)]}{n!}.$$

Pentru $x = 0, 1, 2, \dots, n$ polinomul $Q(x)$ ia aceleași valori $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$ ca și $P(x)$. De aici rezultă că $Q(x)$ coincide cu $P(x)$ (în caz contrar, diferența $Q(x) - P(x)$, care este un polinom de grad nu mai mare decît n, s-ar anula în $n+1$ puncte). În particular, coeficientul lui x^n în polinomul $Q(x)$ este egal cu 1:

$$\frac{P(0)}{(-1)^n \cdot n!} + \frac{P(1)}{(-1)^{n-1}\cdot 1!\cdot(n-1)!} + \frac{P(2)}{(-1)^{n-2}\cdot 2!\cdot(n-2)!} +$$

$$+ \frac{P(3)}{(-1)^{n-3}\cdot 3!\cdot(n-3)!} + \dots + \frac{P(n)}{n!} = 1.$$

Vom nota acum cu δ abaterea de la zero a polinomului $P(x)$ pentru sistemul de puncte $x = 0, 1, 2, \dots, n$. În acest caz, nici un $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ...

..., $P(n)$ nu este mai mare în valoare absolută decît δ şi, deci, partea dreaptă a ultimei egalități nu este mai mare decît suma

$$\delta\cdot\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right]=\delta\cdot\frac{2n}{n!},$$

deoarece

$$\frac{1}{n!}+\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{2!(n-2)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\ldots+\frac{1}{n!}=$$

$$=\frac{1}{n!}\left[1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+1\right]=\frac{2^n}{n!}$$

[v. problema 55,a)]. Deci,

$$\delta\cdot\frac{2^n}{n!}\geqslant 1,\quad \delta\geqslant\frac{n!}{2^n}.$$

Din soluția problemei, este, de asemenea, uşor de văzut că **există un singur** polinom de gradul n cu coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1, a cărui abatere de la zero pentru sistemul de puncte $x = 0$, $1, 2, \ldots, n$ este egală cu $n!/2^n$ şi anume polinomul

$$P(x)=\frac{n!}{2^n}\left\{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!}+\frac{x(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1!\cdot(n-1)!}+\right.$$

$$\left.+\frac{x(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{n!}\right\},$$

pentru care

$$P(n)=-P(n-1)=P(n-2)=-P(n-3)=\ldots=(-1)^n P(0)=n!/2^n.$$

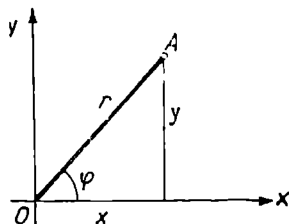


Fig. 134

135. Vom utiliza reprezentarea geometrică a numerelor complexe; numărul complex

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

se reprezintă ca un punct cu coordonatele carteziene rectangulare x, y sau cu coordonatele polare r, φ (fig. 134). Dacă punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ le corespund numerele complexe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, iar punctului M — un număr complex variabil z, atunci

$$MA_1 = |z-\alpha_1|,\quad MA_2 = |z-\alpha_2|, \ldots, MA_n = |z-\alpha_n|.$$

Însă, deoarece la înmulțirea numerelor complexe modulele lor se înmulțesc, avem

$$MA_1\cdot MA_2\ldots MA_n = |(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)| =$$

$$= |z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n|,$$

unde $z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = P(z)$ este polinomul $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ cu coeficienții și rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, în general, complexe.

Acum nu este greu de văzut legătura dintre problema considerată și problema 132 referitoare la polinoamele cu cea mai mică abatere de la zero. Vom alege în plan un sistem de coordonate astfel, încît intervalul nostru de lungime l să fie intervalul de la $-l/2$ la $+l/2$ al axei numerelor reale. În acest caz, problema noastră poate fi formulată astfel: care este valoarea cea mai mică pe care poate să o ia abaterea de la zero în intervalul de la $-l/2$ la $+ l/2$ pentru polinomul $P(z)$ de gradul n cu coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1 și cu coeficienții, în general, complecși (aici numim, ca și mai înainte, a b a t e r e a d e l a z e r o a p o l i n o m u l u i, valoarea cea mai mare a valorii absolute $|P(z)|$ a polinomului; numai că, spre deosebire de polinomul cu coeficienți reali, abaterea polinomului cu coeficienți complecși nu poate fi reprezentată în figură, deoarece un astfel de polinom ia, în general, valori complexe și de aceea nu are un grafic).

Vom scrie polinomul considerat sub forma

$$P(z) = P_1(z) + iP_2(z);$$

aici coeficienții polinomului $P_1(z)$ sînt părțile reale ale coeficienților lui $P(z)$, iar coeficienții polinomului $iP_2(z)$ sînt părțile imaginare ale coeficienților lui $P(z)$. De aici rezultă că $P_1(z)$ este un polinom cu coeficineți reali de gradul n și coeficientul termenului de gradul cel mai înalt egal cu 1; $P_2(z)$ este un polinom cu coeficienți reali de grad nu mai mare decît $n - 1$. Mai departe, avem

$$|P(z)| = \sqrt{P_1(z)^2 + P_2(z)^2} \geqslant |P_1(z)|;$$

astfel, valoarea absolută a lui $P(z)$ nu este mai mare decît valoarea absolută a lui $P_1(z)$ și, deci, abaterea de la zero a polinomului $P(z)$ în intervalul de la $-l/2$ la $+l/2$ nu este mai mare decît abaterea de la zero a polinomului $P_1(z)$ cu coeficienți reali în același interval. Însă conform rezultatului problemei 133 (v. în particular observația la soluția acestei probleme) abaterea de la zero a polinomului $P_1(z)$ în intervalul de la $-l/2$ la $l/2$ nu este mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. De aici rezultă că și abaterea de la zero a polinomului $P(z)$ cu coeficienți complecși nu este mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$.

Mai departe, pentru ca abaterea de la zero a polinomului $P(z)$ în intervalul de la $-l/2$ la $+l/2$ să fie egală cu $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, este necesar ca polinomul $P_1(z)$ să coincidă cu polinomul $2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right)$, iar polinomul $P_2(z)$ să fie egal cu zero în toate acele puncte, în care valoarea absolută a polinomului $P_1(z) = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right)$ ia cea mai mare valoare, anume $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Însă există

$n+1$ astfel de puncte (v. soluţiile problemelor 130, 132); deci polinomul $P_2(z)$ cu coeficienţi reali de grad nu mai mare decît $n-1$ trebuie să devină egal cu zero în $n+1$ puncte, de unde rezultă că acest polinom

$\frac{l}{2}\cos\frac{11\pi}{12}$ $\frac{l}{2}\cos\frac{9\pi}{12}$ $\frac{l}{2}\cos\frac{7\pi}{12}$ $\frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{12}$ $\frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{12}$ $\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{12}$

Fig. 135

este identic egal cu zero (compară cu rezolvarea problemei 132). Astfel trebuie să avem

$$P(z)=2\left(\frac{l}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2z}{l}\right).$$

Revenind la modul în care a fost pusă problema iniţial, obţinem că produsul $MA_1\cdot MA_2\ldots MA_n$, unde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt puncte fixe, iar M parcurge segmentul de lungime l, ia evident cel puţin o dată o valoare nu mai mică decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n\cdot$ Pentru ca acest produs să nu ia nici o valoare mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, este necesar ca punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să fie dispuse chiar pe segment, anume astfel cum sînt dispuse rădăcinile ecuaţiei $T_n\left(\frac{2z}{l}\right)=0$, unde se ia ca axa absciselor dreapta pe care se află segmentul, iar ca originea coordonatelor mijlocul segmentului; cu alte cuvinte este necesar ca distanţele de la punctele $A_1, A_2 \ldots, A_n$ la mijlocul segmentului să fie egale cu

$$\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2n},\ \frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{2n},\ \frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{2n},\ldots,\frac{l}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

(fig. 135; v. rezolvarea problemei 130).

136. a) Avem (fig. 136)

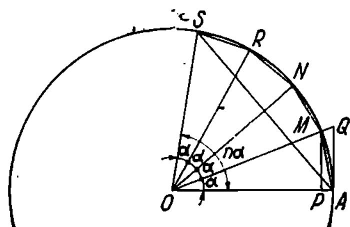


Fig. 136

$$S_{\Delta OAM}=\frac{1}{2}OA\cdot MP=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\text{sect.}OAM}=\frac{1}{2}OA^2\measuredangle AOM=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\alpha=\frac{1}{2}\alpha,$$

$$S_{\Delta OAQ}=\frac{1}{2}OA\cdot AQ=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Din faptul că $S_{\Delta OAM}<S_{\text{sect.}OAM}<S_{\Delta OAQ}$ rezultă inegalităţile cerute.

b) Avem (fig. 136)

$$\alpha=2S_{\text{sect. }OAM},\ \sin\alpha=2S_{\Delta OAM};\ n\alpha=2S_{\text{sect. }OAS},\ \sin n\alpha=2S_{\Delta OAS}.$$

Dar, evident,

$$\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}=\frac{S_{\Delta OAS}}{S_{\text{sect. }OAS}}<\frac{S_{\Delta OAM}+S_{\Delta OMN}+\ldots+S_{\Delta ORS}}{S_{\text{sect. }OAM}+S_{\text{sect. }OMN}+\ldots+S_{\text{sect. }ORS}}=$$

$$=\frac{n\cdot S_{\Delta OAM}}{n\cdot S_{\text{sect. }OAM}}=\frac{S_{\Delta OAM}}{S_{\text{sect. }OAM}}=\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

137. Vom înmulți expresia noastră cu $\sin\frac{\alpha}{2^n}$. Vom obține

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}\right)=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{2^{n-2}}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2^n}\sin\alpha,$$

de unde

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

138. Pentru stabilirea formulelor din problemele a) și b) este suficient să desfacem paranteza în membrul întîi al formulei lui Moivre

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

(v. trimiterea de la p. 157), folosind formula binomului lui Newton, și apoi să egalăm părțile reale și coeficienții lui i în expresiile din ambii membri.

Pentru stabilirea formulei din problema c) trebuie să împărțim termen cu termen formulele din problemele a) și b) și apoi să împărțim cu $\cos^n\alpha$ atît numărătorul, cît și numitorul expresiei din membrul al doilea.

139. a) Formula din problema 138, a) poate fi scrisă sub forma următoare:

$$\sin n\alpha=\sin^n\alpha(C_n^1\operatorname{ctg}^{n-1}\alpha-C_n^3\operatorname{ctg}^{n-3}\alpha+C_n^5\operatorname{ctg}^{n-5}\alpha-\ldots).$$

Fie acum $n=2m+1$ impar. Dacă α este egal cu

$$\frac{\pi}{2m+1},\ \frac{2\pi}{2m+1},\ \frac{3\pi}{2m+1},\ldots,\frac{m\pi}{2m+1},$$

atunci $\sin(2m+1)\alpha=0$, iar $\sin\alpha\neq0$; deci

$$C_{2m+1}^1\operatorname{ctg}^{2m}\alpha-C_{2m+1}^3\operatorname{ctg}^{2m-2}\alpha+C_{2m+1}^5\operatorname{ctg}^{2m-4}\alpha-\ldots=0.$$

În acest mod, vedem că ecuaţia

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots = 0$$

are rădăcinile $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \dots, \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}$.

b) Formula din problema 138, c) poate fi, de asemenea, scrisă sub forma următoare:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} n\alpha} = \frac{C_n^1 \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} - C_n^3 \frac{1}{\operatorname{ctg}^3 \alpha} + C_n^5 \frac{1}{\operatorname{ctg}^5 \alpha} - \dots}{1 - C_n^2 \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} + C_n^4 \frac{1}{\operatorname{ctg}^5 \alpha} - \dots}$$

sau

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^n \alpha - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \alpha - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \alpha - \dots}.$$

Fie n un număr par. Dacă α este egal cu $\frac{\pi}{4\pi}$, $\frac{5\pi}{4n}$, $\frac{9\pi}{4n}, \dots, \frac{(4n-3)\pi}{4n}$, atunci $\operatorname{ctg} n\alpha = 1$; deci, pentru aceste valori α

$$\frac{\operatorname{ctg}^n \alpha - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \alpha - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \alpha - \dots} = 1,$$

De aici rezultă că ecuaţia

$$x^n - C_n^1 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + C_n^4 x^{n-4} - \dots = 0 \qquad (*)$$

are rădăcinile $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}$, $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4n}$, $\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{4n}, \dots, \operatorname{ctg} \frac{(4n-3)\pi}{4n}$. Dar

$$\operatorname{ctg} \frac{(4n-3)\pi}{4n} = -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4n}, \quad \operatorname{ctg} \frac{(4n-7)\pi}{4n} = -\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4n}, \dots$$

$$\dots, \operatorname{ctg} \frac{(2n+1)\pi}{4n} = -\operatorname{ctg} \frac{(2n-1)\pi}{4n};$$

deci, rădăcinile ecuaţiei (*) pot fi scrise, de asemenea, sub forma

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}, \quad -\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4n}, \quad \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4n}, \dots, \operatorname{ctg} \frac{(2n-3)\pi}{4n}, \quad -\operatorname{ctg} \frac{(2n-1)\pi}{4n}.$$

c), d) Formulele din problemele 138, a) şi b) pentru $n = 2m$ par pot fi scrise sub forma

$$\sin 2m\alpha = \cos \alpha \sin \alpha [C_{2m}^1 (1 - \sin^2 \alpha)^{m-1} -$$
$$- C_{2m}^3 (1 - \sin^2 \alpha)^{m-2} \sin^2 \alpha + C_{2m}^5 (1 - \sin^2 \alpha)^{m-3} \sin^4 \alpha - \dots],$$

$$\cos 2m\alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^m - C_{2m}^2 (1 - \sin^2 \alpha)^{m-1} \sin^2 \alpha + C_{2m}^4 (1 - \sin^2 \alpha)^{m-2} \alpha \sin^4 \alpha - \dots$$

De aici, la fel ca şi mai sus, tragem concluzia că ecuţaiile

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1} - C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x + C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2 - \ldots = 0,$$

$$(1-x)^m - C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x + C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2 - \ldots = 0$$

au rădăcinile

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}, \quad \sin^2\frac{2\pi}{2m}, \quad \sin^2\frac{3\pi}{2m}, \ldots, \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

şi, respectiv,

$$\sin^2\frac{\pi}{4m}, \quad \sin^2\frac{3\pi}{4m}, \quad \sin^2\frac{5\pi}{4m}, \ldots, \sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}.$$

140. a) Deoarece ecuaţia

$$C_{2m+1}^1x^m - C_{2m+1}^3x^{m-1} + C_{2m+1}^5x^{m-2} - \ldots = 0$$

are rădăcinile $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}, \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}$ [v. problema 139, a)],

polinomul

$$C_{2m+1}^1x^m - C_{2m+1}^3x^{m-1} + C_{2m+1}^5x^{m-2} - \ldots$$

se divide cu

$$x - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}, \quad x - \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}, \ldots, x - \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1},$$

adică

$$C_{2m+1}^1x^m - C_{2m+1}^3x^{m-1} + C_{2m+1}^5x^{m-2} - \ldots =$$

$$= A\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1}\right)\ldots\left(x - \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}\right). \quad (*)$$

Desfăcînd parantezele în membrul al doilea al ultimei egalităţi şi egalînd coeficienţii lui x^m şi x^{m-1} în ambii membri, avem

$$C_{2m+1}^1 = A, \quad C_{2m+1}^3 = A\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1}\right),$$

de unde

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{m\pi}{2m+1} = \frac{C_{2m+1}^3}{A} = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Deoarece $\operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1$, din egalitatea de la problema a) rezultă

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \ldots + \operatorname{cosec}^2 \frac{m\pi}{2m+1} =$$

$$= \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{m(2m+2)}{3}.$$

c) Din rezultatul problemei 139, b) rezultă că

$$x^n - C_n^1 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots =$$

$$= \left(x - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\right)\left(x + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}\right)\left(x - \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\right)\left(x + \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \left[x - \operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\right]\left[x + \operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right].$$

Egalînd, în ultima egalitate, coeficienții lui x^{n-1} din ambii membri, obținem

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} - \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n} - \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n} + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n} - \operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n} = C_n^1 = n.$$

141. Din soluția problemelor 139, c), d) rezultă că

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1} - C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x + C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2 - \ldots =$$

$$= A\left(x - \sin^2\frac{\pi}{2m}\right)\left(x - \sin^2\frac{2\pi}{2m}\right)\ldots\left[x - \sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]$$

și

$$(1-x)^m - C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x + C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2 - \ldots =$$

$$= B\left(x - \sin^2\frac{\pi}{4m}\right)\left(x - \sin^2\frac{3\pi}{4m}\right)\ldots\left[x - \sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}\right].$$

Egalînd în ambii membri ai acestor două egalități coeficienții termenilor de gradul cel mai înalt în x, vom obține

$$A = (-1)^{m-1}(C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + C_{2m}^5 + \ldots), \qquad B = (-1)^m(1 + C_{2m}^2 + C_{2m}^4 + \ldots),$$

de unde [v. problema 55, *a*), b)]

$$(-1)^{m-1}A + (-1)^m B = 2^{2m}, \quad (-1)^{m-1}A - (-1)^m B = 0,$$

adică

$$A = (-1)^{m-1}2^{2m-1}, \qquad B = (-1)^m 2^{2m-1}.$$

Acum, egalînd în aceleași două egalități termenii liberi din ambii membri, obținem

$$2m = C_{2m}^1 = (-1)^{m-1} A \sin^2 \frac{\pi}{2m} \sin^2 \frac{2\pi}{2m} \dots \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m},$$

$$1 = (-1)^m B \sin^2 \frac{\pi}{4m} \sin^2 \frac{3\pi}{4m} \sin^2 \frac{5\pi}{4m} \dots \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m},$$

de unde rezultă identitățile cerute.

142. a) În identitatea din problema 137

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

vom trece la limită pentru $n \to \infty$. Vom obține

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots = \lim_{n\to\infty} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} \right\} = \sin \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Dar, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = 1$ $\left(\text{întrucît} \lim\limits_{\alpha\to\infty} \dfrac{\alpha}{\sin \alpha} = 1;\right.$ ultima relație rezultă din faptul că, pe baza inegalităților din problema 136,a), avem $\left. 1 \leqslant \dfrac{\alpha}{\sin \alpha} \leqslant \dfrac{1}{\cos \alpha}\right)$, atunci

$$\sin \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha.$$

Obținem astfel

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha, \quad \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots}. \qquad (*)$$

Acum rămîne numai să mai punem în ultima egalitate

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha = 1, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

și să folosim faptul că

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha}.$$

b) Punînd $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ în identitatea (*), obținem

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}}\dots=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

143. a) Deoarece pentru unghiurile din primul cadran $\operatorname{cosec}\alpha > \frac{1}{\alpha} > \operatorname{ctg}\alpha$ [v. problema 136,a)], din identitățile de la problemele 140,a) și b) rezultă

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{m(2m+2)}{3}$$

sau

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right) < 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{m^2} <$$

$$<\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right).$$

Însă, deoarece termenii extremi ai ultimei inegalități duble tind către $\pi^2/6$ pentru $m \to \infty$, avem

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{m^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

b) Vom determina suma pătratelor rădăcinilor ecuației din problema 139,a). Egalînd coeficienții lui x^{m-2} din ambii membri ai identității (*) din soluția problemei 140,a), vom stabili că suma tuturor produselor posibile de perechi de rădăcini ale ecuației este egală cu

$$\frac{C_{2m+1}^5}{A} = \frac{C_{2m+1}^5}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)\,(m-1)\,(2m-3)}{30}.$$

Deoarece suma pătratelor unor mărimi oarecare este egală cu pătratul sumei lor minus de două ori suma tuturor produselor posibile ale acestor mărimi luate cîte două, rezultă că

$$\operatorname{ctg}^4\frac{\pi}{2m+1}+\operatorname{ctg}^4\frac{2\pi}{2m+1}+\operatorname{ctg}^4\frac{3\pi}{2m+1}+\dots+\operatorname{ctg}^4\frac{m\pi}{2m+1}=$$

$$=\frac{m^2(2m-1)^2}{9}-\frac{m(2m-1)(m-1)(2m-3)}{15}=\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45}.$$

Mai departe, deoarece $\operatorname{cosec}^4 \alpha = (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)^2 = \operatorname{ctg}^4 \alpha + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$, obținem

$$\operatorname{cosec}^4 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{cosec}^4 \frac{2\pi}{2m+1} + \dots + \operatorname{cosec}^4 \frac{m\pi}{2m+1} =$$

$$= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45} + \frac{2m(2m-1)}{3} + m = \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45}.$$

Acum, analog ca în rezolvarea problemei a), căpătăm următoarea inegalitate dublă:

$$\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-7)}{45} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^4 + \left(\frac{2m+1}{3\pi}\right)^4 + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^4 < \frac{8m(m+1)(m^2+m+3)}{45}$$

sau

$$\frac{\pi^4}{90}\left(1 - \frac{1}{2m+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2m+1}\right)\left[1 + \frac{3}{2m+1} - \frac{13}{(2m+1)^2}\right] < 1 + \frac{1}{2^4} +$$

$$+ \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{m^4} < \frac{\pi^4}{90}\left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right]\left[1 + \frac{11}{(2m+1)^2}\right],$$

din care, trecînd la limită pentru $m \to \infty$, vom obține

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Observație. La fel determinînd suma cuburilor, a puterilor a patra etc. ale rădăcinilor ecuației din problema 139, *a*), putem obține următorul șir de formule:

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945},$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9\,450},$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93\,555},$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \dots = \frac{691\,\pi^{12}}{638\,512\,875}$$

. . . .

Toate aceste formule au fost obținute pentru prima dată de L. Euler.

144. a) Deoarece

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = \sin(\beta - \alpha) \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta,$$

atunci, din identitatea de la problema 140, c) rezultă că

$$\sin\frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{4n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\operatorname{cosec}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]=n$$

sau

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{4n}+\ldots$$
$$\ldots+\operatorname{cosec}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{cosec}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=\frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Pe de altă parte,

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta)$$

$\left[\text{deoarece } \operatorname{ctg}(\beta-\alpha)=\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}\right]$; deci, din aceeași identitate rezultă

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}+\frac{n}{2}\right]=n$$

sau

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4n}+\ldots+\operatorname{ctg}\frac{(2n-3)\pi}{4n}\operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{4n}=$$
$$=\frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{n}{2}.$$

Analog ca în rezolvarea problemei 143, a) obținem dubla inegalitate

$$\frac{n}{\sin\frac{\pi}{2n}}>\frac{4n}{\pi}\cdot\frac{4n}{3\pi}+\frac{4n}{5\pi}\cdot\frac{4n}{7\pi}+\ldots+\frac{4n}{(2n-3)\pi}\cdot\frac{4n}{(2n-1)\pi}>$$
$$>\frac{n}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{n}{2}$$

sau

$$\frac{\pi^2}{8n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} > \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{2}{(2n-3)(2n-1)} > \frac{\pi^2}{8n}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{\pi^2}{16n}$$

sau, în sfîrşit,

$$\frac{\pi}{4}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} > 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1} >$$

$$> \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}-\frac{\pi}{4n}\right).$$

Deoarece, pentru $n \to \infty$, termenii extremi din ultima inegalitate dublă tind către aceeaşi limită $\frac{\pi}{4}\left[\text{deoarece } \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1,\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}= = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha\right)=1;\text{ compară cu soluţia problemei 142, a)}\right]$, obţinem

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Vom determina acum suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei din problema 139, b). Analog ca în rezolvarea problemei 143, b) tragem concluzia că suma produselor duble ale rădăcinilor acestei ecuaţii este egală cu $-C_n^2 = -n(n-1)/2$ şi suma pătratelor este egală cu

$$n^2+n(n-1)=n(2n-1).$$

Din identitatea

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{ctg}^2\frac{5\pi}{4n}+\dots+\operatorname{ctg}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}=n(2n-1)$$

rezultă

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{4n}+\operatorname{cosec}^2\frac{5\pi}{4n}+\dots+\operatorname{cosec}^2\frac{(2n-1)\pi}{4n}=$$

$$=n(2n-1)+n=2n^2,$$

de unde, analog ca în rezolvarea problemei 143, a), tragem concluzia că

$$n(2n-1) < \left(\frac{4n}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{4n}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4n}{5\pi}\right)^2 + \cdots + \left[\frac{4n}{(2n-1)\pi}\right]^2 < 2n^2$$

sau

$$\frac{\pi^2}{8}\left(1-\frac{1}{2n}\right) < 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{\pi^2}{8}$$

şi, deci,

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ultima formulă este echivalentă cu formula lui Euler: într-adevăr, din formula lui Euler rezultă

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Observaţie. Determinînd suma cuburilor, a puterilor a patra etc. ale rădăcinilor ecuaţiei din problema 139, b), se poate obţine următorul şir de formule:

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

(această formulă este echivalentă cu relaţia din problema 143, b)],

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1\,536},$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960},$$

....

Toate aceste formule, de asemenea, au fost deduse pentru prima oară de L. Euler.

145. Vom alcătui acum două expresii, a căror lege de formare este sugerată de formula lui Wallis:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}},\qquad (*)$$

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{6\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}.\qquad (**)$$

Conform identităţilor din problema 141, expresiile (*) şi (**) sînt respectiv egale cu

$$\frac{\frac{m}{2^{2m-2}}}{\frac{1}{2^{2m-1}}\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}=\frac{2m}{\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}}=\frac{m}{\sin\frac{\pi}{2m}},$$

$$\frac{\frac{m}{2^{2m-2}}}{\frac{1}{2^{m-1}}}\,\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{2\pi}{4m}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4m}=2m\,\frac{\sin^2\frac{\pi}{4m}}{2\sin\frac{\pi}{4m}\cos\frac{\pi}{4m}}=m\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4m}.$$

Vom demonstra, acum, că expresia (*) nu poate decît să se micşoreze prin înlocuirea sinusurilor cu unghiurile, iar expresia (**) va creşte. Vom folosi faptul că

$$\sin^2 k\alpha-\sin^2\alpha=(\sin k\alpha+\sin\alpha)(\sin k\alpha-\sin\alpha)=$$

$$=2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\cos\frac{(k-1)\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}=$$

$$=\sin(k-1)\alpha\,\sin(k+1)\alpha.$$

De aici rezultă că

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\,\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}=\frac{\sin^2 k\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2 k\alpha}=1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2,$$

în timp ce

$$\frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\cdot\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha}=\frac{(k^2-1)\alpha^2}{(k\alpha)^2}=1-\left(\frac{\alpha}{k\alpha}\right)^2.$$

Însă din rezultatul problemei 136, b) rezultă că $\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}>\frac{\alpha}{k\alpha}$ şi deci

$$1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha}\right)^2<1-\left(\frac{\alpha}{k\alpha}\right)^2,$$

de unde

$$\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha}\cdot\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha}<\frac{(k-1)\alpha}{k\alpha}\cdot\frac{(k+1)\alpha}{k\alpha},$$

$$\frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha}\cdot\frac{\sin k\alpha}{\sin(k+1)\alpha}>\frac{k\alpha}{(k-1)\alpha}\cdot\frac{k\alpha}{(k+1)\alpha}.$$

Avem astfel

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}<m\sin\frac{\pi}{2m},$$

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\cdot\frac{\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}>m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}$$

sau

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}<m\sin\frac{\pi}{2m},$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{3m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}>m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}.$$

Ultimele două inegalităţi pot fi reunite în următoarea inegalitate dublă:

$$m\sin\frac{\pi}{2m}>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}>\frac{2m-1}{m}\,m\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}$$

sau

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}>\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}.$$

Deoarece pentru $m \to \infty$ ambii membri ai ultimei inegalități duble tind către una și aceeași limită $\frac{\pi}{2}$ (compară cu soluția problemei 144, a)), obținem

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5},\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

146. Vom împărți segmentul $OD = a$ de pe axa absciselor în n părți egale și vom construi pe fiecare segment $M_{k-1}M_k$ un dreptunghi în modul indicat la p. 51 (fig. 137). Lungimea bazei fiecăruia dintre aceste dreptunghiuri este egală cu $\frac{a}{n}$, iar înălțimea este egală cu $\left(k\frac{a}{n}\right)^2$, unde k este numărul de ordine al dreptunghiului, numărînd de la punctul O. Suma ariilor tuturor acestor dreptunghiuri este egală cu

$$S_n = \frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(2\,\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+\left(n\,\frac{a}{n}\right)^2\right]=\frac{a^3}{n^3}\,(1^2+2^2+\ldots+n^2).$$

După cum se știe (v. trimiterea de la p. 132)

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

deci,

$$S_n=\frac{a^3}{n^3}\;\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aria suprafeței S, mărginite de parabolă, este egală cu limita sumei ariilor dreptunghiurilor, cînd numărul lor crește nemărginit, adică

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a^3\,\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}a^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{a^3}{3}.$$

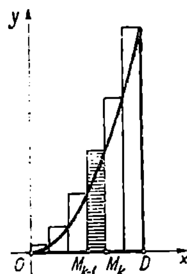
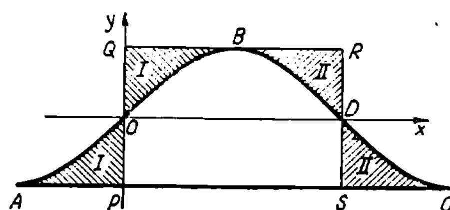


Fig. 137



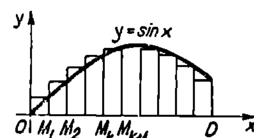


Fig. 138

147. a) Aria considerată este egală cu 2π. Demonstrația rezultă, evident, din fig. 138, *a*, în care se arată că figura $AOBDC$, care ne interesează, este formată la fel ca dreptunghiul $PQRS$ cu baza $PS = OD = \pi$ și înălțimea $PQ = 2$ (adică figura și dreptunghiul sînt formate din părți identice).

b) Ca și în problema 146, ca puncte $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ vom alege punctele care împart segmentul $OD = a$ al axei absciselor în n părți egale (fig. 138,*b*). În acest caz, suma S_n va fi egală cu

$$S_n = h\,(\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin nh),$$

unde $h = a/n$. Utilizînd acum egalitatea [1]

$$\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin nh = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}$$

vom obține

$$S_n = h\,\frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{a}{n}\,\frac{\sin \frac{a}{2} \sin\left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{a}{n}\right)}{\sin \frac{a}{2n}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n}}{\sin \frac{a}{2n}} = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{\frac{a}{2n}}{\sin \frac{a}{2n}} = 2.$$

Deci aria căutată este egală cu

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2 \lim_{n\to\infty} \sin \frac{a}{2} \sin\left[\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = 2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

---

[1] Această formulă se deduce ușor în modul următor: deoarece

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

atunci

$$(\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin nh) \sin \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{3h}{2}\right) + \left(\cos \frac{3h}{2} - \cos \frac{5h}{2}\right) + \cdots\right.$$
$$\left. \cdots + \left(\cos \frac{(2n-1)h}{2} - \cos \frac{(2n+1)h}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{h}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) h\right].$$

De aici rezultă

$$\sin h + \sin 2h + \ldots + \sin nh = \frac{\frac{1}{2}\left[\cos \frac{h}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) h\right]}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

În particular, pentru $a = \pi$ vom avea $S = 2$, iar pentru $a = \pi/2$ viom avea $S = 1$. Cu aceste două rezultate este uşor să se arate că aria figurii $AOBDC$ din fig. 138, a este egală cu 2π, deoarece

$$S_{OBD} = 2, \quad S_{ODSP} = \pi, \quad S_{OAP} = S_{DCS} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

148. a) În rezolvarea acestei probleme este mult mai comod să se împartă segmentul AD de pe axa absciselor ($OA = a$, $OD = b$) nu în părţi egale, ci astfel încît să fie satisfăcută relaţia $\frac{OM_1}{a} = \frac{OM_2}{OM_1} = \cdots = \frac{b}{OM_{n-1}}$. Notînd valoarea comună a tuturor acestor rapoarte cu q:

$$\frac{OM_1}{a} = \frac{OM_2}{OM_1} = \cdots = \frac{b}{OM_{n-1}} = q,$$

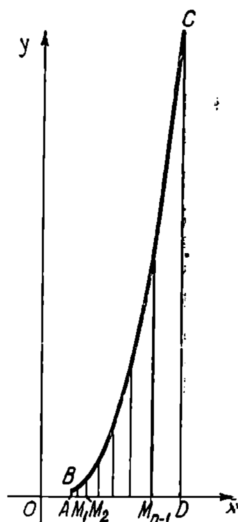


Fig. 139

vom obţine

$$\frac{OM_1}{a} \frac{OM_2}{OM_1} \cdots \frac{b}{OM_{n-1}} = q^n = \frac{b}{a}$$

şi, deci, $q = \sqrt[n]{b/a}$. Deci, cînd $n \to \infty$, $q \to 1$[1]. Evident că

$$OM_1 = aq, \quad OM_2 = OM_1 \cdot q = aq^2,$$

$$OM_3 = OM_2 \cdot q = aq^3, \ldots, b = OM_{n-1} \cdot q = aq^n.$$

De aici

$$h_1 = OM_1 - OA = a(q - 1),$$
$$h_2 = aq^2 - aq = aq(q - 1),$$
$$h_3 = aq^3 - aq^2 = aq^2(q - 1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_n = aq^n - aq^{n-1} = aq^{n-1}(q - 1).$$

Să observăm că condiţia necesară, indicată la p. 51, este aici îndeplinită: deoarece $q = \sqrt[n]{b/a} \to 1$ pentru $n \to \infty$, lungimea tuturor segmentelor $M_{k-1}M_k = h_k$ tinde către zero odată cu creşterea lui n. Aria dreptunghiului al k-lea, în acest caz, este evident egală cu

$$h_k(OM_k)^m = aq^{k-1}(q - 1)\,(aq^k)^m,$$

aşa că suma ariilor tuturor celor n dreptunghiuri este egală cu

$$S_n = a(q - 1)(aq)^m + aq(q - 1)(aq^2)^m + aq^2(q - 1)(aq^3)^m + \ldots$$
$$\ldots + aq^{n-1}(q - 1)(aq^n)^m = a^{m+1}q^m(q - 1)\,[1 + q^{m+1} + q^{2(m+1)} + \ldots$$
$$\ldots + q^{(n-1)(m+1)}] = a^{m+1}q^m(q - 1)\,\frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} = q^m \frac{1}{\frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}}\, a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1\right]$$

---

[1] Deoarece $\log q = \frac{1}{n}(\log b - \log a) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

$\left[\text{deoarece } q^{n(m+1)} = (q^n)^{m+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}\right]$. Însă pentru $n \to \infty$, $q \to 1$; deci, $\lim_{n\to\infty} q^m = 1$ pentru orice m fix și deci pentru a determina aria trapezului curbiliniu $ABCD$ nu ne mai rămîne decît să găsim limita expresiei $(q^{m+1} - 1)/ /(q - 1)$ pentru $q \to 1$.

Vom examina acum, separat, mai multe cazuri.

1°. m este un număr întreg pozitiv. În acest caz simplu

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = \lim_{q\to 1} (q^m + q^{m-1} + \ldots + q + 1) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{\text{de } m+1 \text{ ori}} = m + 1.$$

2°. m este un număr rațional, mai mare decît -1: $m + 1 = r/s$, unde r și s sînt numere pozitive. În acest caz

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = \lim_{q\to 1} \frac{q^{r/s} - 1}{q - 1} = \lim_{q\to 1} \left\{\frac{(q^{1/s})^r - 1}{q^{1/s} - 1} : \frac{(q^{1/s})^s - 1}{q^{1/s} - 1}\right\}$$

și, deoarece dacă $q \to 1$ avem și $q_1 = \sqrt[s]{q} \to 1$, din rezultatul de la punctul 1° deducem

$$\lim_{q\to 1} \frac{(q^{1/s})^r - 1}{q^{1/s} - 1} = \lim_{q_1\to 1} \frac{q_1^r - 1}{q_1 - 1} = r, \quad \lim_{q\to 1} \frac{(q^{1/s})^s - 1}{q^{1/s} - 1} = s$$

și, deci,

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = r : s = m + 1.$$

3°. m este un număr rațional, mai mic decît -1: $m + 1 = - r/s$, unde r și s sînt numere pozitive. În acest caz, utilizînd rezultatul de la punctul 2°, obținem

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 2} = \lim_{q\to 1} \frac{q^{-r/s} - 1}{q - 1} = \lim_{q\to 1} \left\{-q^{-r/s} \frac{q^{r/s} - 1}{q - 1}\right\} = -1 \cdot \frac{r}{s} = m + 1.$$

4°. Dacă m este irațional, atunci q^{m+1} se definește ca limita expresiilor de forma $q^{r/s}$, unde r/s sînt numere raționale, care tind către $m+1$ (definiția puterii iraționale a unui număr). De aceea, din faptul că pentru orice valoare rațională m, diferită de -1, $\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1}}{q - 1} = m + 1$, rezultă că și pentru m irațional

$$\lim_{q\to 1} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = m + 1.$$

Deci, pentru orice m diferit de -1, avem $\lim\limits_{q\to 1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}=m+1$.
De aici rezultă că, pentru orice m diferit de -1, aria trapezului curbiliniu $ABCD$ mărginit de arcul BC al curbei $y=x^m$, de axa absciselor și de dreptele $x=a$ și $x=b$ va fi egală cu

$$1\cdot\frac{1}{m+1}a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

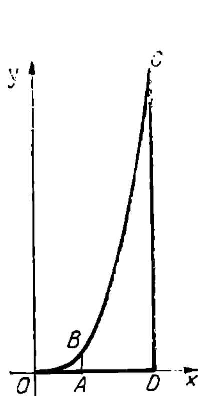


Fig. 140

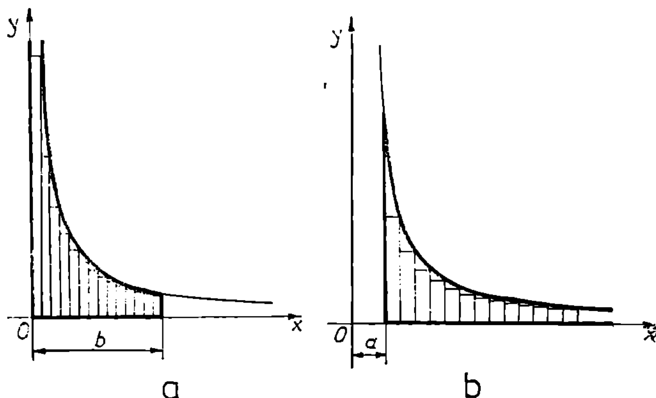


Fig. 141

Observație. Pentru $m=-1$ formula ariei trapezului curbiliniu $ABCD$ are cu totul alt aspect; v. problema 152.

b) Pentru calculul ariei triunghiului curbiliniu mărginit de parabola $y=x^m$, axa absciselor și dreapta $x=b$, procedeul cu care am rezolvat problema precedentă nu poate fi aplicat, deoarece segmentul $OD=a$ al axei absciselor nu poate fi împărțit într-un număr finit de părți astfel încît abscisele punctelor de diviziune să formeze o progresie geometrică. Însă putem folosi rezultatul obținut la problema precedentă. Într-adevăr, aria triunghiului curbiliniu OCD (fig. 140) este limita ariilor trapezelor curbilinii $ABCD$ pentru $A\to 0$. Expresia $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ tinde către $\frac{b^{m+1}}{m+1}$ pentru $a\to 0$; deci, aria triunghiului curbiliniu este egală cu $\frac{b^{m+1}}{m+1}$.

Observație. Rezultatul obținut în problema b) își menține valabilitatea nu numai pentru valori pozitive ale lui m, ci și pentru valori negative ale lui m, mai mari decît -1 $\left(\text{dacă } m>-1, \text{ atunci } \lim\limits_{a\to 0}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}=\frac{b^{m+1}}{m+1}\right)$. În ultimul caz, nu există un triunghi curbiliniu OCD, deoarece curba $y=x^m$ are forma reprezentată în fig. 141, *a*. Însă, indiferent de faptul că figura mărginită de curba $y=x^m$, axa absciselor, axa ordonatelor $x=0$

şi dreapta $x = b$ pentru m negativ se întinde la infinit, se poate totuşi vorbi de aria acestei figuri (înțelegînd, de exemplu, sub denumirea de arie limita sumei ariilor dreptunghiurilor reprezentate în fig. 141, *a*, cînd baza fiecăruia dintre aceste dreptunghiuri tinde către zero); această arie este egală cu $b^{m+1}/(m+1)$.

În mod analog, pentru $m < -1$ se poate vorbi despre aria figurii care se întinde la infinit, mărginite de curba $y = x^m$, axa absciselor şi dreapta $x = a$ (fig. 141, *b*; această arie, care trebuie înțeleasă ca limita ariilor dreptunghiurilor reprezentate în fig. 141, *b*, cînd baza fiecărui dreptunghi tinde către zero, iar suma tuturor bazelor tinde către infinit, este egală cu

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = \frac{a^{m+1}}{-(m+1)}.$$

149. Vom împărți fiecare dintre segmentele axei absciselor A_1D_1 ($OA_1 = a_1$, $OD_1 = b_1$) şi A_2D_2 ($OA_2 = a_2$, $OD_2 = b_2$) în n părți egale şi vom construi pe fiecare dintre aceste părți un dreptunghi, aşa cum se arată în fig. 142. Aria dreptunghiului al k-lea dintre primele dreptunghiuri, evident, este egală cu

$$S_{(k)}^{(1)} = \frac{b_1 - a_1}{n} \frac{1}{a_1 + k\dfrac{b_1 - a_1}{n}} = \frac{b_1 - a_1}{(n-k)a_1 + kb_1} = \frac{\dfrac{b_1}{a_1} - 1}{n - k + k\dfrac{b_1}{a_1}}.$$

La fel, aria dreptunghiului al k-lea dintre celelalte dreptunghiuri este egală cu

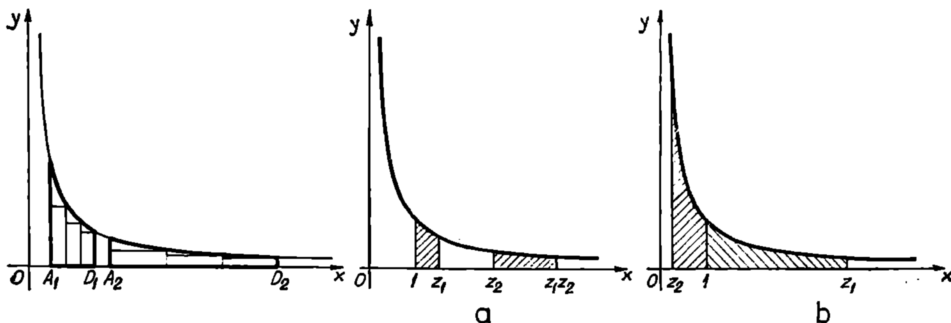


Fig. 142

Fig. 143

$$S_{(k)}^{(2)} = \frac{b_2 - a_2}{n} \frac{1}{a_2 + k\dfrac{b_2 - a_2}{n}} = \frac{b_2 - a_2}{(n-k)a_2 + kb_2} = \frac{\dfrac{b_2}{a_2} - 1}{n - k + k\dfrac{b_2}{a_2}}.$$

Deoarece, conform enunțului problemei, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1}{a_1}$, avem $S_{(k)}^{(1)} = S_{(k)}^{(2)}$. De aici rezultă că suma $\overline{S}_n$ a ariilor celor n dreptunghiuri din primele dreptunghiuri coincide cu suma $\overline{\overline{S}}_n$ a ariilor celor n dreptunghiuri dintre celelalte dreptunghiuri. De aici decurge rezultatul căutat (v. p. 52).

150. Vom examina separat o serie de cazuri posibile.

1° Numerele z_1 și z_2 sînt amîndouă mai mari decît 1 (fig. 143, *a*). Deoarece $\frac{z_1 z_2}{z_2} = \frac{z_1}{1}$, atunci, conform rezultatului la problema 149, ariile celor două trapeze curbilinii, hașurate în fig. 143, *a*, sînt egale. Deoarece aria trapezului curbiliniu mărginit de axa absciselor, hiperbola $y = 1/x$ și dreptele $x = 1$ și $x = z_1 z_2$ este egală cu suma ariilor celor două trapeze curbilinii mărginite de axa absciselor, hiperbolă și dreptele $x = 1$ și $x = z_2$, respectiv $x = z_2$ și $x = z_1 z_2$, avem

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) + F(z_2).$$

2° $z_2 = 1/z_1$; $z_1 > 1$ (fig. 143, *b*). În acest caz, egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm capătă forma

$$F(z_1) + F\left(\frac{1}{z_1}\right) = F(1) = 0, \text{ adică } F\left(\frac{1}{z_1}\right) = -F(z_1).$$

Deoarece $z_1 : 1 = 1 : \frac{1}{z_1}$, atunci, conform rezultatului la problema 149, aria trapezului mărginit de axa absciselor, de hiperbolă și de dreptele $x = 1$ și $x = z_1$ este egală cu aria trapezului mărginit de axa absciselor, de hiperbolă și de dreptele $x = 1/z_1$ și $x = 1$. De aici rezultă imediat egalitatea cerută $F\left(\frac{1}{z_1}\right) = -F(z_1)$ (v. p. 53).

3° z_1 și z_2 sînt ambele mai mici decît 1. În acest caz, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$ și $\frac{1}{z_1 z_2}$ vor fi mai mari decît 1 și, pe baza celor demonstrate mai înainte,

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right) = -F(z_1), \quad F\left(\frac{1}{z_2}\right) = -F(z_2), \quad F\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right) = -F(z_1 z_2),$$

$$F\left(\frac{1}{z_1}\right) + F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right).$$

Înmulțind ambii membri ai ultimei egalități cu -1, vom obține egalitatea cerută

$$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1 z_2).$$

4° $z_1 > 1$, $z_2 < 1$ (însă $z_1 z_2 \neq 1$). Pentru precizare, vom presupune că $z_1 > 1/z_2$, așa că $z_1 z_2 > 1$. Deoarece $1/z_2 > 1$, conform celor demonstrate mai înainte

$$F(z_1 z_2) + F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F\left(z_1 z_2 \cdot \frac{1}{z_2}\right) = F(z_1),$$

de aici,

$$F(z_1 z_2) = F(z_1) - F\left(\frac{1}{z_2}\right) = F(z_1) + F(z_2).$$

Cazul $z_1 z_2 < 1$ se examinează în mod analog.

Cu aceasta, relația cerută a fost demonstrată în toate cazurile.

151. Să observăm că, prin însăși definiția sa, funcția $F(z)$ este o funcție crescătoare: pentru $z_2 > z_1$, evident, $F(z_2) > F(z_1)$. Deoarece $F(1) = 0$ și, cînd z crește, $F(z)$ variază continuu și nu poate „să sară" peste nici o valoare, atunci pentru a ne convinge de existența unui astfel de număr e, pentru care $F(\mathrm{e}) = 1$, trebuie numai să arătăm că există astfel de numere z pentru care $F(z) > 1$.

Vom arăta că $F(3) > 1$. În acest scop, vom duce tangenta $B'C'$ la hiperbola $y = 1/x$ în punctul G de coordonate $x = 2$, $y = 1/2$ (fig. 144, *a*). Aria trapezului $ABCD$ ($OA = 1, OD = 3$) este egală cu 1, deoarece linia lui de mijloc $HG = 1/2$, iar înălțimea $AD = 2$. De aici rezultă că aria $F(3)$ a trapezului curbiliniu $ABCD$ este mai mare decît 1, ceea ce trebuia demonstrat.

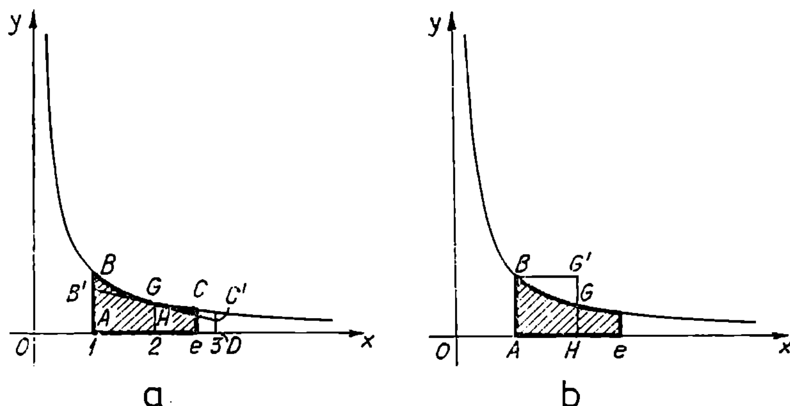


Fig. 144

Vom arăta acum că $F(2) < 1$. Aceasta rezultă din fig. 144, *b*: aria trapezului curbiliniu $ABGH$ ($OA = 1$, $OH = 2$), egală cu $F(2)$, este evident mai mică decît aria pătratului $ABG'H$, egală cu 1.

Astfel,

$$F(2) < 1 < F(3), \text{ de unde } 2 < \mathrm{e} < 3.$$

152. Vom demonstra, mai întîi, următoarea proprietate importantă a funcției $F(z)$: pentru orice α are loc egalitatea

$$F(z^{\alpha}) = \alpha F(z).$$

Această demonstrație o vom face în mai multe etape, prelungind treptat domeniul numerelor α considerate.

1° $F(z\ ) = nF(z)$ pentru n întreg pozitiv. Într-adevăr, conform rezultatului la problema 150, vom avea

$$F(z^2) = F(z) + F(z) = 2F(z),$$

$$F(z^3) = F(z^2) + F(z) = 2F(z) + F(z) = 3F(z),$$

$$F(z^4) = F(z^3) + F(z) = 3F(z) + F(z) = 4F(z),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F(z^n) = F(z^{n-1}) + F(z) = (n - 1)\ F(z) + F(z) = nF(z).$$

2° $F(z^k) = kF(z)$ pentru k întreg negativ. Într-adevăr, fie $k = -n$, unde n este un număr întreg pozitiv; atunci, evident, $F(z^k) = F\left(\frac{1}{z^n}\right) = -F(z^n)$ (v. rezolvarea problemei 140) și deci

$$F(z^k) = -nF(z) = kF(z).$$

3°. $F(z^{1/m}) = \frac{1}{m}F(z)$ pentru m întreg. Într-adevăr, înlocuind în egalitatea demonstrată $F(z_1^m) = mF(z_1)$ numărul z_1 cu $z^{1/m}$, vom obține

$$F(z) = mF\ (z^{1/m}),\text{ de unde } F(z^{1/m}) = \frac{1}{m}F(z).$$

4° $F(z^{n/m}) = \frac{n}{m}F(z)$, unde n/m este un număr rațional oarecare. Într-adevăr,

$$F(z^{n/m}) = F[(z^{1/m})^n] = nF(z^{1/m}) = \frac{n}{m}F(z)$$

(v. punctele 1° — 2° și 3°).

5° $F(z^{\alpha}) = \alpha F(z)$, unde α este un număr irațional oarecare. Vom forma două șiruri de numere raționale $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$ și $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n', \dots,$ care verifică următoarele condiții:

$$\alpha_n - \alpha < 0,\quad \alpha_n' - \alpha > 0,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\alpha_n' = \alpha.$$

(Ca urmare α_n și α_n' pot fi luate, de exemplu, aproximațiile zecimale prin lipsă ale numărului α, respectiv prin adaos, cu o eroare de $1/10^n$.)

Deoarece, evident, funcţia $F(z)$ creşte odată cu z, putem scrie

$$F(z^{\alpha_n}) < F(z^{\alpha}) < F(z^{\alpha'_n})$$

sau, deoarece α_n şi α'_n sînt numere raţionale,

$$\alpha_n F(z) < F(z^{\alpha}) > \alpha'_n F(z)$$

(v. punctul 4°). De aici

$$\alpha_n < \frac{F(z^{\alpha})}{F(z)} < \alpha'_n, \text{ deci, } \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \frac{F(z^{\alpha})}{F(z)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \alpha'_n.$$

Însă, deoarece $\lim \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha'_n = \alpha$, din ultima egalitate rezultă

$$\frac{F(z^{\alpha})}{F(z)} = \alpha; \quad F(z^{\alpha}) = \alpha F(z),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Acum este uşor să se demonstreze că $F(z) = \log_e z$. Într-adevăr, conform celor demonstrate mai sus, vom avea

$$F(z) = F(e^{\log_e z}) = \log_e z \cdot F(e) = \log_e z,$$

deoarece $F(e) = 1$ conform definţiei numărului e.

153. a) Vom împărţi segmentul OD al axei absciselor, unde $OD = b$, în n părţi egale (fig. 145). Lungimea fiecărei părţi obţinute va fi egală cu b/n, iar înălţimile triunghiurilor înscrise în curba $y = a^x$ şi construite pe aceste părţi sînt egale respectiv cu 1, $a^{b/n}$, $a^{2b/n}$, ..., $a^{(n-1)b/n}$. Deci suma S_n a ariilor tuturor dreptunghiurilor este egală cu

$$S_n = \frac{b}{n}(1 + a^{b/n} + a^{2b/n} + \ldots + a^{(n-1)b/n}) = \frac{b}{n}\,\frac{a^b - 1}{a^{b/n} - 1}.$$

Aria S a trapezului curbiliniu $OBCD$ este egală cu limita sumei S_n pentru $n \to \infty$; astfel,

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}\,\frac{(a^b - 1)}{(a^{b/n} - 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^b - 1}{\frac{n}{b}(a^{b/n} - 1)}.$$

Însă, conform rezultatului la problema 159, *c*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b}(a^{b/n} - 1) = \frac{1}{b} \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a^b} - 1) = \frac{1}{b}\ln a^b = \ln a.$$

Deci

$$S = \frac{a^b - 1}{\ln a}.$$

În particular, dacă a=e, obţinem următoarea expresie simplă: $S=e^b-1$).

b) Prima rezolvare a acestei probleme poate fi obţinută din rezolvarea problemei a), folosind faptul că ecuaţia curbei $y = \log_a x$ poate fi scrisă şi sub forma $x = y^a$. Trebuie să găsim aria triunghiului curbiliniu ABC, unde $OA = 1$, $OB = b$ (fig. 146).

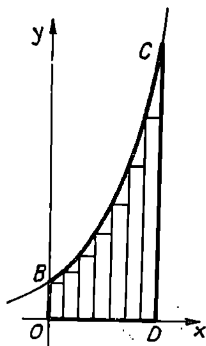


Fig. 145

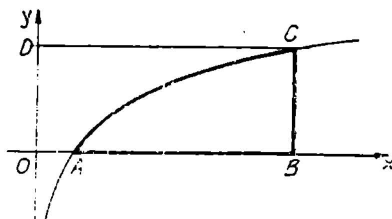


Fig. 146

Vom determina, mai întîi, aria trapezului curbiliniu $OACD$. Ecuaţia curbei considerate este de forma $y = \log_a x$ sau $x = a^y$. De aici rezultă că trapezul curbiliniu $OACD$ are aceeaşi formă ca şi trapezul curbiliniu $OBCD$ din fig. 145, a cărui arie am calculat-o în problema precedentă [1]. Trapezul $OACD$ este mărginit de curba $x = a^y$ şi dreptele $y = 0$ şi $y = \log_a b$, deci, conform rezultatului la problema a), aria lui este egală cu

$$S_{OACD} = \frac{a^{\log_a b} - 1}{\ln a} = \frac{b-1}{\ln a}.$$

Însă aria triunghiului curbiliniu ABC este egală cu aria dreptunghiului $OBCD$ minus aria trapezului $OACD$. De aici, obţinem [2]

$$S = b \log_a b - \frac{b-1}{\ln a} = \frac{b \log_a b \ln a - b + 1}{\ln a} = \frac{b \ln b - b + 1}{\ln a}.$$

În particular, pentru aria S_1 a triunghiului curbiliniu mărginit de axa absciselor, de curba $y = \ln x$ şi de dreapta $x = b$ obţinem formula

$$S_0 = b \ln b - b + 1,$$

---

[1] Mai precis, aceste trapeze vor fi simetrice (deoarece sensul pozitiv al axei Oy se află la stînga axei Ox, dacă se priveşte în direcţia pozitivă a celei din urmă, iar sensul pozitiv al axei Ox se află la dreapta axei Oy).

[2] Amintim demonstraţia faptului că $\log_a b \ln a = \ln b$. Deoarece $a^{\log_a b} = b$, iar $a = e^{\ln a}$, atunci $(e^{\ln a})^{\log_a b} = e^{\ln a \log_a b} = b = e^{\ln b}$ şi, deci, $\ln a \log_a b = \ln b$.

iar pentru aria S_0 a triunghiului curbiliniu mărginit de axa absciselor, de curba logaritmică $y = \lg x$ şi de dreapta $x = b$ obţinem formula

$$S_1 = \frac{b \ln b - b + 1}{\ln 10} = \frac{\ln 10 \cdot b \lg b - b + 1}{\ln 10} \approx \frac{2{,}3\, b \lg b - b + 1}{2{,}3}.$$

R e z o l v a r e a a d o u a. Vom împărţi segmentul AB, unde $OA = 1$, $OB = b$, prin punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ în n părţi astfel ca $\frac{OM_1}{1} = \frac{OM_2}{OM_1} = \frac{OM_3}{OM_2} = \ldots = \frac{b}{OM_{n-1}}$ (fig. 147). În acest caz, vom avea

$$OM_1 = q,\ OM_2 = q^2,\ OM_3 = q^3, \ldots, OM_{n-1} = q^{n-1},\ OB = q^n = b,$$

unde $q = \sqrt[n]{b}$ (compară cu soluţia problemei 148). De aici rezultă că bazele dreptunghiurilor reprezentate în fig. 147 sînt respectiv egale cu

$$q - 1,\ q(q-1),\ q^2(q-1), \ldots, q^{n-1}(q-1),$$

iar înălţimile cu

$$\log_a q,\ \log_a q^2 = 2\log_a q,\ \log_a q^3 = 3\log_a q, \ldots, \log_a q^n = n \log_a q.$$

Astfel, aria triunghiului curbiliniu ABC va fi egală cu limita, pentru $n \to \infty$, a sumei

$$S_n = (q-1)\log_a q + q(q-1)\cdot 2\log_a q + q^2(q-1)\cdot 3\log_a q + \ldots$$
$$\ldots + q^{n-1}(q-1)n\log_a q = (q-1)(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1})\log_a q.$$

Însă [v. mai jos problema 168, b)]

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n - 1}{(q-1)^2};$$

deci

$$S_n = nq^n \log_a q - \frac{(q^n - 1)\log_a q}{q-1}$$

sau, deoarece $q = \sqrt[n]{b}$, $\log_a q = \frac{1}{n}\log_a b$,

$$S_n = b\log_a b - \frac{(b-1)\log_a b}{n(\sqrt[n]{b} - 1)}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = \ln b$ [v. problema 159, c)]: deci

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = b\log_a b - (b-1)\frac{\log_a b}{\ln b} = b\log_a b - \frac{b-1}{\ln a} = \frac{b\ln b - b + 1}{\ln a}$$

(v. trimiterea de la p. 349).

Observație. Dacă vom determina aria în problema b) independent de soluția problemei a) [v. rezolvarea a doua a problemei b)], atunci din formula obținută nu este greu să găsim rezultatul problemei a) [compară cu prima soluție a problemei b)].

154. Rezolvarea acestei probleme este analoagă cu rezolvarea a doua a problemei 153, b). Vom împărți segmentul AB, unde $OA = 1$, $OB = b$, prin punctele $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$ în n părți astfel ca $\frac{OM_1}{1} = \frac{OM_2}{OM_1} =$

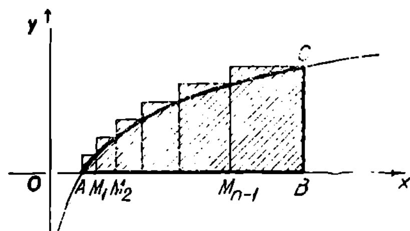


Fig. 147

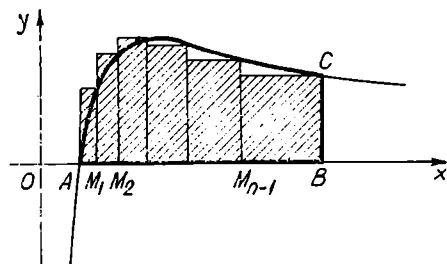


Fig. 148

$= \frac{OM_3}{OM_2} = \cdots = \frac{OM_{n-1}}{b}$ (fig. 148). În acest caz, bazele dreptunghiurilor reprezentate în fig. 148 vor fi respectiv egale cu

$$q - 1, \quad q(q-1), \quad q^2(q-1), \ldots, q^{n-1}(q-1),$$

unde $q = \sqrt[n]{b}$, iar înălțimile vor fi egale cu

$$\frac{\log_a q}{q}, \quad \frac{2\log_a q}{q^2}, \quad \frac{3\log_a q}{q^3}, \ldots, \frac{n\log_a q}{q^n}$$

[compară cu soluția problemei 153 b)]. De aici, rezultă că aria S a triunghiului curbiliniu ABC este egală cu limita, pentru $n \to \infty$, a sumei

$$S_n = \frac{(q-1)\log_a q}{q} + \frac{2(q-1)\log_a q}{q} + \cdots + \frac{n(q-1)\log_a q}{q} =$$

$$= \frac{q-1}{q}\log_a q(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{q-1}{q}\log_a q$$

sau, deoarece $q = \sqrt[n]{b}$, $\log_a q = \frac{1}{n}\log_a b$,

$$S_n = \frac{n+1}{2}\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\sqrt[n]{b}}\log_a b = \frac{1}{2}n(\sqrt[n]{b}-1)\log_a b\frac{n}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\cdot$$

Deoarece conform rezultatului la problema 159, c)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b} - 1) = \ln b$$

şi evident [1],

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1,$$

atunci [2]

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \ln b \log_a b = \frac{1}{2} \ln a \, (\log_a b)^2.$$

În particular, aria triunghiului curbiliniu mărginit de curba $y = \frac{\ln x}{x}$, de axa absciselor şi de dreapta $x = b$ este egală cu $\frac{1}{2}\ln^2 b$, iar aria triunghiului curbiliniu mărginit de curba $y = \frac{\log x}{x}$, axa absciselor şi dreapta $x = b$ este egală cu

$$\frac{1}{2} \ln 10 \lg^2 b \approx 1{,}15 \lg^2 b.$$

155. Vom determina aria suprafeţei mărginite de parabola de gradul k, $y = x^k$, de axa absciselor şi de dreapta $x = b$, alegînd punctele $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_{n-1}$ (v. p. 51), astfel ca ele să dividă segmentul OD în n părţi egale. Suma S_n se calculează la fel ca în rezolvarea problemei 146; ea este egală cu

$$S_n = h[h^k + (2h)^k + \ldots + (nh)^k] = h^{k+1}(1^k + 2^k + \ldots + n^k),$$

unde $h = b/n$. Astfel, aria căutată este egală cu

$$S = \lim_{n\to\infty} b^{k+1} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}.$$

Dar, din soluţia problemei 148, b) se ştie că $S = b^{k+1}/(k+1)$. De aici rezultă că pentru orice $k > -1$ [v. observaţia în rezolvarea problemei 148, b)]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Pentru k număr întreg pozitiv, proprietatea din problema noastră poate fi demonstrată, de asemenea, pur algebric (v., de exemplu, soluţiile problemelor 151 şi 316 din cartea [56].

---

[1] Compară cu trimiterea de la p. 341.

[2] Compară cu trimiterea de la p. 349.

156. a) Este suficient să demonstrăm că pentru $n > m$ are loc inegalitatea

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] > \log\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]$$

sau

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) > m\log\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Vom lua logaritmii în baza e (v. problemele 149—152); în acest caz, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este aria trapezului curbiliniu $ABDC$ mărginit de hiperbola $y=1/x$, de axa absciselor și de dreptele $x = 1$ și $x = 1 + \frac{1}{n}$; în mod analog se determină și $\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$ (fig. 149). Fie $ABNK$ dreptunghiul cu baza AB, egal în mărime cu trapezul curbiliniu $ABDC$; în acest caz, $S_{ABNK} = AB \cdot AK = \frac{1}{n} AK$ și, deci,

$$\frac{1}{n} AK = S_{ABDC} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad AK = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

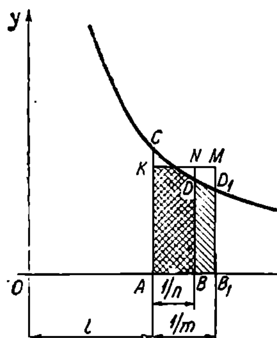


Fig. 149

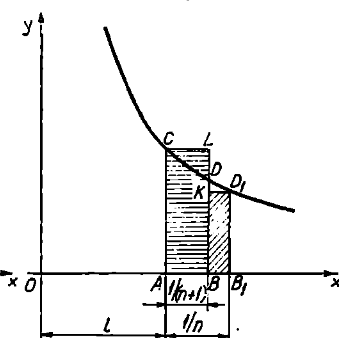


Fig. 150

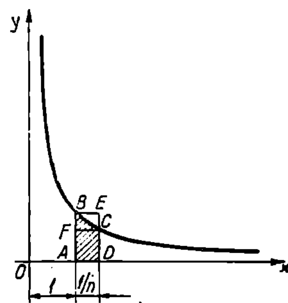


Fig. 151

Mai departe, deoarece, cu notațiile din fig. 149, $S_{ABNK} = S_{ABDC}$ și $S_{BB_1MN} > S_{BB_1D_1D}$, atunci, evident $S_{AB_1MK} > S_{AB_1D_1C}$. Însă, $S_{A_1B_1MK} = AB_1 \cdot AK = \frac{1}{m}AK = \frac{1}{m}\, n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $S_{AB_1D_1C} = \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$ deci

$$\frac{1}{m}\, n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{m}\right), \quad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Este suficient să demonstrăm că pentru orice număr întreg pozitiv n are loc inegalitatea

$$\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] > \log\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right].$$

Vom forma diferența

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] - \ln\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= (n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right] - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

(logaritmii sînt naturali!). Dar $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ este aria trapezului curbiliniu BB_1D_1D mărginit de hiperbola $y = 1/x$, de axa absciselor și de dreptele $x = 1+\frac{1}{n}$, $x = 1+\frac{1}{n+1}$; $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ este aria trapezului curbiliniu $ABDC$ mărginit de aceeași hiperbolă, de axa absciselor și de dreptele $x = 1$ și $x = 1+\frac{1}{n+1}$ (fig. 150). Aria trapezului curbiliniu BB_1D_1D este mai mare decît aria dreptunghiului BB_1D_1K, care este egală cu

$$BB_1\cdot B_1D_1 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2;$$

deci,

$$(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right] > (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Aria trapezului curbiliniu $ABDC$ este mai mică decît aria dreptunghiului $ABLC$, care este egală cu

$$AB\cdot AC = \frac{1}{n+1}\cdot 1 = \frac{1}{n+1};$$

deci,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n+1}.$$

Din compararea celor două inegalități obținute rezultă

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]-\ln\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}\right]=$$

$$=(n+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cele ce urmează, este important că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ și $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ coincid cu numărul e definit pe cale geometrică în enunțul problemei 151. Pentru demonstrația acestui fapt este suficient să demonstrăm că pentru orice n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}; \qquad (*)$$

de aici și din faptul că șirurile din problemele 156, a) și b) tind către aceeași limită, rezultă că această limită poate fi numai numărul e. Însă deoarece $\ln \mathrm{e}=1$, inegalitățile (*) sînt echivalente cu următoarele:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (**)$$

Numărul $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este egal cu aria trapezului curbiliniu $ABCD$ mărginit de hiperbola $y=1/x$, axa absciselor și dreptele $x=1$ și $x=1+\frac{1}{n}$ (fig. 151). Însă aria acestui trapez este cuprins între ariile dreptunghiurilor $ABED$ și $AFCD$ cu baza comună $AD=1/n$ și cu înălțimile $AB=1$ și $CD=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}$. Obținem astfel

$$\frac{1}{n}\cdot 1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

de unde rezultă inegalitățile cerute (**).

Observație. O demonstrație pur algebrică a proprietăților din problemele 156, a) și b) se află, de exemplu, în [56].

157. Fie, mai întîi, z pozitiv. Vom considera trapezul curbiliniu $ABCD$ mărginit de hiperbola $y = \frac{1}{x}$, axa absciselor și dreptele $x = 1$ și $x = 1 + \frac{z}{n}$ (fig. 152, *a*). Aria acestui trapez este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor $ABED$ și $AFCD$, adică între $\frac{z}{1} \cdot 1$ și $\frac{z}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{n}} = \frac{z}{n + z}$ (compară cu sfîrșitul rezolvării problemei 156). De aici rezultă că

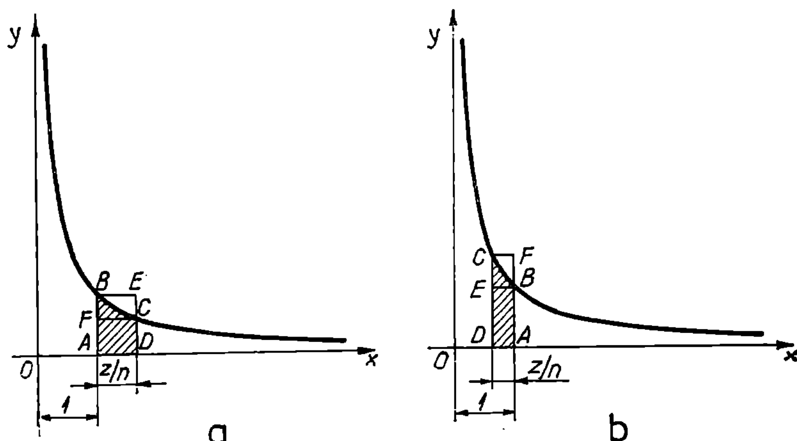


Fig. 152

$$\frac{z}{n} > \ln\left(1 + \frac{z}{n}\right) > \frac{z}{n + z} \quad \text{sau} \quad z > \ln\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right] > \frac{z}{1 + \frac{z}{n}}.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obținem

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right] = z,$$

de unde, conform definiției logaritmilor naturali, rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

În mod analog, se consideră şi cazul z negativ (fig. 152, b). Aici $S_{ABED} = -\frac{z}{n}\cdot 1$, $S_{AFGD} = -\frac{z}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{z}{n-z}$, $S_{ABCD} = -\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$ (amintim că z este negativ; (v. p. 53) şi din fig. 152, b rezultă

$$-\frac{z}{n} < -\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) < -\frac{z}{n-z} \quad \text{sau} \quad \frac{z}{n} > \ln\left(1-\frac{z}{n}\right) > \frac{z}{n-z}$$

sau, în sfîrşit,

$$z > \ln\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right] > \frac{z}{1-\frac{z}{n}}\cdot$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obţinem din nou

$$\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right] = z, \quad \text{de unde} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

158. Vom transforma expresia $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ folosind formula binomului lui Newton:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + \frac{z}{n}\,\frac{n}{1} + \frac{z^2 n(n-1)}{n^2 2!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{z^n}{n^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!} =$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{z^3}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{z^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Putem scrie

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n,$$

unde

$$u_k = \frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Termenii u_k ai sumei verifică, evident, următoarele inegalităţi:

$$|u_k| \leqslant \frac{|z^k|}{k!}, \quad \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{|z|\left(1-\frac{k}{n}\right)}{k+1} < \frac{|z|}{k+1}\cdot$$

Din a doua din aceste inegalități rezultă că

$$|u_{k+1}| < |u_k| \frac{|z|}{k+1}; \quad |u_{k+2}| < |u_{k+1}| \frac{|z|}{k+2} < |u_k| \frac{|z|^2}{(k+1)^2};$$

$$|u_{k+3}| < |u_{k+2}| \frac{|z|}{k+3} < |u_k| \frac{|z|^3}{(k+1)^3}, \ \dots$$

Vom alege acum pe k astfel încît să fie satisfăcută relația $k + 1 > |z|$ (aceasta este totdeauna posibil, deoarece vom trece apoi la limită pentru $n \to \infty$ și, deci, sumele considerate vor conține un număr suficient de termeni). Pentru acești k

$$|u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n| \leqslant |u_{k+1}| + |u_{k+2}| + \dots + |u_n| <$$

$$< |u_k| \left[\frac{|z|}{k+1} + \left(\frac{|z|}{k+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{|z|}{k+1}\right)^{n-k}\right] <$$

$$< |u_k| \frac{\frac{|z|}{k+1}}{1 - \frac{|z|}{k+1}} = |u_k| \frac{|z|}{k+1-|z|} \leqslant \frac{|z|^{k+1}}{k!\,(k+1-|z|)}.$$

Însă

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k) = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n,$$

așa că

$$\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k)\right| < \frac{|z|^{k+1}}{k!\,(k+1-|z|)}.$$

De aici, rezultă

$$\left|\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k)\right]\right| < \frac{|z|^{k+1}}{k!\,(k+1-|z|)}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u^k = \frac{z^k}{k!}$ iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ (v. problema 157), atunci

$$\left|e^z - \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!}\right)\right| \leqslant \frac{|z|^{k+1}}{k!\,(k+1-|z|)}.$$

Însă este evident că

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{k+1}}{k!\,(k+1-|z|)} = 0.$$

Deci,

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^z-\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}\right)\right]=0,$$

iar aceasta înseamnă că

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

159. a) După cum se știe $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ este egal cu aria trapezului curbiliniu $ABCD$ mărginit de hiperbola $y=1/x$, axa absciselor și dreptele $x=1$ și $x=1+\frac{1}{n}$ (v. fig. 151). Deoarece aria acestui trapez este mai mică decît aria dreptunghiului $ABED$ și mai mare decît aria dreptunghiului $AFCD$, rezultă

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}.$$

De aici

$$1>n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1};\qquad \lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Observație. Afirmația din problema de față este echivalentă cu faptul că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ (compară cu sfîrșitul rezolvării problemei 156).

b) După cum se știe, $\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}$ (v. trimiterea de la p. 349). Astfel,

$$\lim_{n\to\infty}n\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}.$$

c) Să ne amintim că aria trapezului curbiliniu $ABCD$ mărginit de hiperbola $y=\frac{1}{x}$, axa absciselor și dreptele $x=1$ și $x=\sqrt[n]{a}$ este egală cu $\ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\ln a.$

Aria trapezului mărginit de hiperbola $y = 1/x$ şi dreptele $x = 1$ şi $x = 1 + \frac{1}{n} \ln a$ este, evident, mai mică decît aria dreptunghiului cu baza $\frac{1}{n} \ln a$ şi cu înălţimea 1 (v. fig. 153, *a*), adică este mai mică decît $\frac{1}{n} \ln a$; de aici rezultă că

$$\sqrt[n]{a} > 1 + \frac{1}{n} \ln a.$$

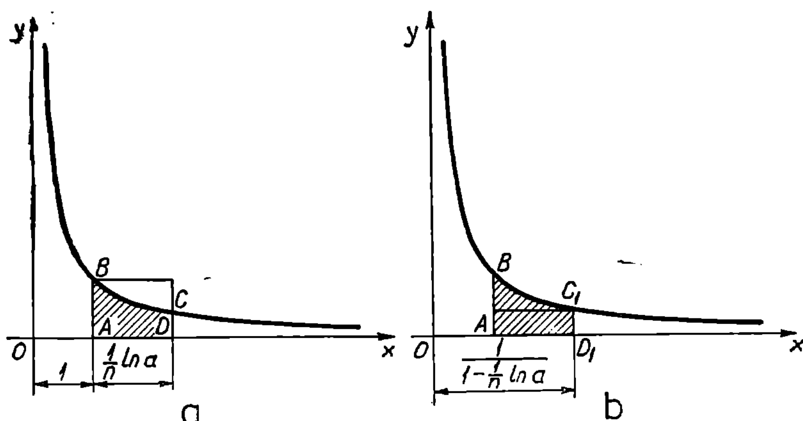


Fig. 153

La fel, aria mărginită de hiperbola $y = 1/x$ şi dreptele $x = 1$ şi $x = \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \ln a}$ este mai mare decît aria dreptunghiului cu baza $\frac{1}{1 - \frac{1}{n} \ln a} - 1$ şi înălţimea $1 - \frac{1}{n} \ln a$ (fig. 153, *b*), adică este mai mare decît $\frac{1}{n} \ln a$; deci, $\sqrt[n]{a} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \ln a}$. Astfel,

$$\frac{1}{n} \ln a < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \ln a} - 1 = \frac{\frac{1}{n} \ln a}{1 - \frac{1}{n} \ln a},$$

adică

$$\ln a < n(\sqrt[n]{a} - 1) < \frac{\ln a}{1 - \frac{1}{n} \ln a}, \quad \text{de unde} \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a.$$

160. Să considerăm suma ariilor a $n - 1$ trapeze (mai exact, a unui dreptunghi şi a $n - 2$ trapeze) de înălţime 1, înscrise în curba $y = \ln x$ (fig. 154, *a*). Deoarece bazele trapezului al k-lea sînt egale cu $\ln k$ şi $\ln(k+1)$, suma considerată este egală cu

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 4 + \ln 3}{2} + \cdots + \frac{\ln n + \ln(n-1)}{2} =$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n.$$

Deoarece aria $S^{(n)}$ a trapezului curbiliniu mărginit de curba $y = \ln x$ şi dreapta $x = n$ este, evident, mai mare decît suma ariilor trapezelor noastre, avem

$$S^{(n)} > \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n,$$

iar, în acest caz, diferenţa

$$K^{(n)} = S^{(n)} - \left[\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n\right]$$

creşte odată cu n (această diferenţă este egală cu suma ariilor a $n - 1$ segmente tăiate din curba $y = \ln x$ de coardele care mărginesc trapezele noastre, iar cînd n creşte, la această sumă se adaugă ariile unor noi segmente).

Vom construi acum $n - 2$ trapeze, fiecare dintre ele mărginit de dreptele $x = k - 0{,}5$ şi $x = k + 0{,}5$ şi de tangenta la curba $y = \ln x$ în punctul de abscisă $x = k$ (k parcurge valorile 2, 3, 4, ..., $n - 1$), şi le vom adăuga încă un trapez mărginit de dreptele $x = 1$ şi $x = 1{,}5$ şi de tangenta la curba

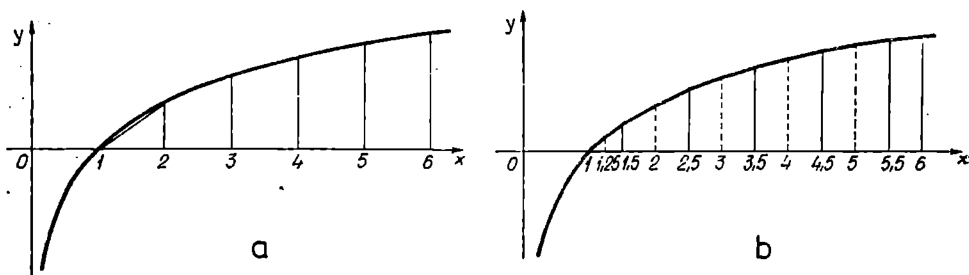


Fig. 154

$y = \ln x$ în punctul de abscisă $x = 1{,}25$ şi un dreptunghi de înălţime $\ln n$ cu laturile situate pe dreptele $x = n - \frac{1}{2}$ şi $x = n$ (fig. 154, *b*). Deoarece linia de mijloc a trapezului al k-lea este egală cu $\ln(k+1)$, iar linia de mijloc

a trapezului mic adăugat este egală cu ln 1,25, aria întregii figuri obținute va fi egală cu

$$[\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln (n-1)] + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} =$$

$$= \left[\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln (n-1) + \frac{1}{2} \ln n\right] + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}.$$

Dar această arie este mai mare decît aria $S^{(n)}$, deci

$$\left[\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln (n-1) + \frac{1}{2} \ln n\right] + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} > S^{(n)}.$$

De aici rezultă că, pentru orice n,

$$K^{(n)} < \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}.$$

În rezolvarea problemei 153, b), s-a arătat că $S^{(n)} = n \ln n - n + 1$ Pe de altă parte,

$$\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln (n-1) + \ln n = \ln 2 \cdot 3 \ldots n = \ln n!.$$

Utilizînd aceste relații, putem scrie expresia pentru $K^{(n)}$ în modul următor:

$$K^{(n)} = (n \ln n - n + 1) - \left(\ln n! - \frac{1}{2} \ln n\right) =$$

$$= \ln n^n - \ln e^n + 1 - \ln n! + \ln \sqrt{n} = \ln \frac{n^n \sqrt{n}}{n!\, e^n} + 1.$$

Deoarece $0 < K^{(n)} < \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$ pentru orice n, rezultă

$$0 < \ln \frac{n^n \sqrt{n}}{n!\, e^n} + 1 < \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4},$$

adică

$$-1 < \ln \frac{n^n \sqrt{n}}{n!\, e^n} < -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} \quad \text{sau}$$

$$1 > \ln \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} > 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4},$$

de unde, trecînd la exponenți, găsim

$$e > \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} > \sqrt{\frac{4}{5}}\, e \quad \text{sau} \quad e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n > n' > \sqrt{\frac{4}{5}}\, e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

161. Vom continua raţionamentul folosit la obţinerea soluţiei problemei 160. Deoarece $K^{(n)}$ creşte odată cu n, însă rămîne tot timpul **mai mic decît** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$, această mărime trebuie să aibă o limită **determinată, de asemenea,** nu mai mare decît $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$ (însă, evident, pozitivă, **deoarece** $K^{(n)}$ **este pozitiv** pentru orice n). Deci,

$$\lim_{n\to\infty} K^{(n)} = K, \text{ unde } 0 < K \leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\cdot$$

Dar, în rezolvarea problemei 160 s-a arătat că

$$K^{(n)} = \ln\frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n} + 1;$$

deci dacă există limita $K = \lim\limits_{n\to\infty} K^{(n)}$, atunci există şi limita

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}, \quad \text{deci} \quad e > C \geqslant \sqrt{\frac{4}{5}}\,e,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru a determina valoarea numerică a limitei C a raportului $\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = C^{(n)}$, vom folosi formula lui Wallis (problema 145)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right\},$$

pe care o putem scrie sub forma

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots 2n)^2\,(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{[2^n(n!)]^4}{[(2n)!]^2\,(2n+1)}$$

sau

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^2(n!)^2}{(2n)!\cdot\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}\cdot$$

Vom pune în ultima egalitate

$$n! = C^n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (2n)! = C^{(2n)}\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n};$$

vom obține

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(C^{(n)})^2 n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{C^{(2n)}\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(C^{(n)})^2}{C^{(2n)}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}}.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty} C^{(n)} = \lim_{n\to\infty} C^{(2n)} = C, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}} = \sqrt{2};$$

deci

$$\sqrt{\pi} = \frac{C^2}{C\sqrt{2}}, \text{ de unde } C = \sqrt{2\pi},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

162. a) $\ln n$ este egal cu aria trapezului curbiliniu $ABCD$ mărginit de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor și dreptele $x = 1$ și $x = n$.

Vom construi, acum, o figură în trepte din n dreptunghiuri, ale căror baze sînt toate egale cu unu, iar înălțimile sînt egale respectiv cu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1}$ (fig. 155, *a*). Evident că aria trapezului curbiliniu $ABCD$, egală cu $\ln n$, este mai mică decît aria acestei figuri în trepte. De aici rezultă că

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} > \ln n,$$

adică

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n > 0.$$

Vom înscrie acum în același trapez curbiliniu o figură în trepte formată din n dreptunghiuri cu bazele egale cu unu și cu înălțimile respectiv egale cu $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ (fig. 155, *b*). Deoarece aria acestei figuri în trepte este mai mică decît $ABCD$, rezultă

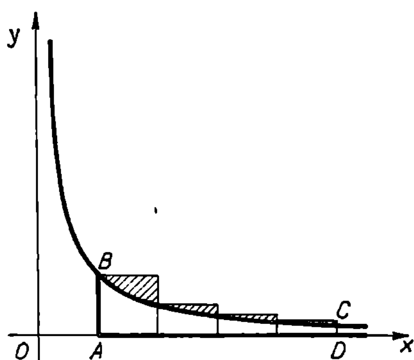
$$\ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Deci

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n < 1 - \frac{1}{n}.$$

Astfel, pentru orice n, $0 < \gamma_n < 1$.

b) Cînd n creşte, mărimea γ_n creşte; într-adevăr, γ_n este diferenţa dintre aria figurii în trepte, formată din dreptunghiuri, şi aria trapezului curbiliniu $ABCD$, adică γ_n este egal cu suma ariilor părţilor din dreptunghiuri, haşurate în fig. 155, *a*. Deoarece cînd n creşte diferenţa



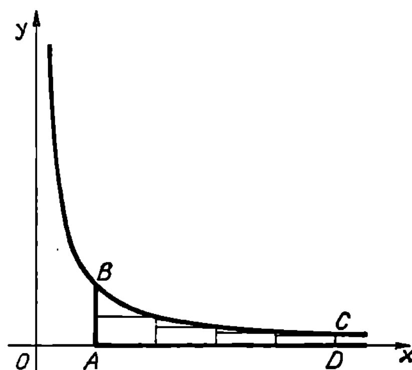


Fig. 155

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$$

creşte, însă rămîne tot timpul mai mică decît 1, ea are limita γ care de asemenea nu este mai mare decît unu (însă, bineînţeles, mai mare decît zero, deoarece toţi γ_n sînt pozitivi). Cu aceasta, problema 162 este complet rezolvată.

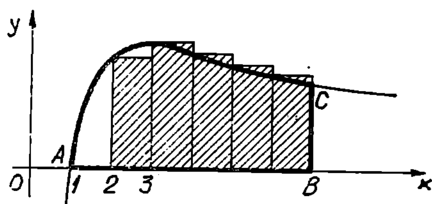


Fig. 156

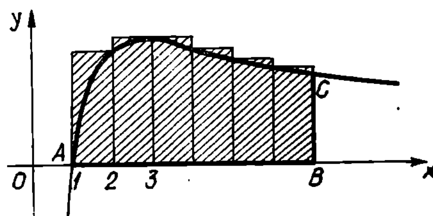


Fig. 157

163. a) Suma

$$\frac{\lg 1}{1} + \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} + \ldots + \frac{\lg (n-1)}{n-1}$$

este egală cu aria figurii în trepte haşurată în fig. 156. Pentru n mare, această arie nu va fi diferită prea mult de aria triunghiului curbiliniu ABC, egală, conform rezultatului la problema 154, cu $\frac{\ln 10}{2} \lg^2 n$ ($\approx 1{,}15 \lg^2 n$). De aceea,

este firesc să ne gîndim că numărul căutat C va fi $\frac{\ln 10}{2}$. Vom evalua diferența

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\ldots+\frac{\lg n}{n}-C\lg^2 n,$$

unde $C=\frac{\ln 10}{2}$; pentru aceasta trebuie, mai întîi, să studiem mai exact forma curbei $y=\frac{\lg x}{x}$. Evident, că, pentru $x\to 0$, mărimea $\frac{\lg x}{x}$ tinde către $-\infty$, pentru $x=1$ ea este egală cu zero, iar pentru $x\to\infty$ dinde către zero (ultima afirmație rezultă din faptul că raportul dintre numărul cifrelor din scrierea în baza zece a numărului n și însuși numărul n pentru $n\to\infty$ tinde către zero, iar numărul de cifre ale lui n diferă de $\lg n$ nu mai mult decît cu 1). Vom utiliza acum faptul că

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}}<\sqrt[n(n+1)]{\frac{4}{n}}$$

[v. problema 156, *a*)]; deci, pentru $n\geqslant 4$ are loc inegalitatea $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$.

Însă $\sqrt{2}=1,41,\ldots,\sqrt[3]{3}=1,44\ldots$ și $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}=1,41,\ldots,$ deci

$$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3} \text{ și } \sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}>\ldots$$

Logaritmînd aceste inegalități, vom obține

$$\frac{\lg 2}{2}<\frac{\lg 3}{3} \text{ și } \frac{\lg 3}{3}>\frac{\lg 4}{4}>\frac{\lg 5}{5}>\frac{\lg 6}{6}>\ldots$$

De aici, se vede că valoarea lui $\frac{\lg x}{x}$, cînd x crește, la început crește, apoi undeva între $x=2$ și $x=4$ ia valoarea cea mai mare și după aceea descrește. Pentru a vedea mai exact unde anume între 2 și 4 această mărime ia valoarea cea mai mare, mai sînt necesare cercetări suplimentare.

Vom compara valorile $\frac{\lg 2,5}{2,5}$ și $\frac{\lg 3}{3}$:

$$\frac{\lg 2,5}{2,5}=\frac{\lg 10/4}{10/4}=\frac{4(1-2\lg 2)}{10}=\frac{4(1-0,60206\ldots)}{10}=0,15917\ldots$$

$$\frac{\lg 3}{3}=\frac{0,47712\ldots}{3}=0,15904\ldots$$

Deci, $\frac{\lg 2,5}{2,5}>\frac{\lg 3}{3}$, de unde rezultă că cea mai mare valoare a lui $\frac{\lg x}{x}$ se

obține pentru x cuprins între 2 și 3[1]. Astfel, curba $y = \frac{\lg x}{x}$ are într-adevăr forma reprezentată în fig. 26. În acest caz, cea mai mare valoare a lui $\frac{\lg x}{x}$ nu poate fi mai mare decît $\frac{\lg 3}{2}$ (deoarece $\lg x < \lg 3$ pentru $2 < x < 3$, iar $x > 2$).

Aria triunghiului curbiliniu ABC va fi pentru orice n mai mică decît aria figurii în trepte hașurată în fig. 157. Însă aria acestei figuri în trepte este mai mică decît

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 4}{4}+\dots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}$$

(aria primului dreptunghi este egală cu $\frac{\lg 2}{2}$, a celui de-al doilea este mai mică decît $\frac{\lg 3}{2}$, a celui de-al treilea este egală cu $\frac{\lg 3}{3}$, a celui de-al patrulea este adică cu $\frac{\lg 4}{4}$ etc.). Deoarece $\frac{\lg 1}{1} = 0$, se poate scrie

$$\frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\dots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}+\frac{\lg 3}{2} > C\lg^2 n,$$

adică

$$\delta_n = \frac{\lg 1}{1}+\frac{\lg 2}{2}+\dots+\frac{\lg (n-1)}{n-1} - C\lg^2 n > -\frac{\lg 3}{2}.$$

Pe de altă parte, aria triunghiului curbiliniu ABC este mai mare decît aria trapezului curbiliniu $MDEN$; cu atît mai mult, ea este mai mare decît aria figurii în trepte hașurată în fig. 158.

Aria acestei figuri în trepte este egală cu

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 4}{4}+\frac{\lg 5}{5}+\dots$$
$$\dots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}.$$

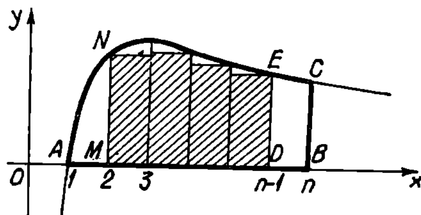


Fig. 158

Deci,

$$\frac{\lg 2}{2}+\frac{\lg 3}{3}+\frac{\lg 4}{4}+\dots+\frac{\lg (n-1)}{n-1}-\frac{\lg 3}{3} < C\lg^2 n,$$

[1] Se poate demonstra că cea mai mare valoare se obține pentru $x = e \approx 2{,}718$). Aici nu avem nevoie de acest lucru.

unde $C = \frac{\ln 10}{2}$, adică

$$\delta_n = \frac{\lg 1}{1} + \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} + \dots + \frac{\lg (n-1)}{n-1} - C \lg^2 n < \frac{\lg 3}{3}.$$

Deoarece $-\frac{\lg 3}{2} = -0{,}238\dots$ şi $\frac{\lg 3}{3} = 0{,}159\dots$, obţinem

$$-0{,}238\dots < \delta_n < 0{,}159\dots \text{ şi cu atît mai mult } -\frac{1}{4} < \delta_n < \frac{1}{4}.$$

b) Diferenţa

$$\varepsilon_n = \frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 4}{4} + \frac{\lg 5}{5} + \dots + \frac{\lg (n-1)}{n-1} - (C \lg^2 n - C \lg^2 2),$$

unde $C = \frac{\ln 10}{2}$, iar $n \geqslant 3$, este, evident, egală cu partea trapezului curbiliniu $MBCN$ rămasă nehaşurată în fig. 158. De aici, este clar că această diferenţă, cînd n creşte, va creşte tot timpul. Însă conform rezultatului la problema a), mărimea $\varepsilon_n = \delta_n - \frac{\lg 3}{3} + C \lg^2 2$ rămîne, pentru orice n, mai mică decît $\frac{1}{4} - \frac{\lg 3}{3} + C \lg^2 2$. Deci ε_n, pentru $n \to \infty$, tinde către o limită determinată ε. Aşadar, cînd $n \to \infty$, şirul de mărimi $\delta_n = \varepsilon_n + \frac{\lg 3}{3} - C \lg^2 2$ va tinde, de asemenea, către o anumită limită δ $\left(\delta = \varepsilon + \frac{\lg 3}{3} - C \lg^2 2\right)$.

164. Această problemă se rezolvă în mod analog cu problema 162, a). Fie $ABCD$ trapezul curbiliniu mărginit de curba $y = 1/x^l$, axa absciselor şi dreptele $x = 1$ şi $x = n$. Vom considera figura în trepte formată din $n - 1$ dreptunghiuri cu baza 1, înscrisă în acest trapez curbiliniu şi figura în trepte din $n - 1$ dreptunghiuri cu baza 1, circumscrisă acestui trapez curbiliniu (v. fig. 155, *a* şi *b*). Ariile acestor figuri în trepte sînt egale cu

$$1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l} \quad \text{şi} \quad \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l} + \frac{1}{n^l},$$

iar aria trapezului curbiliniu $ABCD$ este egală cu $\left(1 - \frac{1}{n^l}\right) \Big| (l-1)$ [v. rezolvarea problemei 148, a)]. De aici rezultă că

$$\frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l} + \frac{1}{n^l} < \frac{1 - \frac{1}{n^l}}{l-1} < 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l}$$

sau

$$\frac{1-\frac{1}{n^l}}{l-1} < 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l} < \frac{1-\frac{1}{n^l}}{l-1} + 1 - \frac{1}{n^l}$$

sau, în sfîrşit,

$$\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l-1}\frac{1}{n^l} < 1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{(n-1)^l} < \frac{l}{l-1} - \frac{1}{l-1}\frac{1}{n^l}.$$

Deoarece $1/n^l \to 0$ pentru $n \to \infty$, din această inegalitate rezultă afirmaţia din problema $\Big[$pentru $n \to \infty$, suma $1 + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \dots + \frac{1}{n^l}$ tinde către o limită determinată, deoarece această sumă creşte odată cu n şi rămîne tot timpul mai mică decît $l/(l-1)\Big]$.

165. Vom nota primele r numere prime cu $p_1, p_2, \dots, p_r$ (cum se alege numărul r, vom arăta mai jos) şi vom şterge mai întîi din numărul numerelor întregi, care nu sînt mai mari decît N, toate numerele care se divid cu p_1, apoi toate numerele care se divid cu p_2, apoi toate numerele care se divid cu p_3 etc. (toate aceste numere, în afară de înseşi numerele $p_1, p_2, \dots, p_r$, sînt neprime). Numărul numerelor care nu sînt mai mari decît N şi care se divid cu p_1 este evident egal cu partea întreagă $\left[\frac{N}{p_1}\right]$ a fracţiei $\frac{N}{p_1}$ (relativ la notaţii v. p. 10). Numărul numerelor întregi care nu sînt mai mari decît N şi care se divid cu p_2 este egal cu $\left[\frac{N}{p_2}\right]$; însă, printre aceste numere vor fi $\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]$ numere care se divid şi cu p_1 şi cu p_2, iar toate aceste numere le-am suprimat mai înainte. Deci, numărul numerelor întregi, care nu sînt mai mari decît N, divizibile cu p_1 sau cu p_2, este egal cu

$$\left[\frac{N}{p_1}\right] + \left[\frac{N}{p_2}\right] - \left[\frac{N}{p_1p_2}\right].$$

Mai departe, numărul numerelor întregi care nu sînt mai mari decît N şi care se divid cu p_3 este egal cu $\left[\frac{N}{p_3}\right]$. Însă printre aceste numere vor fi $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]$ numere care se divid cu p_3 şi p_1 şi $\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$ numere întregi care se divid cu p_3 şi cu p_2; toate aceste numere le-am suprimat mai înainte. Însă, pentru a determina numărul numerelor care se divid cu p_3 şi care nu se divid nici cu p_1 nici cu p_2 nu este suficient să scădem din $\left[\frac{N}{p_3}\right]$ suma $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right] + \left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$. Într-

adevăr, printre cele $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]$ numere, care se divid cu p_3 şi cu p_1, şi printre cele $\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$ numere, care se divid cu p_3 şi cu p_2, există $\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]$ numere comune (acestea sînt numere care se divid şi cu p_1 şi cu p_2 şi cu p_3); deci scăzînd din numărul $\left[\frac{N}{p_3}\right]$ suma $\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]$, toate aceste numere le scădem de două ori. Rezultă deci că numărul numerelor care nu sînt mai mari decît N şi sînt divizibile cu p_1 sau cu p_2 sau cu p_3 este egal cu

$$\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\left\{\left[\frac{N}{p_3}\right]-\left(\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]\right)\right\}=$$
$$=\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_2p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]^{1)}.$$

În mod analog, se arată că numărul total al numerelor care nu sînt mai mari decît N, şi sînt divizibile cu p_1 sau cu p_2 sau cu p_3 ... sau cu p_r este egal cu

$$\left[\frac{N}{p_1}\right]+\left[\frac{N}{p_2}\right]+\dots+\left[\frac{N}{p_r}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]-\dots-\left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right]+$$
$$+\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2p_4}\right]+\dots+\left[\frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}\right]-\dots+(-1)^{r-1}\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right]^{2)}$$

şi, deci, printre numerele 1, 2, 3, ..., N există

$$N-\left[\frac{N}{p_1}\right]-\left[\frac{N}{p_2}\right]-\dots-\left[\frac{N}{p_r}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\dots+\left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right]-$$
$$-\left[\frac{N}{p_1p_2p_3}\right]-\left[\frac{N}{p_1p_2p_4}\right]-\dots-\left[\frac{N}{p_{r-2}p_{r-1}p_r}\right]+\dots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right]$$

numere care nu se divid nici cu p_1, nici cu p_2, nici cu p_3, ..., nici cu p_r.

Ultima formulă ne permite să evaluăm numărul numerelor prime care nu sînt mai mari decît N. Anume, astfel de numere sînt cele r numere p_1, p_2, p_3, ..., p_r şi încă alte numere care nu se divid nici cu p_1, nici cu p_2, ..., nici cu p_r. Deci

$$\pi(N)\leqslant r+\left\{N-\left[\frac{N}{p_1}\right]-\left[\frac{N}{p_2}\right]-\dots-\left[\frac{N}{p_r}\right]+\left[\frac{N}{p_1p_2}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{N}{p_1p_3}\right]+\dots+\left[\frac{N}{p_{r-1}p_r}\right]-\dots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right]\right\}.$$

---

1) Compară cu problema 11.

2) Demonstraţia completă nu este greu de obţinut folosind metoda inducţiei complete [compară cu prima rezolvare a problemei 78, a)].

Vom simplifica, acum, ultima expresie. Dacă vom suprima din acolade semnul părţii întregi în toate funcţiile, obţinem expresia

$$N - \frac{N}{p_1} - \frac{N}{p_2} - \cdots - \frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_1 p_2} + \frac{N}{p_1 p_3} + \dots + \frac{N}{p_{r-1} p_r} -$$
$$- \frac{N}{p_1 p_2 p_3} - \frac{N}{p_1 p_2 p_4} - \dots - \frac{N}{p_{r-2} p_{r-1} p_r} + \dots + (-1)^r \frac{N}{p_1 p_2 \cdots p_r},$$

egală, cum este uşor de văzut, cu produsul

$$N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Deci aici se vede că numărul de termeni în expresia considerată este egal cu 2^r. Deoarece, atunci cînd suprimăm semnul părţii întregi în fiecare fracţie, facem o eroare mai mică decît 1, se poate afirma că

$$\pi(N) < r + 2^r + N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p^r}\right) < 2^r + 2^r +$$
$$+ N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 2^{r+1} + N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Acum, vom conveni să luăm numărul r astfel, încît

$$2^{r+1} > \sqrt{N}, \text{ adică } r + 1 < \frac{1}{2} \log_2 N;$$

de exemplu, vom considera că $p_1, p_2, \dots, p_r$ sînt toate numerele prime care nu sînt mai mari decît numărul $n = \left[\frac{1}{2} \log_2 N\right] - 1$ (în acest caz, odată cu modificarea numărului N, bineînţeles, se va modifica şi numărul r). Atunci, conform egalităţii precedente, raportul dintre mumărul $\pi(N)$ şi numărul N va fi, evident, mai mic decît

$$\frac{2^{\frac{1}{2} \log_2 N}}{N} + \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{N}}{N} + \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Cînd N crește nemărginit, primul termen al acestei expresii tinde către zero. Pentru a termina demonstrația, trebuie să mai arătăm că și al doilea termen tinde către zero. Vom considera espresia

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sînt toate numerele prime care nu sînt mai mari decît un anumit număr întreg n. Problema noastră va fi complet rezolvată, dacă vom demonstra că această expresie crește nemărginit odată cu n. Conform formulei care dă suma termenilor unei progresii geometrice, avem

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots > 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k},$$

k fiind un număr întreg o a r e c a r e. Deci,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}} > \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\ldots+\frac{1}{p_1^k}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_2^k}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}+\frac{1}{p_r^2}+\ldots+\frac{1}{p_r^k}\right).$$

Desfăcînd parantezele în ultima expresie, vom obține o sumă de fracții, ai căror numărători sînt egali cu unu, iar numitorii sînt numere întregi. În acest caz, luînd pe k suficient de mare, putem obține ca la numitor să figureze t o a t e numerele întregi care nu sînt mai mari decît n. Avem, deci,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Însă suma

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

poate fi făcută oricît de mare, pentru aceasta este suficient să alegem pe n suficient de mare (v. de exemplu, problema 162). De aici rezultă că produsul

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}$$

poate fi făcut oricît de mare și, deci, produsul

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

poate fi făcut oricît de mic. Cu aceasta demonstrația s-a încheiat.

166. Vom considera expresia $C_{2n}^n = (2n)!/(n!)^2$ și vom calcula în două moduri valoarea acestei expresii.

În primul rînd, datorită formulei binomului lui Newton, avem

$$1 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^n + \ldots + C_{2n}^{2n-1} + 1 = (1+1)^{2n} = 2^{2n},$$

și, deci,

$$C_{2n}^n < 2^{2n};$$

pe de altă parte,

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} =$$

$$= \frac{2n}{n}\,\frac{2n-1}{n-1}\,\frac{2n-2}{n-2}\cdots\frac{n+1}{1} > \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^n,$$

așa că

$$2^n < C_{2n}^n < 2^{2n}. \qquad (*)$$

În al doilea rînd, vom evalua același număr considerînd toate numerele prime în descompunerea acestui număr întreg în factori primi. Evident, că în desconpunerea numărului $C_{2n}^n = \dfrac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$ intră numai numerele prime nu mai mari decît $2n$. Mai departe, numărul prim p intră în descompunerea în factori primi ai numărului $k! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots k$ la puterea

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\ldots,$$

unde parantezele drepte înseamnă partea întreagă a numărului[1] (este ușor de văzut că printre factorii numărului $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$ există $\left[\frac{k}{p}\right]$ numere divizibile cu p; printre ele, $\left[\frac{k}{p^2}\right]$ numere divizibile cu p^2; printre ele, $\left[\frac{k}{p^3}\right]$ numere divizibile cu p^3 etc.). Astfel, în descompunerea numărului $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ în factori primi intră numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_r$ care nu sînt mai mari decît $2n$, iar fiecare număr p_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ apare la puterea

$$\left[\frac{2n}{p_i}\right]+\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]+\ldots+\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-2\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right)=$$

$$=\left(\left[\frac{2n}{p_i}\right]-2\left[\frac{n}{p_i}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^2}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right),$$

unde q_i este cel mai mare număr întreg pentru care $p_i^{q_i} \leqslant 2n$. Însă, conform definiției părții întregi, oricare ar fi numărul a,

$$2\left[\frac{a}{2}\right]=\begin{cases}[a], \text{ dacă } \frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]<\frac{1}{2},\\ [a]-1, \text{ dacă } \frac{a}{2}-\left[\frac{a}{2}\right]\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

adică $[a] - 2\left[\frac{a}{2}\right] = 0$ sau 1; deci suma

$$\left(\left[\frac{2n}{p_i}\right]-2\left[\frac{n}{p_i}\right]\right)+\left(\left[\frac{2n}{p_i^2}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^2}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{2n}{p_i^{q_i}}\right]-2\left[\frac{n}{p_i^{q_i}}\right]\right)$$

nu este mai mare decît $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } q_i \text{ ori}} = q_i$. Astfel, p_i intră ca factor în descompunerea numărului C_{2n}^n la o putere nu mai mare decît q_i; deci

$$C_{2n}^n \leqslant p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots p_r^{q_r} \leqslant (2n)(2n)\ldots(2n) = (2n)^r.$$

---

[1] Relativ la notații v. p. 10.

Dar $r = \pi(2n)$ (numărul numerelor prime nu mai mari decît $2n$); deci ultima inegalitate poate fi scrisă sub forma

$$C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

Pe de altă parte, $C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}$ se divide cu produsul tuturor numerelor prime $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_r$ mai mari decît n, însă nu mai mari decît $2n$ (am notat cu $p_1, p_2, \dots, p_s$ toate numerele prime nu mai mari decît n); deci

$$C_{2n}^n \geqslant p_{s+1}p_{s+2} \dots p_r.$$

Înlocuind fiecare din aceste numere prime cu numărul n mai mic decît ele, vom obține

$$C_{2n}^n > n \cdot n \dots n = n^{r-s}.$$

Însă $r = \pi(2n)$, iar $s = \pi(n)$ (numărul numerelor prime nu mai mari decît n). Astfel, avem în definitiv

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}. \qquad (**)$$

Din compararea inegalităților (*) și (**) se deduc teoremele cerute.

1° Comparînd inegalitățile (*) și (**), obținem

$$2^n < (2n)^{\pi(2n)}.$$

Logaritmînd, obținem

$$\pi(2n)\lg(2n) > n \lg 2,$$

adică

$$\pi(2n) > \frac{\lg 2}{2} \frac{2n}{\lg(2n)} = 0{,}15051 \dots \frac{2n}{\lg(2n)}.$$

Astfel, pentru valorile pare ale lui $N = 2n$ am obținut una dintre inegalitățile cerute. Pentru valori impare ale lui N se poate deduce o inegalitate asemănătoare din cea obținută, observînd că $\frac{2n}{2n+1} \geqslant \frac{2}{3}$. Deci

$$\pi(2n+1)\lg(2n+1) > \pi(2n)\lg(2n) > 0{,}15051 \dots \cdot 2n > \frac{2}{3} \cdot 0{,}15051 \dots \cdot (2n+1) =$$

$$= 0{,}10034 \dots \cdot (2n+1),$$

$$\pi(2n+1) > 0{,}10034\ldots\cdot\frac{(2n+1)}{\ln(2n+1)}\cdot$$

Astfel, pentru orice N avem

$$\pi(N) > 0{,}1\frac{N}{\lg N}\cdot \qquad (I)$$

2° Ceva mai complicat se demonstrează a doua din inegalitățile cerute. În primul rînd, comparînd inegalitățile (*) și (**), obținem

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < 2^{2n},$$

de unde, logaritmînd, avem $[\pi(2n)-\pi(n)]\lg n < 2n\lg 2$, adică

$$\pi(2n)-\pi(n) < 2\lg 2\frac{n}{\lg n} = 0{,}60206\ldots\cdot\frac{n}{\lg n}\cdot$$

Să presupunem, acum, că x este un număr pozitiv oarecare (nu este obligatoriu să fie un număr întreg!): ca și mai înainte, vom nota cu $\pi(x)$ numărul numerelor prime nu mai mari decît x. Vom nota $\left[\frac{x}{2}\right]$ cu n; atunci, evident, $[x]=2n$ sau $2n+1$ și vom avea

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\pi(2n)-\pi(n)+1 < 0{,}60206\ldots\cdot\frac{n}{\lg n}+1 < 1{,}60206\ldots\cdot\frac{n}{\lg n}$$

$\left(\text{deoarece } \frac{n}{\lg n}>1\right)$. Nu este greu de demonstrat că, pentru $n\geqslant 3$, din $n<x$ rezultă $\frac{n}{\lg n}<\frac{x}{\lg x}$[1]; deci, pentru $\left[\frac{x}{2}\right]\geqslant 3$

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right) < 1{,}60206\ldots\cdot\frac{x}{\lg x}\cdot$$

Este ușor de verificat că ultima inegalitate va fi adevărată pentru $\left[\frac{x}{2}\right]<3$: într-adevăr, dacă $\left[\frac{x}{2}\right]<3$, diferența $\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)$, evident, poate fi egală cu doi $\left(\text{pentru } 2{,}5\leqslant\frac{x}{2}<3\right)$, cu unu sau cu zero; în toate aceste cazuri,

---

[1] V. graficul funcției $\frac{\lg x}{x}$ de la p.55 și textul care se referă la acest grafic în rezolvarea problemei 163, a).

produsul $1{,}60206\ldots\cdot\dfrac{x}{\lg x}$ va lua valoarea cea mai mare. Astfel, pentru orice x pozitiv (întreg sau nu) avem

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)<1{,}60206\ldots\cdot\frac{x}{\lg x}.$$

Din inegalitatea dedusă obţinem mai departe

$$\pi(x)\lg x-\pi\left(\frac{x}{2}\right)\lg\frac{x}{2}=\left[\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)\right]\lg x+\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\lg x-\lg\frac{x}{2}\right)<$$

$$<\lg x\cdot 1{,}60206\ldots\cdot\frac{x}{\lg x}+\lg 2\cdot\pi\left(\frac{x}{2}\right)<\left(1{,}60206\ldots+\frac{\lg 2}{2}\right)x\approx 1{,}75257x$$

[aici folosim faptul că $\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)<\dfrac{x}{2}$, ceea ce este evident]

Fie N un număr întreg oarecare. Conform celor demonstrate, avem

$$\pi(N)\lg N-\pi\left(\frac{N}{2}\right)\lg\frac{N}{2}<1{,}75257\ldots\cdot N,$$

$$\pi\left(\frac{N}{2}\right)\lg\frac{N}{2}-\pi\left(\frac{N}{4}\right)\lg\frac{N}{4}<1{,}75257\ldots\cdot\frac{N}{2},$$

$$\pi\left(\frac{N}{4}\right)\lg\frac{N}{4}-\pi\left(\frac{N}{8}\right)\lg\frac{N}{8}<1{,}75257\ldots\cdot\frac{N}{4},$$

. . . .

$$\pi\left(\frac{N}{2^{k-1}}\right)\lg\frac{N}{2^{k-1}}-\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)\lg\frac{N}{2^k}<1{,}75257\ldots\cdot\frac{N}{2^{k-1}};$$

vom alege pe k astfel, încît $2^k>N$. Adunînd toate aceste inegalităţi, obţinem

$$\pi(N)\lg N-\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)\lg\frac{N}{2^k}<1{,}75257\ldots\cdot\left(N+\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\cdots+\frac{N}{2^{k-1}}\right)=$$

$$=1{,}75257\ldots\cdot\frac{N-\dfrac{N}{2^k}}{1-\dfrac{1}{2}}<3{,}50514\ldots\cdot N<4N.$$

Însă, dat fiind modul în care a fost ales numărul k, fracţia $N/2^k$ este mai mică decît unu şi, deci, $\pi\,(N/2^k)=0$. Obţinem astfel

$$\pi(N)<4\,\frac{N}{\lg N},\tag{11}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

167. Vom pleca de la descompunerea numărului $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots N$ în factori primi

$$N! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sînt toate numerele prime nu mai mari decît N, iar α_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ este egal cu

$$\left[\frac{N}{p_i}\right] + \left[\frac{N}{p_i^2}\right] + \left[\frac{N}{p_i^3}\right] + \cdots + \left[\frac{N}{p_i^{q_i}}\right],$$

unde parantezele drepte înseamnă partea întreagă a numărului, iar q_i cel mai mare număr întreg, astfel că $p_i^{q_i} < N$ (v. prima parte a rezolvării la problema 166). Logaritmînd această formulă, obținem

$$\lg N! = \alpha_1 \lg p_1 + \alpha_2 \lg p_2 + \ldots + \alpha_r \lg p_r.$$

Vom calcula valoarea expresiei $\lg N!$ în două moduri diferite. Partea dreaptă a ultimei formule are forma

$$\left(\left[\frac{N}{p_1}\right] + \left[\frac{N}{p_1^2}\right] + \cdots + \left[\frac{N}{p_1^{q_1}}\right]\right) \lg p_1 + \left(\left[\frac{N}{p_2}\right] + \left[\frac{N}{p_2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{N}{p_2^{q_2}}\right]\right) \lg p_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\left[\frac{N}{p_r}\right] + \left[\frac{N}{p_r^2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{p_r^{q_r}}\right]\right) \lg p_r.$$

În această expresie, suprimăm peste tot parantezele drepte, adică înlocuim toate părțile întregi ale fracțiilor chiar prin fracții. Deoarece partea întreagă a numărului diferă de număr nu mai mult decît cu o unitate, eroarea făcută nu va fi mai mare decît

$$q_1 \lg p_1 + q_2 \lg p_2 + \ldots + q_r \lg p_r = \lg p_1^{q_1} + \lg p_2^{q_2} + \ldots + \lg p_r^{q_r} \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\lg N + \lg N + \ldots + \lg N}_{\text{de } r \text{ ori}} = r \lg N.$$

Însă $r = \pi(N)$ este, conform problemei precedente, mai mic decît $B \dfrac{N}{\lg N}$, unde B este o constantă; în particular, putem lua $B = 4$. Deci

$$r \lg N < B \frac{N}{\lg N} \lg N = BN.$$

Avem, astfel,

$$\left(\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_1^2} + \ldots + \frac{N}{p_1^{q_1}}\right) \lg p_1 + \left(\frac{N}{p_2} + \frac{N}{p_2^2} + \ldots + \frac{N}{p_2^{q_2}}\right) \lg p_2 + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_r^2} + \ldots + \frac{N}{p_r^{q_r}}\right) \lg p_r \geqslant \lg N! > \left(\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_1^2} + \ldots + \frac{N}{p_1^{q_1}}\right) \lg p_1 +$$
$$+ \left(\frac{N}{p_2} + \frac{N}{p_2^2} + \ldots + \frac{N}{p_2^{q_2}}\right) \lg p_2 + \ldots + \left(\frac{N}{p_r} + \frac{N}{p_r^2} + \ldots + \frac{N}{p_r^{q_r}}\right) \lg p_r - BN.$$

Vom folosi, acum, faptul că

$$\frac{N}{p_i}+\frac{N}{p_i^2}+\ldots+\frac{N}{p_i^{q_i}}\geqslant\frac{N}{p_i}$$

şi

$$\frac{N}{p_i}+\frac{N}{p_i^2}+\ldots+\frac{N}{p_i^{q_i}}=\frac{\frac{N}{p_i}-\frac{N}{p_i^{q_i+1}}}{1-\frac{1}{p_i}}<\frac{\frac{N}{p_i}}{1-\frac{1}{p_i}}=\frac{N}{p_i-1}.$$

Obţinem astfel

$$\frac{N}{p_1-1}\lg p_1+\frac{N}{p_2-1}\lg p_2+\ldots+\frac{N}{p_r-1}\lg p_r>\lg N!>$$
$$>\frac{N}{p_1}\lg p_1+\frac{N}{p_2}\lg p_2+\ldots+\frac{N}{p_r}\lg p_r-BN.$$

Afirmăm că din ultima inegalitate dublă rezultă

$$N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}+K\right\}>\lg N!>$$
$$>N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1}+\frac{\lg p_2}{p_2}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r}-B\right\}, \qquad (*)$$

unde K este o constantă care poate fi evaluată. Într-adevăr,

$$\frac{\lg p_i}{p_i-1}-\frac{\lg p_i}{p_i}=\frac{\lg p_i}{p_i(p_i-1)},\ i=1,\ 2,\ldots,\ r,$$

astfel că suma din membrul întîi al inegalităţii (*) diferă de expresia din membrul întîi al inegalităţii obţinute mai înainte cu

$$N\left\{\frac{\lg p_1}{p_1(p_1-1)}+\frac{\lg p_2}{p_2(p_2-1)}+\ldots+\frac{\lg p_r}{p_r(p_r-1)}\right\}.$$

Vom demonstra că, pentru orice r, suma din paranteze este mai mică decît o anumită constantă. Vom observa că, pentru orice număr întreg $a\geqslant 2$,

$$\frac{\lg a}{a(a-1)}<\frac{1}{a\sqrt{a}},\ \text{adică}\ \lg a<\frac{a-1}{\sqrt{a}}.$$

Într-adevăr, pentru numărul întreg $a\geqslant 2$

$$2\left(\frac{a-1}{\sqrt{a}}\right)=2\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{a}\right)\geqslant 2\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)=\sqrt{a},$$

iar

$$2 \lg a < \sqrt{a}, \text{ deoarece } 10^{2 \lg a} = a^2 < 10^{\sqrt{a}}$$

(cînd a^2 este cuprins între 10^k şi 10^{k+1}, numărul de cifre ale numărului $10^{\sqrt{a}}$, care este egal cu partea întreagă a lui $\sqrt{a}$ plus 1, este evident mai mare decît $k+2$). Rezultă deci că

$$\frac{\lg p_1}{p_1(p_1-1)} + \frac{\lg p_2}{p_2(p_2-1)} + \ldots + \frac{\lg p_r}{p_r(p_r-1)} < \frac{1}{p_1\sqrt{p_1}} + \frac{1}{p_2\sqrt{p_2}} + \ldots + \frac{1}{p_r\sqrt{p_r}} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{N\sqrt{N}}.$$

Însă ultima sumă rămîne mărginită pentru orice N

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{N\sqrt{N}} < \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2} - 1} = 3$$

(v. problema 164). Astfel, în inegalitatea (*), putem lua ca număr K de exemplu, pe 3.

Pentru a evalua în alt mod pe $\lg N!$ vom folosi faptul că pentru orice N

$$C_1\sqrt{N}\left(\frac{N}{e}\right)^N > N! > C_2\sqrt{N}\left(\frac{N}{e}\right)^N,$$

unde $C_1 = e$, $C_2 = \sqrt{\frac{4}{5}}\, e$ (v. problema 160). Logaritmînd, obţinem

$$N\{\lg N - \lg e\} + \frac{1}{2} \lg N + \lg C_1 > \lg N! > N\{\lg N - \lg e\} + \frac{1}{2} \lg N + \lg C_2$$

sau, folosind faptul că $\frac{1}{2}\frac{\lg N}{N} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\lg 3}{3} < 0{,}08$ pentru $N \geqslant 3$ [v. rezolvarea problemei 163, a)], iar $\lg \frac{C_1}{N} \leqslant \frac{\lg e}{3} < 0{,}15$.

$$N\{\lg N - \lg e + 0{,}23\} > \lg N! > N\{\lg N - \lg e\}. \qquad (**)$$

Comparînd între ele inegalităţile (*) şi (**), obţinem

$$\frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_r}{p_r} + K < \lg N - \lg e$$

$$\frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_r}{p_r} - B < \lg N - \lg e + 0{,}23,$$

de unde găsim rezultatul căutat

$$\lg N + R > \frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \dots + \frac{\lg p_r}{p_r} > \lg N - R,$$

unde poate fi luat ca R cel mai mare dintre numerele $B - \lg e + 0,23$ şi $K + \lg e$. Deoarece constantele B şi K pot lua valorile 4 şi 3 şi $\lg e \approx 0,4343$, putem pune, de exemplu, $R = 4$.

168. a) Din definiţia mărimilor $B_1, B_2, \dots, B_n$ avem

$$b_1 = B_1, \ b_2 = B_2 - B_1, \ b_3 = B_3 - B_2, \dots, b_n = B_n - B_{n-1}.$$

Astfel,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \dots$$
$$\dots + a_n(B_n - B_{n-1})$$

sau, grupînd termenii în alt mod,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots$$
$$\dots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_nB_n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) 1) Dacă în formula din problema a) vom pune

$$a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = 3, \dots, a_n = n; \ b_1 = 1, \ b_2 = q, \ b_3 = q^2, \dots, b_n = q^{n-1}$$

vom avea

$$B_1 = 1\left(= \frac{q-1}{q-1}\right), \quad B_2 = 1 + q = \frac{q^2-1}{q-1},$$

$$B_2 = 1 + q + q^2 = \frac{q^3-1}{q-1}, \dots, B_{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1},$$

$$B_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1},$$

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a_3 - a_4 = \dots = a_{n-1} - a_n = -1.$$

Obţinem astfel:

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} = -\left(\frac{q-1}{q-1} + \frac{q^2-1}{q-1} + \dots + \frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) +$$

$$+ n\frac{q^n-1}{q-1} = -\frac{1}{q-1}(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} - n) + n\frac{q^n-1}{q-1} =$$

$$= -\frac{1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right) + n\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2}.$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9, \ldots,\ a_n = n^2;\quad b_1 = 1,\ b_2 = q,\ b_3 = q^2, \ldots,\ b_n = q^{n-1}$,
atunci $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ vor avea aceleaşi valori ca şi mai înainte, iar

$$a_1 - a_2 = -3,\ a_2 - a_3 = -5,\ a_3 - a_4 = -7, \ldots,\ a_{n-1} - a_n = (n-1)^2 - n^2 = -(2n-1).$$

Obţinem astfel

$$1 + 4q + 9q^2 + \ldots + n^2q^{n-1} = -\left(3\frac{q-1}{q-1} + 5\frac{q^2-1}{q-1} + 7\frac{q^3-1}{q-1} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (2n-1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) + n^2\frac{q^n-1}{q-1} = \left(\frac{q-1}{q-1} + \frac{q^2-1}{q-1} + \frac{q^3-1}{q-1} + \ldots + \frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) -$$

$$-2\left(2\frac{q-1}{q-1} + 3\frac{q^2-1}{q-1} + \ldots + n\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) + n^2\frac{q^n-1}{q-1} =$$

$$= \frac{1}{q-1}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} - n) - \frac{2}{q-1}\left[1 + 2q + 3q^2 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + nq^{n-1} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + n^2\frac{q^{n-1}-1}{q-1} = \frac{1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right) -$$

$$-\frac{2}{q-1}\left[\frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + n^2\frac{q^n-1}{q-1} =$$

$$= \frac{n^2q^n}{q-1} - \frac{(2n-1)q^n+1}{(q-1)^2} + \frac{2q^n-2}{(q-1)^3}$$

[aici am folosit faptul că conform pct. 1)

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} = \frac{nq^n}{q-1} - \frac{q^n-1}{(q-1)^2}\Bigg].$$

169. a) Pentru a calcula suma

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r},$$

unde $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ sînt numere prime nu mai mari decît un anumit număr întreg N, vom pune în formula din problema 168, a)

$$a_1 = \frac{1}{\lg p_1},\ a_2 = \frac{1}{\lg p_2},\ a_3 = \frac{1}{\lg p_3},\ \ldots,\ a_r = \frac{1}{\lg p_r},$$

$$b_1 = \frac{\lg p_1}{p_1},\ b_2 = \frac{\lg p_2}{p_2},\ b_3 = \frac{\lg p_3}{p_3},\ \ldots,\ b_r = \frac{\lg p_r}{p_r}.$$

Notînd

$$\frac{\lg p_1}{p_1} = B_1, \quad \frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} = B_2, \ldots, \quad \frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_r}{p_r} = B_r,$$

vom avea

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r} = \left(\frac{1}{\lg p_1} - \frac{1}{\lg p_2}\right)B_1 + \left(\frac{1}{\lg p_2} - \frac{1}{\lg p_3}\right)B_2 +$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_3} - \frac{1}{\lg p_4}\right)B_3 + \ldots + \left(\frac{1}{\lg p_{r-1}} - \frac{1}{\lg p_r}\right)B_{r-1} + \frac{1}{\lg p_r}B_r$$

$$= \left(\frac{1}{\lg p_1} - \frac{1}{\lg p_2}\right)B_1 + \left(\frac{1}{\lg p_2} - \frac{1}{\lg p_3}\right)B_2 + \left(\frac{1}{\lg p_3} - \frac{1}{\lg p_4}\right)B_3 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{\lg p_{r-1}} - \frac{1}{\lg p_r}\right)B_{r-1} + \left(\frac{1}{\lg p_r} - \frac{1}{\lg N}\right)B_r + \frac{1}{\lg N}B_r.$$

Acum ne-a mai rămas să mai calculăm ultima expresie. Vom folosi mai întîi faptul că, în baza primei formule a lui Mertens (v. problema 167)

$$B_1 < \lg p_1 + R, \quad B_2 < \lg p_2 + R, \ldots, B_{r-1} < \lg p_{r-1} + R,$$

$$B_r < \lg p_r + R \quad \text{şi} \quad B_r < \lg N + R;$$

aici R este o constantă (ca R poate fi luat, de exemplu, numărul 4). Obţinem astfel

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r} < \left(\frac{1}{\lg p_1} - \frac{1}{\lg p_2}\right)(\lg p_1 + R) +$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_2} - \frac{1}{\lg p_3}\right)(\lg p_2 + R) + \left(\frac{1}{\lg p_3} - \frac{1}{\lg p_4}\right)(\lg p_3 + R) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{\lg p_{r-1}} - \frac{1}{\lg p_r}\right)(\lg p_{r-1} + R) + \left(\frac{1}{\lg p_r} - \frac{1}{\lg N}\right)(\lg p_r + R) +$$

$$+ \frac{1}{\lg N}(\lg N + R) = 1 + \left[-\frac{1}{\lg p_2}\lg p_1 + \left(\frac{1}{\lg p_2} - \frac{1}{\lg p_3}\right)\lg p_2 +\right.$$

$$+\left(\frac{1}{\lg p_3} - \frac{1}{\lg p_4}\right)\lg p_3 + \ldots + \left(\frac{1}{\lg p_{r-1}} - \frac{1}{\lg p_r}\right)\lg p_{r-1} +$$

$$\left. -\left(\frac{1}{\lg p_r} - \frac{1}{\lg N}\right)\lg p_r + \frac{1}{\lg N}\lg N\right] + R\frac{1}{\lg p_1},$$

deoarece în suma termenilor care au ca factor pe R, se reduc toţi termenii, în afară de $R\dfrac{1}{\lg p_1}$.

Ne mai rămîne să evaluăm suma din parantezele drepte. Însă aceasta nu este greu de făcut geometric. Vom pune suma considerată sub forma

$$(\lg p_2 - \lg p_1)\frac{1}{\lg p_2} + (\lg p_3 - \lg p_2)\frac{1}{\lg p_3} + (\lg p_4 - \lg p_3)\frac{1}{\lg p_4} + \dots$$

$$\dots + (\lg p_r - \lg p_{r-1})\frac{1}{\lg p_r} + (\lg N - \lg p_r)\frac{1}{\lg N}.$$

Vom cerceta acum fig. 159, *a*, în care este reprezentată hiperbola $y = 1/x$. Evident, suma care ne interesează este egală cu aria figurii haşurate în desen şi, deci, este mai mică decît aria mărginită de hiperbolă, de axa Ox şi de dreptele $y = \lg p_1$ şi $y = \lg N$, care este egală cu $\ln(\lg N) - \ln(\lg p_1)$ (primul logaritm este n a t u r a l; v. problema 152). Obţinem astfel, în definitiv,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_r} < \ln \lg N - \ln \lg p_1 + R\frac{1}{\lg p_1} + 1. \qquad (*)$$

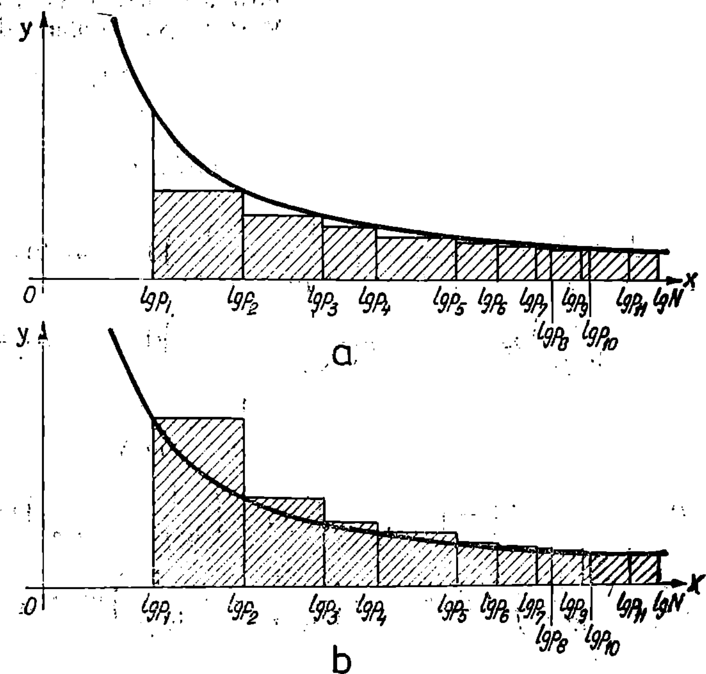


Fig. 159

Am găsit deci o valoare evident m a i m a r e decît suma noastră. Pentru a găsi o valoarea m a i m i c ă decît aceasta (şi totodată pentru a determina

marginile între care poate fi cuprinsă suma), vom transforma puţin prima teoremă a lui Mertens. În baza acestei teoreme

$$B_i = \frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_i}{p_i} > \frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_i}{p_i} + \frac{\lg p_{i+1}}{p_{i+1}} - a >$$
$$> \lg p_{i+1} - R - a \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

unde a este o constantă, astfel aleasă încît $a \geqslant \frac{\lg p_{i+1}}{p_{i+1}}$ pentru $i = 1, 2, \ldots, r$ (drept a putem lua, de exemplu, numărul $\frac{\lg 3}{3}$ sau numărul $0{,}16 > \frac{\lg 3}{3}$; v. rezolvarea problemei 163). În afară de aceasta, vom folosi faptul că

$$\frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \frac{\lg p_3}{p_3} + \ldots + \frac{\lg p_r}{p_r} > \lg N - R - a$$

(conform primei teoreme a lui Mertens, termenul a în partea dreaptă este chiar de prisos, însă pentru noi acest lucru va fi comod). Atunci vom obţine

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r} > \left(\frac{1}{\lg p_1} - \frac{1}{\lg p_2}\right)(\lg p_2 - R - a) +$$
$$+ \left(\frac{1}{\lg p_2} - \frac{1}{\lg p_3}\right)(\lg p_3 - R - a) + \left(\frac{1}{\lg p_3} - \frac{1}{\lg p_4}\right)(\lg p_4 - R - a) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{\lg p_{r-1}} - \frac{1}{\lg p_r}\right)(\lg p_r - R - a) + \left(\frac{1}{\lg p_r} - \frac{1}{\lg N}\right)(\lg N - R - a) +$$
$$+ \frac{1}{\lg N}(\lg N - R - a) = \left[(\lg p_2 - \lg p_1)\frac{1}{\lg p_1} + (\lg p_3 - \lg p_2)\frac{1}{\lg p_2} +\right.$$
$$\left. + (\lg p_4 - \lg p_3)\frac{1}{\lg p_3} + \ldots + (\lg p_r - \lg p_{r-1})\frac{1}{\lg p_{r-1}} + (\lg N - \lg p_r)\frac{1}{\lg p_r}\right] +$$
$$+ 1 - (R + a)\frac{1}{\lg p_1}$$

(în parantezele drepte lipseşte termenul $\frac{1}{\lg N}\lg N$ al sumei transformate; în schimb figurează termenul de prisos $\frac{1}{\lg p_1}\lg p_1$). Aici suma din parantezele drepte, cum este uşor de văzut, este mai mare decît aria mărginită de hiperbola $y = 1/x$, axa Ox şi dreptele $y = \lg N$ şi $y = \lg p_1$ (v. fig. 159, b în care aria figurii haşurate este egală cu suma noastră). Astfel,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_3} > \ln \lg N - \ln \lg p_1 - (R + a)\frac{1}{\lg p_1} + 1. \quad (**)$$

Pentru a evita utilizarea în aceeaşi formulă a logaritmilor în două baze diferite, vom trece peste tot la logaritmi naturali. Anume, vom folosi faptul că $\lg N = M \ln N$, unde M este m o d u l u l t r a n s f o r m ă r i i[1], $M = \lg e = 0{,}434 \ldots$ Astfel, evaluările (*) şi (**) pentru suma

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r}$$

capătă forma

$$\ln \ln N + \ln N - \ln \lg 2 + \frac{R}{\lg 2} + 1 > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_r} >$$

$$> \ln \ln N + \ln M - \ln \lg 2 - \frac{R + a}{\lg 2} + 1$$

(amintim că p_1 este primul număr prim, adică $p_1 = 2$). De aici rezultă că există un număr T, astfel încît suma căutată să fie cuprinsă între $\ln \ln N + T$ şi $\ln \ln N - T$ (ca T se poate lua cel mai mare dintre numerele $\frac{R}{\lg 2} + 1 + \ln M - \ln \lg 2$ şi $\frac{R + a}{\lg 2} - 1 - \ln M + \ln \lg 2$; deoarece constantele $\frac{R}{\lg 2}$, $\frac{R+a}{\lg 2}$, $\ln M$ şi $\ln \lg 2$ pot lua valorile $\frac{4}{0{,}301\ldots} < 13\frac{1}{2}$, respectiv $\frac{4{,}16}{0{,}301\ldots} < 13\frac{1}{2}$, $\ln 0{,}434 \ldots = -0{,}833 \ldots$ şi $\ln 0{,}301 \ldots = -1{,}20 \ldots$, se poate lua ca T de exemplu numărul 15).

b) Vom folosi de la început numai logaritmii naturali. Vom nota

$$B_1 = \frac{\ln p_1}{p_1}, \quad B_2 = \frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2}, \ldots, \quad B_n = \frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\ln p_n}{p_n}$$

şi vom introduce în consideraţie diferenţele

$$\alpha_1 = B_1 - \ln p_1, \quad \alpha_2 = B_2 - \ln p_2, \quad \alpha_3 = B_3 - \ln p_3, \ldots;$$

fie, în afară de aceasta,

$$\alpha^{(N)} = B_r - \ln N,$$

unde p este cel mai mare număr prim, nu mai mare decît numărul întreg N.

---

[1] Vom aminti demonstraţia formulei $\lg N = \lg e \ln N$. Avem $N = 10^{\lg N}$ şi

$$N = e^{\ln N} = (10^{\lg e})^{\ln N} = 10^{\lg e \ln N}.$$

Din compararea acestor două formule se obţine rezultatul cerut.

Din prima teoremă a lui Mertens (problema 167) rezultă că toate aceste diferențe vor fi mărginite — în valoare absolură ele vor fi toate mai mici decît numărul $4/0{,}434\ldots < 10$ [1]. Utilizînd rezultatul de la problema 168, ca și rezolvarea problemei a), este ușor de arătat că

$$\varepsilon^{(N)} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_r} - \ln\ln N = \varepsilon_1^{(N)} + \varepsilon_2^{(N)},$$

unde

$$\varepsilon_1^{(N)} = \alpha_1\left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}} - \frac{1}{\ln p_r}\right) + \alpha_r\left(\frac{1}{\ln p_r} - \frac{1}{\ln N}\right) + \alpha^{(N)}\frac{1}{\ln N},$$

$$\varepsilon_2^{(N)} = \ln p_1\left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) + \ln p_2\left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \ln p_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}} - \frac{1}{\ln p_r}\right) + \ln p_r\left(\frac{1}{\ln p_r} - \frac{1}{\ln N}\right) +$$

$$+ \ln N\frac{1}{\ln N} - \ln\ln N = 1 + (\ln p_2 - \ln p_1)\frac{1}{\ln p_2}$$

$$+ (\ln p_3 - \ln p_2)\frac{1}{\ln p_3} + \ldots + (\ln p_r - \ln p_{r-1})\frac{1}{\ln p_r} +$$

$$+ (\ln N - \ln p_r)\frac{1}{\ln N} - \ln\ln N.$$

În soluția la problema a) s-a demonstrat că, pentru orice N, $\varepsilon^{(N)}$ nu este mai mare în valoare absolută decît numărul 15. Acum, trebuie să demonstrăm că, pentru $N \to \infty$, șirul de numere $\varepsilon^{(N)} = \varepsilon_1^{(N)} + \varepsilon_2^{(N)}$ tinde către o anumită limită. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că ambele șiruri $\varepsilon_1^{(N)}$ și $\varepsilon_2^{(N)}$ tind fiecare către o limită cînd $N \to \infty$.

---

[1] Deoarece

$$\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\ln p_k}{p_k} - \ln p_k = \frac{1}{M}\left(\frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \ldots + \frac{\lg p_k}{p_k} - \lg p_k\right),$$

unde $M = 0{,}434\ldots$ (v. trimiterea de la p. 386), și

$$\left|\frac{\lg p_1}{p_1} + \frac{\lg p_2}{p_2} + \frac{\lg p_3}{p_3} + \ldots + \frac{\lg p_k}{p_k} - \lg p_k\right| < 4.$$

În ce privește șirul de numere $\varepsilon_1^{(N)}$, aceasta se demonstrează foarte simplu. Trebuie numai să folosim faptul că expresia

$$\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1 = \ln\frac{\ln N}{\ln 2} - \left[(\ln p_2 - \ln p_1)\frac{1}{\ln p_2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (\ln p_3 - \ln p_2)\frac{1}{\ln p_3} + \ldots + (\ln p_r - \ln p_{r-1})\frac{1}{\ln p_r} + (\ln N - \ln p_r)\frac{1}{\ln N}\right]$$

este egală cu suma ariilor triunghiurilor curbilinii, nehașurate în fig. 159, *a*. De aici se vede că $-\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1$ crește monoton odată cu N, iar din teorema că un șir monoton crescător, mărginit, are totdeauna o limită rezultă ușor că șirul numerelor $-\varepsilon_2^{(N)} - \ln\ln 2 - 1$, deci, și al numerelor $\varepsilon_2^{(N)}$, are o limită pentru $N \to \infty$ [compară cu soluția problemei 162, b)].

Vom demonstra, acum, că pentru $N \to \infty$, și șirul numerelor $\varepsilon_1^{(N)}$ tinde de asemenea către o limită. Vom nota

$$\alpha_1\left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right) + \ldots + \alpha_{k-1}\left(\frac{1}{\ln p_{k-1}} - \frac{1}{\ln p_k}\right) = d_k.$$

În acest caz, este evident că, dacă $N > p_k$, atunci

$$\varepsilon_1^{(N)} = d_k + \alpha_k\left(\frac{1}{\ln p_k} - \frac{1}{\ln p_{k+1}}\right) + \alpha_{k+1}\left(\frac{1}{\ln p_{k+1}} - \frac{1}{\ln p_{k+2}}\right) + \ldots$$

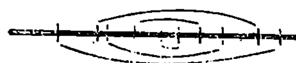
$$\ldots + \alpha_{r-1}\left(\frac{1}{\ln p_{r-1}} - \frac{1}{\ln p_r}\right) + \alpha_r\left(\frac{1}{\ln p_r} - \frac{1}{\ln N}\right) + \alpha^{(N)}\frac{1}{\ln N}.$$

Însă toate numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$; $\alpha^{(N)}$ sînt cuprinse între -10 și $+10$. Înlocuind în ultima formulă toate aceste numere prin -10, respectiv prin $+10$, vom obține

$$d_k - \frac{10}{\ln p_k} < \varepsilon_1^{(N)} < d_k + \frac{10}{\ln p_k}.$$

Astfel, toate numerele $\varepsilon_1^{(N)}$, pentru care $N > p_k$, se află în interiorul segmentului de lungime $20/\ln p_k$ de pe axa absciselor. Luînd $l > k$, vom determina un segment de lungime și mai mică (de lungime $20/\ln p_l$), în interiorul căruia se află toate numerele $\varepsilon_1^{(N)}$ pentru care $N > p_l$; vom alege apoi un segment de lungime și mai mică ($20/\ln p_m$, $m > l$), în interiorul căruia se află toate numerele $\varepsilon_1^{(N)}$, pentru care $N > p_m$ etc. Obținem astfel un sistem de segmente incluse unul în altul, de lungimi din ce în ce mai mici (fig. 160). Extremitățile din stînga ale acestor segmente formează un șir de numere care cresc tot timpul, rămînînd însă mărginite: ele tind deci către o limită $\bar{\varepsilon}_1$. În mod analog, extremitățile din dreapta ale acestor segmente formează un șir de numere care tind către limita ε_1. Însă, deoarece există numere prime oricît de mari, lungimile segmentelor d e s c r e s c n e m ă r g i n i t și, deci, nu-

merele $\bar{\varepsilon}_1$ şi $\bar{\bar{\varepsilon}}_1$ trebuie să coincidă, adică $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\bar{\varepsilon}}_1 = \varepsilon_1$. Este uşor de văzut că un acelaşi număr ε_1 va fi limită pentru şirul de numere $\varepsilon_1^{(N)}$.


Fig. 160

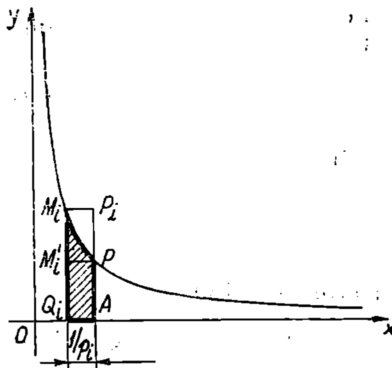


Fig. 161

170. Trebuie să calculăm produsul

$$\pi(N) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

unde p_1, p_2, p_3, ..., p_r sînt toate numerele prime nu mai mari decît numărul întreg N. Logaritmînd acest produs, vom obţine

$$\log \pi(N) = \log\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) + \ldots + \log\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Vom conveni, acum, să considerăm că în ultima formulă logaritmii sînt n a t u r a l i (v. problemele 149—152). Logaritmul natulal al numărului $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$, este egal cu aria (luată cu semnul minus) trapezului curbiliniu APM_iQ_i (fig. 161) mărginit de hiperbola $y = 1/x$, axa absciselor şi dreptele $x = 1 - \frac{1}{p_i}$ şi $x = 1$ [v. definiţia funcţiei $F(x)$ la p. 52 şi problema 152]. Dar aria trapezului curbiliniu APM_iQ_i este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor APM'_iQ_i şi $AP_iM_iQ_i$. Deoarece

$$S_{APM'_iQ_i} = AP \cdot Q_iA = 1 \cdot \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_i},$$

$$S_{AP_iM_iQ_i} = Q_iM_i \cdot Q_iA = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} \cdot \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_i - 1},$$

avem

$$\frac{1}{p_i} < -\ln\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < \frac{1}{p_i - 1}.$$

Vom nota

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\frac{1}{p_i}+\beta_i, \quad \text{unde} \quad 0<\beta_i<\frac{1}{p_i-1}-\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p_i(p_i-1)}.$$

Acum formula pentru $\ln \pi(N)$ ia forma

$$\ln \pi(N) = -\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_r}\right)-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r)$$

sau, dacă diferența $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_r}-\ln\ln N$ se notează cu $\varepsilon^{(N)}$ (compară cu problema 169, b)),

$$\ln \pi(N) = -\ln\ln N-\varepsilon^{(N)}-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r).$$

Pentru $N\to\infty$, numărul $\varepsilon^{(N)}$ tinde către o limită determinată ε (v. a doua teoremă a lui Mertens, problema 169). Vom demonstra că, pentru $N\to\infty$, și suma $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r$, de asemenea, tinde către o limită determinată. Într-adevăr, deoarece toate numerele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \ldots$ sînt pozitive, această sumă crește tot timpul odată cu creșterea lui N. Pe de altă parte, această sumă rămîne tot timpul mărginită. Într-adevăr, deoarece

$$\beta_i<\frac{1}{p_i(p_i-1)}<\frac{1}{(p_i-1)^2},$$

avem

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r<\frac{1}{(p_1-1)^2}+\frac{1}{(p_2-1)^2}+\ldots+\frac{1}{(p_r-1)^2}<$$

$$<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{N^2}<2$$

(v. problema 164). Rezultă deci că, pentru $N\to\infty$, suma $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r$ tinde către o limită determinată. Astfel, pentru $N\to\infty$, suma

$$\ln \pi(N)+\ln\ln N=-\varepsilon^{(N)}-(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_r)$$

tinde către o limită a:

$$\ln \pi(N)+\ln\ln N\to a.$$

Luînd exponenții ultimei relații, avem $\pi(N)\ln N\to e^a$; dacă se notează e^a cu c, rezultă

$$\pi(N):\frac{c}{\ln N}\to 1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

PARTEA ÎNTÎI

PROBLEME DE ANALIZA COMBINATORIE ŞI DE TEORIA PROBABILITAŢILOR

1. 7.

2. *15.*

3. 8 (în unele cazuri particulare pot fi mai puţini decît 8).

4. În 30 moduri.

5. În 2 775 498 395 670 moduri. $\left(\text{Acest număr este egal cu } \dfrac{30!}{3!\,(10!)^3}\right)$.

6. În 8 008 moduri. $\left(\text{Acest număr este egal cu } \dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right)$. **Pentru rezolvarea** problemei, este comod să se determine mai întîi numărul modurilor **de alegere a două** prăjituri, apoi a trei etc. pînă la şase.

7. Numărul lacătelor este egal cu 462; numărul cheilor deţinute de **un membru din comisie** este egal cu 252. $\left(\text{Numărul 462 este egal cu } C_{11}^5\text{, iar numărul 252 este egal cu } \dfrac{462\cdot 6}{11}\right)$.

8. 800.

9. Există mai multe numere, în a căror scriere **figurează cifra 1.**

10. De 175 308 642 ori.

11. a) 686. b) 457.

12. 12 960 000.

13. 7 142. Demonstraţi că resturile împărţirii lui $2^x - x^2$ **prin 7 se repetă periodic după** 21 valori ale lui x.

14. 10 153. Demonstraţi că numai pentru x şi y divizibili cu **7, suma** $x^2 + y^2$ **este divizibilă** cu 49.

15. În 139 moduri. Calculaţi numărul **descompunerilor, considerînd ca diferite descompunerile** care se deosebesc prin ordinea factorilor (astfel de descompuneri **vor fi în număr de** 784), după aceea ţineţi seamă de faptul că unele dintre **aceste 784 descompuneri trebuie să fie** considerate identice.

16. Numărul divizorilor este 264. Suma divizorilor este 319 823 280.

17. 1 502.

18. Coeficientul lui x^{18} este egal cu zero; coeficientul lui x^{17} este egal cu 3 420.

19. În 29 moduri.

20. În $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ moduri.

21. a) În $\left(\frac{(n+3)^2}{12}\right)$ moduri (relativ la notații v. p. 10). Pentru demonstrația acestei formule folosiți rezultatul problemei 20 și egalitatea

$$\left[\frac{m}{2}\right] = \frac{m}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^m}{4} \quad (m \text{ întreg}).$$

b) În $\left(\frac{(n+4)^2}{20}\right)$ moduri.

22. În 4 562 moduri. Pentru rezolvarea acestei probleme este comod să folosim rezultatul problemei 21, b).

23. În $\left[\frac{n}{2}\right]$ moduri.

24. 19 801 soluții.

25. În $(n-1)(n-2)/2$ moduri.

26. În $\left(\frac{n^2}{12}\right)$ moduri. Soluția acestei probleme este analoagă cu aceea a problemei 21.

27. $(n^2-1)/8$ soluții pentru n impar și $(n+8)(n-2)/8$ soluții pentru n par.

28. $\left(\frac{n^2+6n}{48}\right)$ triunghiuri pentru n impar si $\left(\frac{n^2}{48}\right)$ triunghiuri pentru n par. În rezolvarea acestei probleme trebuie să folosim rezultatul problemei 26 și să considerăm separat 12 cazuri, corespunzătoare celor 12 resturi diferite posibile ale împărțirii lui n prin 12.

29. a) C_{n-1}^{m-1}. b) C_{n+m-1}^{m-1}.

30. a) Presupunem că numărul n este suma a k_1 numere egale cu 1, a k_2 numere egale cu $2, \ldots,$ a k_l numere egale cu l, astfel încît

$$n = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \ldots + k_l \cdot l.$$

Vom pune

$$y_1 = k_2 + \ldots + k_l, \quad y_2 = k_3 + \ldots + k_l, \ldots, y_{l-1} = k_l.$$

Atunci numerele $y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}$ nu sînt mai mari decît m și

$$y_1 + \ldots + y_{l-1} = n - m.$$

De aici se deduce ușor teorema cerută.

b) Fie

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

descompunerea numărului n în m termeni neegali, așezați în ordine crescătoare și

$$n - \frac{m(m+1)}{2} = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \ldots + (x_m - m) = k_0 \cdot 0 + k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 2 + \ldots + k_l \cdot l$$

reprezentarea numărului $n - \frac{m(m+1)}{2}$ sub forma unei sume de termeni care nu sînt obligatoriu diferiţi (compară cu indicaţia de la a)). Notînd

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_l = y_1,\ k_2 + k_3 + \ldots + k_l = y_2, \ldots k_l = y_l,$$

vom obţine

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_l = n - m(m+1)/2.$$

31. a) Reprezentaţi toţi termenii sub formă de produs de puteri ale lui 2 cu un număr impar şi stringeţi termenii care au aceiaşi factor impar.

b) Presupunem că în reprezentarea numărului n sub forma unei sume de termeni care nu sînt multipli de k, termenul 1 figurează de s_1 ori, termenul 2 de s_2 ori etc. Scrieţi toate numerele $s_1, s_2, \ldots$ în „sistemul de numeraţie în baza k" (v. începutul indicaţiei la problema 129).

32. a) Numărul turnurilor este egal cu n; numărul modurilor de aşezare este egal cu $n!$.
b) Numărul turnurilor este egal cu n; numărul modurilor de aşezare este egal cu $2n^n - n!$.

33. a) 14; $2n - 2$. b) 8; n.

34. Rezultă din faptul că, pentru n par, mulţimea pătratelor albe este aceeaşi ca şi mulţimea pătratelor negre.

35. a) Utilizaţi rezultatul problemei 33, a) şi determinaţi suma pătratelor pe care le ţin sub ameninţare primul nebun, al doilea nebun etc.

b) Numărul configuraţiilor este egal cu 2^n. Pentru demonstraţie, utilizaţi rezultatul la problema a).

36. a) $144^2 = 20\,736$. b) $912^2 = 831\,744$. c) $24 \cdot 72 = 1\,728$.

d) $\left[\frac{3n-12}{4} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2$ pentru $n = 4k$, $\left[\frac{3n^2+4}{8} \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)!\right]^2$ pentru $n = 4k + 2$,

$$(6n - 6)\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2 \text{ pentru } n = 2k + 1.$$

37. a) 16. b) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (relativ la notaţii v. p. 10).

38. a) 9. b) $\left[\frac{n+2}{3}\right]^2$.

39. a) 8 regine.

b) O regină pentru $n = 1$ şi $n = 2$; două regine pentru $n = 3$, n regine pentru $n \geqslant 4$. Pentru a demonstra că pe o tablă de şah cu n^2 pătrate (orice $n \geqslant 4$) pot fi aşezate n regine în modul cerut, este suficient să se cerceteze numai cazul n par şi să se indice, pentru acest caz, aşezarea a n regine astfel, încît cel puţin o diagonală principală să rămînă liberă (cazul lui n impar poate fi obţinut adăugînd încă o coloană şi o linie şi punînd regina a $(n+1)$-a pe un pătrat dintr-un colţ). În ce priveşte valorile pare ale lui n, este comod să se cerceteze mai întîi cazul unui n care dă restul 0 sau 4 prin împărţirea la 6 şi, separat, cazul unui n care dă restul 2 prin împărţirea la 6.

40. a) 32 cai. b) Două configuraţii.

41. a) În $(n+1)^2$ părţi. b) În $3n^2 + 3n + 1$ părţi.

42. a) $(n^2 + n + 2)/2$ părţi. b) În $n^2 - n + 2$ părţi. În rezolvare este comod să se examineze, succesiv, cu cît poate să crească numărul părţilor după trasarea dreptei (respectiv, cercului) a doua, a treia, ..., a n-a).

43. a) În $(n^3 + 5n + 6)/6$ părți. Utilizați rezultatul problemei 42, a)

b) În $n(n^2 - 3n + 8)/3$ părți. Utilizați rezultatul problemei 42, b).

44. În $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = C_n^4$ puncte.

45. În $\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$ părți.

46. a) $1\,296 = 36^2$. b) $n^2(n+1)^2/4$.

47. a) 204. b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

48. $\frac{n(n-1)(n-2)(n^3+18n^2-43n+60)}{720}$ triunghiuri. Această expresie se obține ca suma $C_n^3 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6$.

49. Numărul căutat al poligoanelor cu k laturi este

$$\frac{n(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!} = \frac{n}{k}\,C_{n-k-1}^{k-1}.$$

50. a) Numărul triunghiurilor este egal cu $n-2$. b) Numărul diagonalelor este egal cu $n-3$.

51. a) În 132 moduri. În rezolvarea acestei probleme este comod să se determine succesiv numărul descompunerilor în triunghiuri al patrulaterului convex, al pentagonului convex, al hexagonului convex, al heptagonului convex și al octagonului convex.

b) Numărul căutat de moduri T_n este egal cu $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-5)}{(n-1)!}\,2^{n-2}$. Pentru stabilirea acestei formule trebuie numai să demonstreze că

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}\,T_n.$$

Unul dintre modurile de obținere a acestei relații este următorul: exprimăm pe T_n în două moduri diferite cu ajutorul lui $T_{n-1}, T_{n-2}, \ldots, T_3$ și, comparînd cele două formule obținute, deducem relația cerută.

52. a) În 16 796 moduri. În rezolvarea acestei probleme este comod să se determine succesiv numărul de moduri în cazul în care pe cerc se află 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 și 20 puncte.

b) Numărul căutat de moduri Φ_n este egal cu $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{(n+1)!}\,2^n$. Pentru stabilirea acestei formule este suficient să se arate că $\Phi_n = T_{n+2}$ [v. indicația la problema 51, b)].

53. a) În $\frac{n^p - n}{p} + n$ moduri.

54. a) $\frac{1}{2}\left[\frac{(p-1)!+1}{p} + p - 4\right]$ poligoane stelate cu p laturi.

55. a) 2^n; b) 0; c) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$; d) $2^{n-1}n$; e) 0; f) $(-1)^m C_{n-1}^m$ pentru $m < n$ și 0 pentru $m = n$;

g) $C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$ pentru $k < n$ și C_{n+m+1}^{n+1} pentru $k = n$;

h) 1 pentru $n = 3k$, 0 pentru $n = 3k + 1$ și -1 pentru $n = 3k - 1$;

i) 2^{2n}; j) C_{2n}^n; k) $(-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}$ pentru n par și 0 pentru n impar; l) C_{n+m}^k.

56. a) 2^{n-1}. b) 2^{n-1}.

Rezolvarea acestor două probleme rezultă ușor din soluția problemelor 55, a) și b).

c) $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k$, $2^{n-2} + 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k \pm 1$, 2^{n-2} pentru $n = 8k \pm 2$, $2^{n-2} - 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k \pm 3$ și $2^{n-2} - 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k + 4$.

Pentru rezolvarea acestei probleme și a următoarelor trei, utilizați dezvoltarea lui $(1 + i)^n$ și a lui $(1 - i)^n$ după formula binomului Newton.

d) 2^{n-2} pentru $n = 8k$ sau $n = 8k + 4$, $2^{n-2} + 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k + 1$ sau $n = 8k + 3$, $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k + 2$, $2^{n-2} - 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k - 1$ sau $n = 8k - 3$ și $2^{n-2} - 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k - 2$.

e) $2^{n-2} - 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k$, $2^{n-2} - 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k \pm 1$, 2^{n-2} pentru $n = 8k \pm 2$, $2^{n-2} + 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k \pm 3$ și $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k + 4$.

f) 2^{n-2} pentru $n = 8k$ sau $n = 8k + 4$, $2^{n-2} - 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k + 1$ sau $n = 8k + 3$, $2^{n-2} - 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k + 2$, $2^{n-2} + 2^{(n-3)/2}$ pentru $n = 8k - 1$ sau $n = 8k - 3$ și $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$ pentru $n = 8k - 2$.

g) $\frac{2^n + 2}{3}$ pentru $n = 6k$, $\frac{2^n + 1}{3}$ pentru $n = 6k \pm 1$, $\frac{2^n - 1}{3}$ pentru $n = 6k \pm 2$ și $\frac{2^n - 2}{3}$ pentru $n = 6k + 3$.

În rezolvarea acestei probleme și a următoarelor două, utilizați dezvoltarea după formula binomului lui Newton a binoamelor $(1 + \varepsilon_1)^n$ și $(1 + \varepsilon_2)^n$, unde $\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ iar $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

h) $\frac{2^n - 1}{3}$ pentru $n = 6k$ sau $n = 6k - 2$, $\frac{2^n + 1}{3}$ pentru $n = 6k + 1$ sau $n = 6k + 3$, $\frac{2^n + 2}{3}$ pentru $n = 6k + 2$ și $\frac{2^n - 2}{3}$ pentru $n = 6k - 1$.

i) $\frac{2^n - 1}{3}$ pentru $n = 6k$ sau $n = 6k + 2$, $\frac{2^n - 2}{3}$ pentru $n = 6k + 1$, $\frac{2^n + 1}{3}$ pentru $n = 6k + 3$ sau $n = 6k - 1$ și $\frac{2^n + 2}{3}$ pentru $n = 6k - 2$.

57. Utilizați metoda inducției complete.

58. a) C_{n+m}^k [v. problema 55, l)].

b) $\frac{(n - m - 1)(n - m - 2)\ldots(n - m - k)}{k!}$. Pentru $n - m - 1 \geq k$ această expresie este egală cu C_{n-m-1}^k.

59. c) C_{n+m}^k.

60. a) 1, 1 000, 499 500.

b) În intersecția k din rîndul al 1 000-lea vor sosi

$$C_{1\,000}^{k} = \frac{1\,000!}{k!\,(1\,000-k)!}$$

persoane.

61. Utilizați faptul că numărul B_n^k este coeficientul lui x^k în dezvoltarea expresiei $(1+x+x^2)^n$.

62. $0{,}6561 = (0{,}9)^4$. În rezolvarea acestei probleme este comod să se considere că toate numerele de pe biciclete sînt de patru cifre, însă pot să înceapă cu zero sau cu mai mulți de zero (în acest caz, 10 000 se înlocuiește cu 0000).

63. a) $\frac{1}{360} \approx 0{,}003$. b) $\frac{12}{360} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033$.

64. $\frac{1}{630} \approx 0{,}0015$. În rezolvarea problemei țineți seama că $396 = 4 \cdot 9 \cdot 11$ și utilizați criteriile de divizibilitate cu 4, cu 9 și cu 11.

65. 0,2.

66. a) $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}000054$. b) $\frac{66(2^6-2)}{12^6} \approx 0{,}00137$.

67. a) $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^9} = \frac{1\,792}{6\,561} \approx 0{,}273$. b) $\frac{9!}{(3!)^3\cdot 3^9} = \frac{560}{6\,561} \approx 0{,}085$. c) $\frac{9!}{2\cdot 4!\cdot 3^9} = \frac{280}{729} \approx 0{,}384$.

68. a) $\frac{10}{19}$. b) $\frac{C_{16}^6}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}} = \frac{28}{323} \approx 0{,}08$; $\left(\frac{28}{323}\right)^2 \approx 0{,}0064$. c) $\frac{3C_{16}^8}{\frac{1}{2}C_{20}^{10}} = \frac{135}{323} \approx 0{,}42$.

69. Este mai probabil să se cîștige trei partide din patru, decît cinci din opt $\left(\text{prima probabilitate este egală cu } \frac{1}{4}, \text{ a doua este egală cu } \frac{7}{32} < \frac{1}{4}\right)$.

70. a) $C_n^r C_m^{k-r} / C_{n+m}^k$.

b) C_{n+m}^k. Utilizați faptul că suma probabilităților în cazul în care nu va fi extrasă nici o bilă albă, în care va fi extrasă o singură bilă albă, în care vor fi extrase două bile albe,... ..., în care vor fi extrase k bile albe, este egală cu unu.

71. a) $C_{2n-k}^n / 2^{2n-k}$.

b) 2^{2n}. Acest rezultat se deduce din problema a) la fel cum din problema 70, a) rezultă relația din problema 70, b).

72. 1/2. În rezolvarea acestei probleme este cel mai simplu să se demonstreze direct că, în experiența considerată, numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul celor nefavorabile (fără a calcula acest număr).

73. a) 5/9 (se poate admite că experiența considerată în această problemă poate avea nouă cazuri egal posibile, dintre care cinci vor fi favorabile).

b) $\frac{19}{27}$. c) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Aici este mai ușor să se determine numărul cazurilor în care ratează toți cei n vînători.

74. $95/144 \approx 0{,}66$.

75. 13/41. În rezolvarea acestei probleme, este esențial să se observe că, din 81 cazuri egal posibile care pot avea loc pentru afirmații independente făcute de A, B, C și D, în situația de față, dat fiind caracterul special al acestor afirmații, rămîn posibile numai 41 cazuri.

76. a) $\frac{8}{15} \approx 0{,}53$. b) $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}$.

77. a) $\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$. b) $\begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ impar} \\ \frac{[(2k)!]^3}{(4k!)\,(k!)^2} & \text{pentru } n = 2k \text{ par.} \end{cases}$

78. a) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$.

b) Pentru $n \to \infty$ această probabilitate tinde către $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632$ ($e \approx 2{,}718$ este baza sistemului de logaritmi naturali; v. problema 158).

79. a) $C_n^0 \cdot 1^k - C_n^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + C_n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k$.

b) $\frac{C_n^r}{n^k} [C_r^0 r^k - C_r^1 (r-1)^k + C_r^2 (r-2)^k - \ldots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} \cdot 1^k]$.

c) $1^k C_n^1 - 2^k C_n^2 + 3^k C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^k C_n^n = \begin{cases} 0 & \text{pentru } k < n, \\ (-1)^{n-1} n! & \text{pentru } k = n. \end{cases}$

Utilizați faptul că probabilitatea care trebuie determinată în problema a) este egală cu 0 pentru $k < n$ și se calculează direct pentru $k = n$.

80. $\frac{439\,792}{3\,628\,800} \approx 0{,}12$. Numărul total al cazurilor posibile ale experienței este egal cu $9! \cdot 10!$. Numărul cazurilor nefavorabile este egal cu $C_{10}^1 a_1 - C_{10}^2 a_2 + C_{10}^3 a_3 - \ldots + C_{10}^9 a_9 - C_{10}^{10} a_{10}$, unde

$$a_k = \begin{cases} (10-k)!\,(10-k-1)!\,(20-2k)(20-2k+1)\ldots(20+2k-1) & \text{pentru } 1 \leqslant k \leqslant 9, \\ 2 \cdot 9! & \text{pentru } k = 10. \end{cases}$$

81. a) $\frac{n-m+1}{n+1}$ pentru $m \leqslant n$; 0 pentru $m > n$. Acest răspuns poate fi obținut pe căi diferite.

P r i m a r e z o l v a r e. Numărul total al cazurilor egal posibile în problema noastră este egal cu C_{n+m}^m. Aceste C_{n+m}^m cazuri pot fi comod reprezentate sub forma a diferite drumuri de cea mai mică lungime în număr de C_{n+m}^m care unesc intersecțiile (0, 0) și (n, m) ale orașului (v. p. 24). Utilizînd această schemă, se poate demonstra că, pentru $m \leqslant n$, numărul cazurilor nefavorabile este egal cu numărul drumurilor care unesc intersecțiile $(-1, 1)$ și (n, m), adică este egal cu C_{n+m}^{m-1}; de aici rezultă ușor răspunsul problemei.

R e z o l v a r e a a d o u a. Cunoscînd răspunsul problemei, nu este greu să verificăm exactitatea lui prin metoda inducției complete.

R e z o l v a r e a a t r e i a. Considerați $n + m$ așezări în rînd a celor $n + m$ cumpărători, care se obțin din una dintre așezări prin mutarea unui număr de cumpărători, care stăteau în față, la coada rîndului (în aceeași ordine în care ei stăteau la început). Demonstrați că pentru $n > m$, dintre aceste $n + m$ așezări, $n - m$ au proprietatea că, în fața fiecărui cumpărător

stau mai multe persoane care au metode de cinci lei decît oameni care au numai monede de zece lei. De aici nu mai este greu de obținut răspunsul problemei.

b) $1 - \dfrac{m(m-1)\dots(m-p)}{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}$ pentru $n+p \geqslant m \geqslant p+1$; 0 pentru $m > n+p$; 1 pentru $m \leqslant p$. Soluția acestei probleme poate fi dată în mod asemănător ca în prima sau a doua rezolvare a problemei 81, a).

c) $\dfrac{n-2m+1}{n+1}$ pentru $n \geqslant 2m$ și 0 pentru $n < 2m$.

Soluția aceste probleme poate fi dată în mod asemănător ca în prima, a doua sau a treia rezolvare a problemei a), iar cea mai simplă este aici rezolvarea analoagă celei de-a treia la problema a).

82. a) Prin împărțirea a $2n$ puncte de pe cerc în n perechi, un număr de n puncte din totalul de $2n$ vor fi primele puncte ale perechilor, iar celelalte n vor ocupa locul al doilea. Demonstrați că, pentru ca n coarde care au ca extremități aceste puncte să nu se intersecteze, nu trebuie decît ca, după numerotarea tuturor celor $2n$ puncte în ordinea poziției lor pe cerc, în fața fiecărui punct să se afle un număr de puncte, care sînt primele în perechile respective, nu mai mic decît numărul de puncte care ocupă locul al doilea. De aici, în baza rezultatului la problema 81, a), se obține imediat răspunsul la problema 52, b).

Deoarece din răspunsul la problema 52, b) se deduce ușor și răspunsul în problema 51, b) [compară cu rezolvarea problemei 52, b)], raționamentul indicat aici rezolvă și problema 51.

b) Numărul căutat de moduri ψ_n este egal cu

$$\frac{(2n+2)(2n+3)\dots 3n}{n!} = \frac{1}{2n+1} C_{3n}^{n}.$$

Acest rezultat se obține din soluția problemei 81, c) ca și rezultatul la problema 52, b): din soluția problemei 81, a).

c) Numărul căutat de moduri S este egal cu

$$\frac{2n(2n+1)\dots(3n-3)}{(n-1)!} = \frac{1}{2n-1} C_{3(n-1)}^{n-1}.$$

Pentru demonstrație, trebuie doar să se arate că $S_n = \psi_{n-1}$ [compară cu soluția problemei 52, b].

83. 1/3; 5/9.

84. a) 1/5; 1/100. b) 1/5; 2/5.

85. 1/7; 91/144.

86. 1/4; 1/20.

87. lg 2 (logaritm zecimal!). Pentru demonstrație, trebuie să folosim faptul că, printre puterile lui doi care au un număr dat de cifre, există desigur o singură putere care începe cu cifra 1.

88. a) Vom nota cu M numărul reprezentat prin combinația de cifre dată. Trebuie să demonstrăm că, pentru orice M, pot fi determinate două numere întregi n și k, astfel încît k să fie mai mare decît numărul de semne ale lui M și, în același timp, $10^k M \leqslant 2^n < 10^k(M+1)$. Lagaritmînd această inegalitate, obținem

$$\lg M + k \leqslant n \lg 2 < \lg(M+1) + k.$$

Problema va fi rezolvată dacă vor fi determinați n și k care verifică ultima inegalitate. Astfel, trebuie să demonstrăm că cel puțin unul dintre punctele lg 2, 2 lg 2, 3 lg 2, ... de pe axa numerelor va fi cuprins în unul dintre intervalele $(\lg M + k, \lg(m+1) + k)$, $k = 1, 2, \dots$

b) $\lg\left(1+\frac{1}{M}\right)$ (logaritm zecimal!). Demonstraţi că probabilitatea ca punctul $n \lg 2$ de pe axa numerelor, pentru n luat la întîmplare să se afle în unul dintre intervalele indicate mai sus este egală cu lungimea totală a tuturor acestor intervale.

89. a) 0,6. Demonstraţi că probabilitatea ca două numere luate la întîmplare să fie prime între ele este egală cu

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\left(1-\frac{1}{13^2}\right)\cdots$$

(2, 3, 5, 7, 11, 13,... sînt toate numere prime), sau ceea ce este acelaşi lucru, că este egală cu

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots}$$

b) 0,1. Demonstraţi că probabilitatea căutată este egală cu

$$1-\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1-\frac{1}{5^4}\right)\left(1-\frac{1}{7^4}\right)\left(1-\frac{1}{11^4}\right)\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\cdots}$$

90. a) Utilizaţi rezultatul problemei 143, a).

b) Utilizaţi rezultatul problemei 143, b).

91. ln 2 (logaritm natural!). Pentru demonstraţie, utilizaţi rezultatul problemelor 165 şi 169, b).

92. 7/16. Mulţimea tuturor rezultatelor egal posibile ale experimentului este reprezentată aici prin mulţimea punctelor pătratului $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, unde x şi y sînt coordonatele carteziene ale punctului, care reprezintă momentul sosirii primei persoane şi respectiv al celei de-a doua.

93. 1/4.

94. Probabilitatea căutată este egală cu

$$\begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqslant a \leqslant \frac{l}{3}, \\ \left(3\frac{a}{l}-1\right)^2 & \text{dacă } \frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}, \\ 1-3\left(1-\frac{a}{l}\right)^2, & \text{dacă } \frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l. \end{cases}$$

95. 1/4 (compară cu problema 93).

96. 1/2. Aici toate rezultatele posibile ale experienţei se reprezintă prin punctele unui cub.

97. $1-\frac{\pi}{4}$ (v. indicaţia la problema precedentă).

98. 3 ln 2 — 2 (logaritm natural; v. problemele 149—152).

99. 2 ln 2 — 1 ((logaritm natural; v. problema 152). Aici este comod să se caracterizeze toate rezultatele posibile ale experienţei printr-o pereche de numere (x, y), unde x este lungimea celei mai mici porţiuni, formată după prima frîngere; y este raportul dintre lungimea barei, obţinută după frîngerea porţiunii mari şi lungimea acestei porţiuni mari. În acest caz, mulţimea tuturor rezultatelor va fi reprezentată prin mulţimea punctelor unui dreptunghi, iar probabilitatea ca punctul (x, y) să se afle în interiorul unei părţi a dreptunghiului va fi proporţională cu aria acestei părţi.

100. Utilizaţi rezultatul problemei 147, b).

PARTEA A DOUA

PROBLEME DIN DIFERITE DOMENII ALE MATEMATICII

101. Este posibil.

102. Poate fi dat un exemplu de reţea de autobuze, formată din şapte trasee şi care verifică condiţiile problemei.

103. a) Fie n numărul de staţii ale unui traseu a. Arătaţi succesiv că: 1) prin fiecare staţie care nu aparţine traseului a, trec cîte n trasee: 2) fiecare traseu are cîte n staţii; 3) prin fiecare staţie, care aparţine traseului a, trec de asemenea cîte n trasee.

b) 8. Utilizaţi rezultatul problemei a).

104. b) Arătaţi mai întîi că din totalul de şapte puncte face parte f i e c a r e punct de intersecţie a două dintre cele şapte drepte considerate (şi printre toate dreptele se află o r i c e dreaptă care uneşte două dintre punctele considerate).

105. Teorema se demonstrează prin reducere la absurd: presupuneţi că nu este adevărată şi că în afara uneia din cele n drepte (o vom nota cu MN), există puncte de intersecţie a acestor drepte. Arătaţi că, pentru f i e c a r e din aceste puncte se poate determina un punct de intersecţie a dreptelor m u l t m a i a p r o p i a t de MN (adică nu există un punct de intersecţie a dreptelor care să fie cel mai apropiat de MN). Deoarece aceasta nu este posibil, presupunerea făcută trebuie să fie falsă.

106. Presupuneţi că problema nu este adevărată şi demonstraţi că, dacă MN este o dreaptă oarecare dusă prin unul dintre punctele date A şi care trece prin celelalte, atunci pentru f i e c a r e dintre punctele de intersecţie a lui MN cu dreptele care unesc perechile de puncte date se poate găsi un punct m u l t m a i a p r o p i a t de A (adică printre aceste puncte nu există unul cel mai apropiat de A). Deoarece aceasta nu este posibil, presupunerea făcută trebuie să fie falsă.

107. Utilizaţi metoda inducţiei complete; pentru aceasta, utilizaţi rezultatul de la problema 106.

108. a) În total sînt posibile şase configuraţii diferite a patru puncte care verifică condiţiile problemei, anume: 1) vîrfurile unui romb cu una dintre diagonalele egală cu latura; 2) — 3) vîrfurile unui deltoid (un patrulater cu două laturi învecinate egale) cu diagonalele egale între ele şi egale şi cu o pereche de laturi; în acest caz, deltoidul poate fi convex sau neconvex; 4) vîrfurile unui pătrat; 5) cele trei vîrfuri ale unui triunghi echilateral şi centrul său; 6) vîrfurile unui trapez isoscel, ale cărui laturi laterale sînt egale cu baza mică, iar diagonalele cu cea mare. Rapoartele posibile b/a sînt egale cu $\sqrt{3}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$ şi $(1+\sqrt{5})/2$ (aici b este cea mai mare dintre cele două distanţe).

b) Valorile posibile ale lui n sînt: $n = 3$ (vîrfurile unui triunghi isoscel), $n = 4$ (cele şase configuraţii ale problemei a)), $n = 5$ (vîrfurile unui pentagon regulat).

109. a) Pot fi indicate direct astfel de configurații a N puncte în plan (unde N este un număr oarecare) în care aceste puncte nu sînt situate toate pe o aceeași dreaptă și astfel ca toate distanțele a două dintre ele să fie exprimate prin numere întregi (pentru găsirea unor astfel de configurații este comod să folosim cunoscutele formule pentru lungimile x, y, z, ale laturilor exprimate în numere întregi ale triunghiurilor dreptunghice: $x = 2uv$, $y = |u^2 - v^2|$, $z = u^2 + v^2$, unde u, v sînt numere întregi oarecare).

b) Arătați că, dacă O, P și Q sînt trei puncte fixe din plan necoliniare, atunci există nu mai mult de două puncte A astfel încît diferențele dintre distanțele $AP - AO$ și $AQ - AO$ să aibă valori date dinainte. De aici rezultă că există numai un număr finit de puncte, în așa fel încît distanțele dintre ele și cele trei puncte fixe necoliniare să poată fi exprimate în numere întregi.

110. a) Plecînd de la paralelogramul dat, formați o rețea infinită de paralelograme egale și așezate paralel, analoagă cu rețeaua de pătrate existente. Demonstrați apoi că pătratele din care a fost alcătuită rețeaua precedentă sînt egale ca mărime cu paralelogramele din care este formată noua rețea.

b) Demonstrați că, dacă poligonul cu vîrfurile în nodurile rețelei de pătrate este împărțit în două poligoane mai mici, ale căror vîrfuri coincid, de asemenea, cu nodurile rețelei și dacă pentru aceste poligoane mai mici formula de demonstrat este adevărată, atunci ea este adevărată și pentru poligonul mare. Mai departe, împărțiți unul dintre poligoane în mai multe triunghiuri; pentru fiecare dintre ele formula noastră este adevărată în baza rezultatului problemei a).

111. Alcătuiți toate poligoanele posibile egale cu cel inițial și așezate paralel cu acesta, avînd centrele în nodurile „pare“ ale rețelei de pătrate (adică în nodurile ale căror distanțe la dreptele rețelei care trec prin centrul poligonului dat sînt exprimate prin numere pare). Demonstrați că nu există două astfel de poligoane care să aibă părți comune și că aria tuturor părților poligoanelor construite, situate în interiorul pătratului de latură 2, cu centrul într-un nod „impar“ al rețelei, este egală cu aria poligonului inițial.

112. Să presupunem că raza ρ a tuturor copacilor este mai mare decît 1/50. Duceți prin centrul grădinii o dreaptă oarecare, care să intersecteze conturul grădinii în punctele M și N și construiți un dreptunghi de lățime 2ρ, pentru care MN este linie de mijloc. Din teorema lui Minkowski (v. problema 111), rezultă că în interiorul acestui dreptunghi se vor afla unele puncte în care sînt plantați copaci; acești copaci vor acoperi vederea din centru în direcția MN. Dacă raza tuturor copacilor este mai mică decît $1/\sqrt{2\,501}$, atunci poate fi indicată direct raza în direcția căreia se va vedea lumină.

113. Utilizați metoda inducției complete.

114. Pentru o rețea care are numai două noduri, enunțul problemei este evident. Mai departe, utilizați pentru demonstrație metoda inducției complete (utilizînd numărul de noduri ale rețelei). Anume, presupuneți că o parte din rețea, formată din linii care nu trec printr-un nod dat, a fost dinainte vopsită și apoi vopsiți liniile care trec prin acest ultim nod (în acest caz, pentru ca modul de vopsire să verifice condițiile problemei, în unele cazuri trebuie să vopsim liniile vopsite mai înainte).

115. a) Nu este greu de demonstrat că numărul segmentelor numerotate cu cifrele 12 și situate pe latura 12 a triunghiului mare este impar, pe celelalte laturi ale triunghiului mare nu se află astfel de segmente. Mai departe, determinînd pentru toate triunghiurile descompunerii numărul de laturi numerotate cu cifrele 12, ne putem convinge că numărul triunghiurilor ale căror vîrfuri sînt numerotate cu cifrele 123 trebuie să fie de aceeași paritate cu numărul segmentelor 12 de pe latura 12 a triunghiului mare, adică trebuie să fie impar (și deci, evident, diferit de zero).

b) Teorema se formulează în felul următor. Dacă tetraedrul mare, avînd cele patru vîrfuri numerotate cu cifrele 1, 2, 3 și 4, este împărțit în tetraedre mult mai mici, astfel încît oricare două tetraedre ale descompunerii sau nu au nici un punct comun sau au un vîrf comun sau au o muchie comună (nu însă o porțiune de muchie) sau au o față comună (nu însă o porțiune de față) și dacă vîrfurile diviziunii așezate pe fața 123 a tetraedrului mare au numerele 1, 2 sau 3 și analog pentru celelalte fețe, iar vîrfurile diviziunii situate pe muchia 12 a tetraedrului

mare au numerele 1 sau 2 şi analog pentru celelalte muchii, atunci va exista neapărat cel puţin un tetraedru al diviziunii avînd cele patru vîrfuri numerotate cu cifrele 1, 2, 3 şi 4.

116. Demonstraţi, utilizînd metoda inducţiei complete, următoarea propoziţie (ceva mai tare decît se cere în enunţul problemei): dacă un poligon oarecare este împărţit în triunghiuri, astfel că nici un grup de două triunghiuri ale diviziunii nu se alipesc de o parte a laturii unuia dintre ele şi în fiecare vîrf al diviziunii se uneşte un număr par de triunghiuri, toate vîrfurile diviziunii pot fi numerotate cu cifrele 1, 2 şi 3 astfel încît toate vîrfurile care se află pe conturul poligonului să fie numerotate de cifrele 1 şi 2 şi toate vîrfurile fiecăruia dintre triunghiurile diviziunii să fie numerotate cu trei cifre diferite.

117. În primul rînd, dacă între două poligoane învecinate ale diviziunii se află porţiuni acoperite de alte poligoane ale diviziunii, atunci adăugaţi aceste porţiuni la poligoanele noastre; în acest caz, veţi obţine o nouă împărţire a pătratului, astfel încît oricare două poligoane învecinate ale descompunerii sau au un punct comun sau se alipesc de-a lungul unei linii frînte. După aceea cercetaţi separat poligonul M_0 care acoperă centrul pătratului (poligonul etajului 1), poligoanele învecinate cu poligonul M_0 (poligoanele etajului 2), poligoanele învecinate cu poligoanele etajului 2 (poligoanele etajului 3) etc. Arătaţi că, dacă toate poligoanele diviziunii au nu mai mult de cinci vecini, nici unul dintre poligoanele etajului 4 nu are vecini în etajul 5, adică toate poligoanele diviziunii sînt date de poligoanele primelor patru etaje (ceea ce nu este posibil, deoarece poligoanele etajului 4 nu se alipesc de frontiera pătratului).

118. Demonstraţi că, dacă curba nu are o coardă de lungime a paralelă cu AB şi nu are o coardă de lungime b paralelă cu AB, atunci ea nu poate să aibă nici o coardă de lungime $a + b$ paralelă cu AB (în demonstraţia acestei propoziţii utilizaţi faptul că lipsa în această curbă a unei coarde de lungime a paralelă cu AB înseamnă că curba care se obţine din cea iniţială printr-o translaţie în sensul AB la distanţa a nu se intersectează cu curba iniţială). Din această propoziţie rezultă că prima afirmaţie din problemă este adevărată.

Pentru demonstraţia celei de-a doua afirmaţii, luaţi a cuprins între $1/n$ şi $1/(n + 1)$ (n este număr întreg); construiţi un exemplu de curbă care nu are nici o coardă paralelă cu AB, a cărei lungime să fie cuprinsă între $1/n$ şi $1/(n + 1)$ (pentru construirea exemplului se recomandă să se dea lui n, la început, valori nu prea mari).

119. a) Fie AB o latură a poligonului convex M de arie 1 şi C un punct de pe poligon cel mai depărtat de AB (sau unul dintre aceste puncte). Demonstraţi că lui M i se poate circumscrie un paralelogram de arie nu mai mare decît 2, avînd o latură care conţine latura AB a poligonului şi două laturi paralele cu AC.

b) Consideraţi paralelogramul $APQR$ circumscris triunghiului ABC de arie 1 şi astfel încît vîrful A al paralelogramului coincide cu vîrful triunghiului, iar laturile PQ şi QR trec prin vîrfurile B şi C; demonstraţi că aria acestui paralelogram nu este mai mică decît 2.

120. a) Înscrieţi în poligonul dat triunghiul $A_1A_2A_3$ de cea mai mare arie şi consideraţi separat cazurile în care aria acestui triunghi nu este mai mare decît 1/2 şi în care ea este mai mare decît 1/2.

b) Demonstraţi mai întîi că unui pătrat de latură 1 nu i se poate circumscrie un triunghi de arie mai mică decît 2. Apoi arătaţi că unui dreptunghi de arie 1 nu i se poate circumscrie un triunghi de arie mai mică decît 2 şi că unui paralelogram de arie 1 nu i se poate circumscrie un triunghi de arie mai mică decît 2. În acest scop, utilizaţi faptul că în proiecţia ortogonală ariile tuturor figurilor se micşorează de acelaşi număr de ori.

121. a) Vom presupune că dreapta l nu intersectează poligonul dat. Fie A vîrful cel mai apropiat de dreapta l al poligonului (sau unul dintre aceste vîrfuri); fie B vîrful cel mai îndepărtat de l al poligonului. Fie, mai departe, l_1', l_0, l_2' drepte paralele cu l şi care divid segmentul AB în patru părţi egale; dreptele l_1' (cea mai apropiată de A) şi l_2' intersectează conturul poligonului în punctele P, Q, respectiv R, S. Demonstraţi că aria a cel puţin unuia din cele două triunghiuri ARS şi BPQ nu este mai mică decît 3/8 din aria lui M.

b) Determinaţi triunghiul de arie maximă înscris în hexagonul regulat şi avînd una din laturi paralelă cu latura AB a hexagonului.

122. a) Aplicaţi metoda inducţiei complete (utilizînd numărul n al progresiilor); în demonstraţie este comod să folosim faptul că, dacă d este cel mai mare divizor comun a două numere

întregi a și b, atunci există două numere întregi p și q (nu neapărat pozitive), astfel încît $d' = pa + qb$. A doua afirmație din problemă nu este greu de demonstrat, dînd un exemplu de trei progresii, astfel ca oricare două dintre ele să aibă un termen comun, iar toate trei să nu aibă nici un termen comun.

b) Demonstrați că, dacă rațiile a două progresii oarecare nu sînt comensurabile, aceste progresii au un singur termen comun (și deci, toate celelalte progresii trebuie să aibă și ele acest termen comun). Dacă însă rațiile oricăror două progresii sînt comensurabile, progresiile considerate pot fi reduse la progresii formate din numere întregi, după care nu ne mai rămîne decît să aplicăm rezultatul de la problema precedentă.

123. a) Încercînd să construim direct un șir format din cifrele 1 și 2 care să nu conțină repetiții, vom ajunge foarte repede la o contradicție.

b) Vom introduce următoarele notații. Fie A un șir oarecare format din cifrele 1 și 2. În acest caz, vom nota cu $\bar{A}$ șirul obținut din A după următoarea regulă: fiecare cifră 1 a șirului A se înlocuiește cu perechea de cifre 12, iar fiecare cifră 2 cu perechea de cifre 21. Vom considera acum următoarele șiruri de cifre 1 și 2:

$$I_1 = 12,$$

$$I_2 = \bar{I}_1 = 12\ 21,$$

$$I_3 = \bar{I}_2 = 12\ 21\ 21\ 12,$$

$$I_4 = \bar{I}_3 = 12\ 21\ 21\ 12\ 21\ 12\ 12\ 21,$$

$$I_5 = \bar{I}_4 = 12\ 21\ 21\ 12\ 21\ 12\ 12\ 21\ 21\ 12\ 12\ 21\ 12\ 21\ 21\ 12,$$

....

Se poate demonstra că nici unul dintre șirurile $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ nu conține cifre sau grupuri de cifre care se repetă succesiv de trei ori.

124. a) Ca și în rezolvarea problemei 123, b) vom nota cu $\widetilde{A}$ șirul obținut dintr-un șir cunoscut A de cifre 0, 1, 2 și 3 după următoarea regulă: oricare cifră 0 din șirul A se înlocuiește cu o pereche de cifre 02, cifra 1 cu un grup de patru cifre 0121, cifra 2 cu un grup de patru cifre 0131 și cifra 3 cu o pereche de cifre 03. Vom considera acum următoarele șiruri de cifre 0, 1, 2 și 3:

$$J_0 = 01,$$

$$J_1 = \widetilde{J_0} = 02\ 0121,$$

$$J_2 = \widetilde{J_1} = 02\ 0131\ 02\ 0121\ 0131\ 0121,$$

$$J_3 = \widetilde{J_2} = 02\ 0131\ 02\ 0121\ 03\ 0121\ 02\ 0131\ 02\ 0121\ 0131\ 0121$$
$$02\ 0121\ 03\ 0121\ 02\ 0121\ 0131\ 0121,$$

....

Se poate demonstra că nici unul din șirurile $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n, \ldots$ nu conține cifre sau grupuri de cifre care se repetă la rînd de două ori.

b) Vom introduce următoarele notații. Fie K un șir de cifre 1, 2 și 3. Vom nota cu $\hat{K}$ șirul obținut din K după următoarea regulă; în locul cifrei 1 a șirului K, care stă în K pe un loc impar, punem grupul de trei cifre 123, iar în locul cifrei 1, care stă pe un loc par, punem grupul de trei cifre 321; la fel, orice cifră 2, care stă pe un loc impar, o vom înlocui cu grupul de trei cifre 231, iar cifra 2, care stă pe un loc par, cu grupul de trei cifre 132; în sfîrșit, cifra 3, care stă pe un loc impar, o vom înlocui cu grupul de trei cifre 312, iar cifra 3, care stă pe un loc par, cu grupul de trei cifre 213. Acum vom considera următoarele șiruri de cifre 1, 2 și 3:

$$K_1 = 123,$$

$$K_2 = \hat{K}_1 = 123\ 132\ 312,$$

$$K_3 = \hat{K}_2 = 123\ 132\ 312\ 321\ 312\ 132\ 312\ 321\ 231,$$

....

Se poate demonstra că nici unul dintre şirurile K_1, K_2, $K_3, \ldots, K_n, \ldots$ nu conţine cifre sau grupuri de cifre care se repetă la rînd de două ori.

125. Vom defini numărul T_n prin următoarea construcţie. În primul rînd, vom scrie la rînd n de unu: $\underbrace{111\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}$. Deoarece trebuie ca din numărul format să nu se poată separa două numere identice de n cifre, după aceşti n de unu sîntem nevoiţi să punem 0: în caz contrar, din numărul format am fi putut să separăm de două ori unul şi acelaşi număr de n cifre $\underbrace{111\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}$ (primele n cifre ale numărului T şi cele n cifre care urmează după prima). Obţinem astfel numărul $111\ldots10$. Mai departe, scriem după primul zero încă alte zerouri atîta timp cît acest lucru este posibil, adică pînă cînd nu vom mai putea adăuga zerouri la sfîrşitul numărului format fără ca din numărul obţinut să se poată separa două numere identice de n cifre. În acest caz, va trebui să adăugăm la sfîrşit cifra unu. Apoi vom adăuga din nou zerouri la sfîrşit atîta timp cît acest lucru va fi posibil, etc. Astfel, vom conveni de fiecare dată să procedăm în felul următor: dacă la sfîrşitul numărului format poate fi pus un zero, fără ca să fie identice două numere de n cifre care pot fi separate din numărul obţinut, atunci scriem la sfîrşit zero; în caz contrar, adăugăm la sfîrşit cifra unu. Procesul de construire a numărului T_n se termină cînd la sfîrşitul numărului nu se va putea adăuga nici zero nici unu (în ambele cazuri se va obţine un număr din care se pot separa două numere identice de n cifre).

Pentru mai multă claritate vom da cîteva exemple. Fie

$$T_2 = 11\,001;$$

într-adevăr, după două unităţi punem doi de zero, iar apoi un unu, deoarece, altfel, din numărul obţinut s-ar putea separa în două moduri numărul 00. După aceasta, numărul T_2 se încheie, deoarece încă de la cifra a cincea nu mai putem adăuga nici zero (deoarece din numărul obţinut s-ar putea separa în două moduri numărul 10), nici unu (deoarece s-ar putea separa în două poduri numărul 11). La fel se construiesc numerele

$$T_3 = 1110001011, \quad T_4 = 1111000010011010111 \text{ etc.}$$

Nu este greu de verificat că din numărul T_2 (respectiv T_3 sau T_4) pot fi separate toate numerele posibile de două cifre (de trei cifre, de patru cifre) formate din zerouri şi unu. Faptul că, în cazul general, din numărul T_n format după regula indicată poate fi separat o r i c e număr k de n cifre (format din zerouri şi unităţi) se demonstrează prin inducţie utilizînd numărul de unităţi de la sfîrşitul numărului k.

126. Demonstraţi (prin inducţie, utilizînd numărul n pentru $n > 2$; pentru $n = 1$ şi $n = 2$ teorema este aproape evidentă) că, dacă m sorturi de prăjituri a cîte n prăjituri de fiecare sort sînt împachetate în m cartoane cîte n prăjituri în carton, atunci pot fi alese m prăjituri din toate sorturile existente, luînd cîte o prăjitură din fiecare carton.

127. 900. Fie A şi B două numere întregi nenegative. Vom scrie aceste numere în sistemul de numeraţie în baza doi

$$A = «a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0», \qquad B = «b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0»;$$

această notaţie înseamnă că $A = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$ şi $B = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0$, unde «cifrele» $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ şi $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ ale numerelor A şi B sînt toate egale cu 0 sau 1, iar «cifrele» de rangul cel mai mare a_n şi b_m sînt egale cu 1. Vom nota acum cu $Z(A, B)$ numărul, care în sistemul de numeraţie în baza 2 se defineşte în modul următor:

$$Z(A, B) = «z_p z_{p-1} \ldots z_1 z_0», \text{ unde } z_i = \begin{cases} 0, \text{ dacă } a_i + b_i = 0 \text{ sau } 2, \\ 1, \text{ dacă } a_i + b_i = 1, \; i = p, \; p-1, \ldots, 1, 0; \end{cases}$$

aici p este cel mai mare număr întreg astfel încît $a_p + b_p = 1$.

Demonstraţi că pentru ordinea de numerotare a pătratelor tablei despre care este vorba în problemă, pătratul care stă la intersecţia dintre rîndul al $(A+1)$-lea şi coloana a $(B+1)$-a va căpăta numărul $Z(A, B)$.

128. Să presupunem că în trei grămezi vor fi respectiv a, b și c chibrituri. Vom scrie numerele a, b și c în sistemul de numerație în baza doi și vom forma suma ultimelor trei cifre ale numerelor a, b și c, a penultimelor trei cifre etc. Dacă cel puțin una dintre sumele cifrelor de același rang din scrierea în baza doi a acestor numere este impară, atunci primul jucător poate cîștiga totdeauna; în caz contrar, la un joc corect al adversarului el trebuie să piardă.

129. Rezolvarea acestei probleme este asemănătoare cu rezolvarea celei precedente, însă este mult mai complicată. Pentru a găsi legea care permite să determinăm numărul de chibrituri din grămezi pentru care primul jucător poate să cîștige și care dă regula jocului fără pierdere în aceste cazuri, trebuie să scriem numerele de chibrituri într-un „sistem de numerație generalizat" (la fel cum în problema precedentă a fost comod să trecem la sistemul de numerație în baza doi).

Scrierea numărului N în sistemul de numerație în baza a are următorul sens. Numărul N se scrie sub forma

$$N = q_n a^n + q_{n-1} a^{n-1} + q_{n-2} a^{n-2} + \ldots + q_1 a + q_0, \qquad (*)$$

unde q_n este cîtul împărțirii lui N la a^n (a^n este cea mai mare putere a lui a care nu este mai mare decît N); q_{n-1} este cîtul împărțirii primului rest $r_1 = N - q_n a^n$ la a^{n-1}, q_{n-2} este restul împărțirii celui de-al doilea rest $r_2 = N - q_n a^n - q_{n-1} a^{n-1}$ la a^{n-2} etc. În acest caz „cifrele" q_n, $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1, q_0$ pot, evident, lua orice valori cuprinse între zero și $a - 1$ (în sistemul de numerație în baza zece cifrele pot fi egale cu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9, iar în sistemul de numerație în baza doi toate acestea sînt egale cu 0 sau 1).

Vom considera acum un șir oarecare crescător, infinit, de numere pozitive, care începe cu unu:

$$u_0 = 1,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n, \ldots$$

Reprezentarea numerelor pozitive întregi N sub forma

$$N = q_n u_n + q_{n-1} u_{n-1} + q_{n-2} u_{n-2} + \ldots + q_1 u_1 + q_0 \qquad (**)$$

o vom numi s i s t e m d e n u m e r a ț i e g e n e r a l i z a t. În scrierea (**) q_n este cîtul împărțirii lui N cu u_n (u_n este cel mai mare număr al șirului, care nu este mai mare decît N), q_{n-1} este cîtul împărțirii „primului rest" $r_1 = N - q_n u_n$ cu u_{n-1}, q_{n-2} este cîtul împărțirii „celui de-al doilea rest" $r_2 = N - q_n u_n - q_{n-1} u_{n-1}$ cu u_{n-2} etc. Evident că orice număr întreg pozitiv N poate fi scris în mod unic în orice „sistem de numerație generalizat". În cazul în care

$$u_0 = a^0 = 1,\ u_1 = a^1 = a,\ u_2 = a^2, \ldots, u_n = a^n, \ldots$$

scrierea (**) trece în (*), adică „sistemul de numerație generalizat" trece în sistemul de numerație obișnuit în baza a (în sistemul de numerație în baza zece, dacă $a = 10$).

„Cifra" q_k a „sistemul de numerație generalizat", definit de șirul dat de numere întregi crescătoare $u_0 = 1, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ poate lua toate valorile dintre zero și cîtul a_k al împărțirii lui u_{k+1} cu u_k (incluzînd sau nu valoarea a_k după cum $u_{k+1} > a_k u_k$ sau $u_{k+1} = a_k u_k$): într-adevăr q_k este cîtul împărțirii „restului al $(n-k)$-lea" $r_{n-k} = N - q_n u_n - q_{n-1} u_{n-1} - \ldots$ $\ldots - q_{k+1} u_{k+1}$ cu u_k, iar „restul al $(n-k)$-lea" evident este mai mic decît u_{k+1}.

Șirul de numere întregi

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

definit de relațiile

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}; \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

se numește ș i r u l l u i F i b o n a c c i. Este ușor de verificat că primii termeni ai șirului lui Fibonacci se scriu sub forma următoare:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

„Sistemul de numerație generalizat" legat de descompunerea numerelor întregi pozitive cu ajutorul termenilor $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ai șirului lui Fibonacci (u_0 nu intră în aceste descompuneri, deoarece chiar $u_1 = 1$) este numit firește s i s t e m u l d e n u m e r a ț i e a l l u i F i b o n a c c i. Nu este greu de arătat că în sistemul de numerație al lui Fibonacci toate „cifrele"

numărului N sînt egale sau cu 0 sau cu 1 $\left(\text{deoarece } r_{n-k} < u_{k+1}, \text{ iar } \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_k + u_{k-1}}{u_k} < 2\right)$ şi între fiecare două unităţi figurează cel puţin un zero (deoarece, dacă pe locurile al k-lea, al $(k-1)$-lea şi al $(k-2)$-lea ar sta „cifrele" 0, 1, 1, aceasta ar însemna că „restul al $(n-k)$-lea" r_{n-k} este mai mic decît u_k şi $r_{n-k} = u_{k-1} + u_{k-2} + \ldots$; însă aceasta nu este posibil deoarece $u_{k-1} + u_{k-2} = u_k$).

Pentru rezolvarea problemei considerate este comod să reprezentăm numerele a şi b de chibrituri din cele două grămezi în sistemul de numeraţie al lui Fibonacci; în acest caz nu este greu să se observe legea după care se formează situaţiile iniţiale de pierdere pentru primul jucător (adică valorile iniţiale ale numerelor a şi b) şi apoi să se stabilească regula jocului fără pierdere în cazul în care situaţia iniţială nu era de pierdere pentru primul jucător.

130. Utilizaţi formula de la problema 138, b). Pentru rezolvarea părţii a doua a problemei trebuie să folosim faptul că cos φ ia valoarea cea mai mare şi cea mai mică pentru φ multiplu de π şi devine egal cu zero, pentru $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, unde k este orice număr întreg.

131. Polinomul $x^2 - 1/2$, a cărui abatere de la zero este egală cu 1/2.

132. Consideraţi diferenţa

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x),$$

unde $P_n(x)$ este un polinom oarecare de gradul n cu coeficientul dominant egal cu 1, a cărui abatere de la zero pe segmentul de la -1 la $+1$ nu este mai mare decît $1/2^{n-1}$. Această diferenţă este un polinom de grad nu mai mare decît $n - 1$. Cercetaţi în care puncte polinomul $R(x)$ este pozitiv şi în care negativ, şi deduceţi că curba $y = R(x)$ trebuie să intersecteze axa OX nu mai puţin de n ori, adică ecuaţia $R(x) = 0$ de grad nu mai mare decît $n - 1$ are nu mai puţin de n rădăcini. Din faptul că aceasta nu este posibil, rezultă afirmaţia din problemă. Examinaţi separat cazurile în care abaterea de la zero a polinomului $P_n(x)$ este mai mică decît $1/2^{n-1}$ şi în care ea este egală cu $1/2^{n-1}$.

133. Polinoamele căutate sînt $2T_n\left(\frac{x}{2}\right)$, unde n este oarecare, iar $T_n(x)$ este polinomul lui Cebîşev (v. problema 130); abaterea de la zero a tuturor acestor polinoame pe segmentul de la -2 la $+2$ este egală cu 2. În rezolvare, utilizaţi rezultatul problemei 132.

134. Polinomul

$$\frac{n!}{2^n}\left\{\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!} + \frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1!\,(n-1)!} + \right.$$
$$\left. + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!\,(n-2)!} + \ldots + \frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{n!}\right\},$$

a cărui abatere este egală cu $n!/2^n$. În demonstraţie utilizaţi formula

$$P(x) = (-1)^n P(0)\,\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!} +$$
$$+ (-1)^{n-1} P(1)\,\frac{(x-0)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{1!\,(n-1)!} +$$
$$+ (-1)^{n-2} P(2)\,\frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!\,(n-2)!} + \ldots$$
$$\ldots + P(n)\,\frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{n!},$$

unde $P(x)$ este un polinom oarecare de gradul n, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$,... $P(n)$ sînt valorile pe care el le ia pentru $x = 0, 1, 2, \dots, n$.

135. Pentru ca pe segmentul de lungime l să nu existe un punct M astfel încît $MA_1 \cdot MA_2 \dots \cdot MA_n > 2\left(\frac{l}{4}\right)^n$, este necesar ca toate punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$ să fie situate pe acest segment la distanțele $\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2n}, \frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{2n}, \frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{2n}, \dots \frac{l}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ de mijlocul segmentului.

În rezolvare utilizați reprezentarea geometrică a numerelor complexe: dacă punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$ corespund numerelor complexe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, iar punctul M corespunde numărului complex z, produsul $MA_1 \cdot MA_2 \dots \cdot MA_n$ este egal cu valoarea absolută a polinomului $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ de gradul n cu coeficientul termenului de cel mai înalt grad 1 și cu coeficienți complecși. Mai departe, utilizați rezultatul problemei 132.

136. Utilizați definiția geometrică a sinusului și a tangentei cu dublul ariilor anumitor triunghiuri legate de cercul trigonometric.

137. $\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$. Înmulțiți această expresie cu $\sin\frac{\alpha}{2^n}$.

138. Utilizați formula lui Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

139. a) $C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots = 0$. Utilizați formula din problema 138, a) (considerînd $n = 2m + 1$).

b) $x^n - C_n^1 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + C_n^4 x^{n-4} - \dots = 0$.

Utilizați formula pentru ctg $n\alpha$, care se deduce din formula de la problema 138, c).

c) — d). Respectiv ecuațiile

$$C_{2m}^1(1-x)^{m-1} - C_{2m}^3(1-x)^{m-2}x + C_{2m}^5(1-x)^{m-3}x^2 - \dots = 0,$$

$$(1-x)^m - C_{2m}^2(1-x)^{m-1}x + C_{2m}^4(1-x)^{m-2}x^2 - \dots = 0.$$

Utilizați formulele de la problemele 138, a) și b) (punînd $n = 2m$).

140. a) Utilizați rezultatul problemei 139, a).

b) Rezultă din identitatea de la problema a).

c) Utilizați rezultatul problemei 139, b).

141. Utilizați rezultatele problemelor 139, c) și d).

142. a) Puneți în indentitatea de la problema 137 $\alpha = \pi/2$ și treceți la limită pentru $n \to \infty$.

b) $3\sqrt{3}/(4\pi)$.

143. a) Utilizați rezultatul problemei 136, a).

b) $\pi^4/90$. Determinați suma puterilor a patra ale cotangentelor și cosecantelor unghiurilor $\frac{\pi}{2m+1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \dots, \frac{m\pi}{2m+1}$.

144. a) Se rezolvă analog cu problema 143, a). b) $\pi^2/8$.

145. Considerați următoarele două expresii, a căror regulă de formare este dată de formula lui Wallis:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}},$$

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{3\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{4\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{6\pi}{4m}}{\sin\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\,\frac{\sin\frac{2m\pi}{4m}}{\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}.$$

Mai departe, utilizați rezultatul problemei 136, b).

146. $a^3/3$.

147. a) 2π. b) $2\sin^2\frac{a}{2}$.

148. a) $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. Împărțiți latura AD a trapezului curbiliniu considerat $ABCD$ ($OA = a$, $OD = b$) în părți $AM_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{n-1}D$, așa încît să avem $\frac{OM_1}{a}=\frac{OM_2}{OM_1}=\frac{OM_3}{OM_2}=\cdots=\frac{b}{OM_{n-1}}$.

b) $b^{m+1}/(m+1)$.

149. Împărțiți intervalele A_1D_1 (unde $OA_1 = a_1$, $OD_1 = b_1$) și A_2D_2 (unde $OA_2 = a_2$, $OD_2 = b_2$) în n părți egale și înlocuiți trapezele curbilinii cu figuri în trepte.

150. Utilizați rezultatul problemei 149.

151. Utilizați faptul că $F(z)$ este o funcție continuă crescătoare de argumentul z.

152. Demonstrați mai întîi că, pentru orice α, avem $F(z^\alpha) = \alpha F(z)$.

153. a) $(a^b - 1)/\ln a$. În demonstrație va trebui să folosim rezultatul problemei 159, c).

b) $(b\ln b - b + 1)/\ln a$. Acest rezultat poate fi obținut din formula de la problema precedentă sau poate fi dedus independent ca și soluția problemei 148, a) (v. indicația la această problemă; în ultimul caz, va trebui să folosim rezultatele problemelor 168, b), 1) și 159, c).

154. $\frac{1}{2}\ln a\,(\log_a b)^2$. Soluția acestei probleme este analoagă celei de-a doua rezolvări a problemei 153, b).

155. Utilizați rezultatul problemei 148, b).

156. a) Este suficient să se demonstreze că, pentru $n>m$, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)$. Mai departe utilizați rezultatul problemei 152.

problemei 152.

157. Cercetați separat cazurile în care z este pozitiv și negativ; utilizați rezultatul problemei 152.

158. Utilizați rezultatul problemei 157.

159. a) Utilizați rezultatul problemei 152. b) $\frac{1}{\ln a}$. Utilizați rezultatul problemei a).

c) $\ln a$. Utilizați rezultatul problemei 152.

160. Evaluați în două moduri aria trapezului curbiliniu mărginit de axa absciselor, curba $y = \ln x$ și dreapta $x = n$, studiind suma ariilor trapezelor înscrise în acest triunghi curbiliniu și a celor circumscrise acestuia; utilizați rezultatul problemei 153, b).

161. a) Se rezolvă ca și problema 160. b) Utilizați formula lui Wallis (problema 145).

162. Utilizați rezultatul problemei 152.

163. Utilizați rezultatul problemei 154.

164. Utilizați rezultatul problemei 148, a).

165. Evident, $\pi(N)$ nu este mai mare decît suma dintre numărul r și numărul numerelor care nu sînt mai mari decît N și nu se divid cu nici unul dintre cele r numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ($p_r < N$). Numărul numerelor întregi, care nu sînt mai mari decît N și care nu se divid cu nici unul dintre numerele prime date, poate fi calculat ca și în soluția problemei 11. În expresia obținută, suprimați toate semnele părții întregi și evaluați eroarea obținută în acest caz; după aceea, alegeți în mod convenabil numărul r.

166. Evaluați în două moduri valoarea expresiei $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Anume, demonstrați că $2^n < C_{2n}^n < 2^{2n}$ și că

$$n^{\pi(2n) - \pi(n)} < C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

167. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_r$ toate numerele prime nu mai mari decît numărul întreg N; în acest caz, descompunerea numărului întreg $N!$ în factori primi este de forma

$$N! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Aici, nu este greu de calculat fiecare dintre exponenții α_i ($i = 1, 2, \ldots, r$):

$$\alpha_i = \left[\frac{N}{p_i}\right] + \left[\frac{N}{p_i^2}\right] + \left[\frac{N}{p_i^3}\right] + \ldots$$

(relativ la notații v. p. 10). De aici se poate obține evaluarea numărului $\lg N!$ în care va figura suma $\frac{\lg 2}{2} + \frac{\lg 3}{3} + \frac{\lg 5}{5} + \cdots + \frac{\lg p}{p}$ din enunțul problemei; în acest caz, va trebui să utilizăm și teorema lui Cebîșev (problema 166).

A doua evaluare a numărului $\lg N!$ poate fi obținută plecînd de la rezultatul problemei 160. Mai departe, rămîne doar să comparăm cele două evaluări obținute.

168. a) Exprimați numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ cu ajutorul lui $B_1, B_2, \ldots, B_n$ și puneți expresiile obținute în suma S.

b) 1) $\dfrac{nq^n}{q-1} - \dfrac{q^n - 1}{(q-1)^2}$; 2) $\dfrac{n^2q^n}{q-1} - \dfrac{(2n-1)\,q^n + 1}{(q-1)^2} + \dfrac{2q^n - 2}{(q-1)^3}$.

169. Aplicați sumei $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{11} + \cdots + \dfrac{1}{p}$ formula din problema 168, a) și utilizați prima teoremă a lui Mertens (problema 167); în afară de aceasta va trebui să utilizați unele evaluări asemănătoare celor din problema 162.

170. Evident,

$$\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p}\right)\right] =$$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{7}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{11}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Mai departe, pentru evaluarea membrului al doilea, utilizați definiția geometrică a logaritmului natural (v. problemele 149; 152); în sfîrșit utilizați teorema a doua a lui Mertens (problema 169).

1. A ›elson, I. B. *Rojdenie logarifmov*. Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1948.
2. Aleksandrov, P. S., Efremovici, V. A. *O prosteişih poneatiiah sovremennoi topologhii*. Moscova-Leningrad, ONTI, 1935.
3. Appel, K., Hanken, W. *The solution of the four-color-map problem*. În: Scientific American, October 1977, pp. 108—121.
4. Arnold, I. V. *Ob odnom svoistve cisla* $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$. În: Matematiceskoe prosveşcenie, 8, 1936, pp. 16—24.
5. Arnold, I. V. *Teoriia cisel*. Moscova, Ucipedghiz, 1939.
6. Benson, R. V. *Euclidean geometry and convexity*. New York, McGraw-Hill, 1966.
7. Bernstein, S. N. *Teoriia veroiatnostei*. Moscova, Gostehizdat, 1964.
8. Bonsford, E., Fabel, K., Rühiman, O. *Schach und Zahl*. Düsseldorf, 1966.
9. Breny, H. *Theorie des probabilités*. Bruxelles, Presses Universitaires, 1969.
10. Buchstab, A. A. *Teoriia cisel*. Moscova, Prosveşceniie, 1966.
11. Burn, R. P. *Deductive transformation geometry*. Ch. 1, Cambridge, University Press, 1975.
12. Câmpan, Florica T. *Povestea numărului* π. Ed. a II-a, Bucureşti, Editura Albatros, 1977.
13. Chinn, W. G., Steenrod, N. E. *Introducere in topologie*. Bucureşti, Editura tehnică, 1981.
14. Courant, R., Robbins, H. *What is mathematics*? London, Oxford University Press, 1948.
15. Coxeter, H. S. M. *Introduction to geometry*. New York, Wiley, 1969.
16. Coxeter, H. S. M. *Projective geometry*. Walfhman (Mass)., Blaisidell Publ. Comp., 1964.
17. Dinkin, E. B., Uspenski, V. A. *Matematiceskie besedi*. Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1952.
18. Durran, J. H. *Statistics and probability*. Cambridge, University Press, 1970.
19. Eggleston, H. G. *Convexity*. Cambridge, University Press, 1958.
20. Ejov, I. I. ş.a. *Elementi kombinatoriki*. Moscova, Nauka, 1977.
21. Engel, A., Varga T., Walser, W. *Zufal edor Strategie*? Stuttgart, Klett, 1974.
22. Euler, L. *Vvedenie v analiz beskonecino malih*. V. 1, Moscova-Leningrad, ONTI, 1936.
23. Feller, W. *An introduction to probability theory and its application*. Vol. 1, New York, Wiley, 1968.
24. Flachsmeyer, Ju. *Kombinatorik*. Berlin, Deurscher Verlag der Wissenschaften, 1969
25. Fomin, S. V. *Sistemi scislentiia*. Moscova, Nauka, 1968.
26. Freudenthal, H. *Wahrscheinlichkeit und Statistik*. München, Oldenbourg, 1963.
27. Gandolli, R.A., Ylvesaker, P. *Discrete probability*. New York, Harcourt, Brau and World, 1967.

28. Gardner, M. *Amuzamente matematice*. București, Editura științifică, 1968.
29. Ghik, E. Ia. *Matematika na şahmatnoi doske*. Moscova, Nauka, 1976.
30. Gnedenko, B. V., Hincin, A. I. *Introducere elementară în calculul probabilităților*. București, Editura tehnică, 1953.
31. Golovina, L. I., Iaglom, I. M. *Inducția în geometrie*. București, Editura tehnică, 1964.
32. Gridgeman, N. T. *Geometric probability and the number* π. În: Scripta Mathematica, v. 25, pp. 183—195, 1960.
33. Hadamard, J. *Lecții de geometrie elementară*. București, Editura tehnică, 1959.
34. Hadwiger, H. *Altes und Nomers über konvexe korper*. Basel, Birkhauser, 1955.
35. Hall, M. Jr. *Combinatorial theory*. Waltham (Mass.), Blaisdell Publ. Comp., 1967.
36. Hall, M. Jr. *Some aspects of combinatorial analysis*. În: Survey in Applied Mathematics IV: *Some aspects of analysis and probability*. New York, Wiley, 1958.
37. Hartshorne, R. *Foundations of projective geometry*. New York, Benjamin, 196'
38. Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. *Geometry and the imagination*. New York, Chelsea 1952.
39. Hodges, S.L., Lehmann, E.L. *Elements of finite probability*. San Francisco, Fr nan 1965.
40. Iaglom, I. M., Bolteanski, V. G. *Vipuklie figuri*. Moscova-Leningrad, Go hiz dat, 1951.
41. Karteszi, F. *Introduction to finite geometries*. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1976.
42. Kendall, M. G., Moran, P. A. P. *Geometric probabilities*. London, Griffin, 1963.
43. Lichtwei, K. *Konvexe Mengen*. Berlin, Deutscher Verlag der Nissenschaften, 1980
44. Lünerburg, H. *Kombinatorik*. Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1957.
45. Lusternik, L. A. *Vipuklie tela*. Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1941,
46. Markuşevici, A. I. *Arii și logaritmi*. București, Editura tehnică, 1954.
47. Markuşevici, A. I. *Șiruri recurente*. București, Editura tehnică, 1954.
48. Morezova ş.a. *Olimpiadele internaționale de matematică*. București, Editura tehnică, 1978.
49. Mosteller, F. *Fifty challenging problems in probability*. Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1965.
50. Mosteller, F., Rourke, R. E. K., Thomas, J. Jr. *Probability: a first course*. Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1961.
51. Neyman, J. *First course in probability and statistics*. New York, Holt, Reinhart and Winston, 1968.
52. Polya, G., Szegő, G. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 1. Berlin, Springer, 1958.
53. Shklearsky, D.O., Chentzov, N.N., Yaglom, I.M. *The USSR Olympiad problem book*. San Francisco, Freeman, 1962.
54. Steinhaus, H. *Caleidoscop matematic*. București, Editura tehnică, 1961.
55. Stevenson, F. W. *Projective planes*. San Francisco, Freeman, 1972.
56. Şklearski, D. O., Cențov, N. N., Iaglom, I. M. *Izbrannie zadaci teoremi elementarnoi matematiki*. Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1954.
57. Şnirelman, L. G. *Prostie cisla*. Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1940.
58. Tomescu, I. *Introducere în combinatorică*. București, Editura tehnică, 1972.
59. Tomescu, I. *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1981.
60. Trost, E. *Primzahlen*. Basel-Stuttgart, Birkhauser, 1953.
61. Valentine, F. A. *Convex sets*. New York, McGraw-Hill, 1964.
62. Vilenkin, N. Ia. *Kombinatorika*. Moscova, Nauka, 1969.
63. Vilenkin, N. Ia. *Populearnaia kombinatorika*. Moscova, Nauka, 1975.
64. Vinogradov, I. M. *Teoria numerelor*. București, Editura Academiei, R.P.R., 1952.
65. Volberg, O. A. *Osnovnie idei proiektivnoi gheometrii*. Moscova-Leningrad, 1949.
65. Vorobiev, N. N. *Numerele lui Fibonacci*. București, Editura tehnică, 1953.